Test z matematiky – 26.2.2020

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3}$.

Řešení: Integrovanou funkci rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{2}{4x^2-8x+3} = \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x-1}\,.$$

Pak dostaneme

$$\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3} = \lim_{y\to\infty}\int_2^y \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3} = \lim_{y\to\infty}\int_2^y \left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-3}{2x-1}\right|\right]_2^y = \tfrac{1}{2}\ln 3\,.$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = x_1 + 2x_2\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 4x_2\,, \qquad\qquad x_1(0) = 3\,, \quad x_2(0) = 5\,.$$

Řešení: Jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Její charakteristická rovnice

$$\det\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0\,,$$

má řešení $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -5$. Těmto vlastním číslům matice $\mathbf{A}$ odpovídají vlastní vektory

$$\lambda_1 = -2 \;\longrightarrow\; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -5 \;\longrightarrow\; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tedy soustava má dvě lineárně nezávislá řešení $\mathbf{x}_1 = \mathrm{e}^{2t}\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{x}_2 = \mathrm{e}^{-5t}\mathbf{v}_2$. Obecné řešení uvedené soustavy proto je

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2\,, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-5t}\,, \\ x_2 &= C_1\mathrm{e}^{2t} - 3C_2\mathrm{e}^{-5t}\,, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Pro ty získáme z počátečních podmínek rovnice

$$2C_1 + C_2 = 3\,, \quad C_1 - 3C_2 = 5\,, \quad \text{tj.} \quad C_1 = 2\,, \quad C_2 = -1\,.$$

Řešení Cauchyovy úlohy tedy je

$$x_1(t) = 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-5t}\,, \qquad x_2(t) = 2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-5t}\,.$$

Najděte nejdelší sečnu elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$, která prochází bodem $[0; -2]$.

ŘEŠENÍ: Nechť je $[x; y] \neq [0; -2]$ bod elipsy, tj. platí $x^2 + 3y^3 = 12$. Vzdálenost tohoto bodu ob vrcholu $[0; -2]$ je $d = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$. Když dosadíme za x^2 dostaneme úlohu najít maximum funkce

$$d(y) = \sqrt{16 + 4y - 2y^2} \quad \text{na intervalu} \quad -2 \leq y \leq 2\,.$$

Tato funkce může mít extrem v bodě, kde

$$d'(y) = \frac{2 - 2y}{\sqrt{16 + 4y - 2y^2}} = 0\,, \quad \text{tj.} \quad y = 1\,.$$

Protože $d(-2) = 0$, $d(2) = 4$ a $d(1) = 3\sqrt{2} > 4$, nastává maximum pro $y = 1$.
Hledané body tedy jsou $[3; 1]$ nebo $[-3; 1]$.