„Transportation and Telecommunication in the 3rd Millenium“
10th Anniversary of the Foundation of the Faculty Transportation Sciences
Prague, May 26 – 27, 2003

OPTIMÁLNÍ ROZLOŽENÍ DOPRAVNÍCH TOKŮ NA DOPRAVNÍ SÍTI

Tomáš Třasák[1]

V tomto článku je uvedena citace metody pro eficientní rozložení dopravních toků na dopravní síti. Aplikace této metody je v optimalizaci železniční dopravy. Ve druhé části článku je uveden popis charakteru silniční dopravní sítě. Délka fronty čekajících vozidel na hraně silniční dopravní sítě. Určení doby průjezdu hran silniční dopravní sítě.

Klíčová slova: Teorie grafů, vícekriteriální optimalizace, parametrické programování, lineární programování, Simplexová metoda, intenzita dopravy

Úvod

V dopravní praxi (logistice) se často vyskytují problémy, které vedou na obecný problém typu: Máme přemístit daný počet dopravních kompletů po dané dopravní síti tak, aby náklady na přemístění a zároveň doba přemístění byly nejmenší možné. Řešení tohoto problému je různé podle konkrétní situace. Pokud je propustnost úseků sítě větší než počet dopravních kompletů, které máme přemístit, pak použijeme algoritmus pro nalezení nejkratší cesty grafem z pramene do ústí. Po nalezené cestě provezeme daný počet dopravních kompletů.

Pokud propustnost nalezené cesty (nejmenší propustnost ze všech propustností na dané cestě) je menší než počet dopravních kompletů, které máme přemístit, pak musíme volit algoritmus, který optimálně rozloží dopravní tok po celé dopravní síti.

Matematické modelování práce dopravních systémů může být z hlediska vstupních toků dopravních jednotek deterministické nebo stochastické. Železniční dopravní systémy pro svoji organizovanost umožňují využít deterministických metod. Silniční dopravní systémy vykazují větší míru neurčitosti vstupního toku a pro simulaci nebo optimalizaci je nutné volit některou ze stochastických metod.

Pro optimalizaci dopravních systémů je vypracovaná metoda pro eficientní rozložení dopravních toků v dopravní síti. Pomocí této metody dokážeme rozložit dopravní tok jedné relace na dopravní síť tak, aby byly minimální jak náklady na průjezd, tak celková doba průjezdu touto sítí. Citace z této metody je uvedena v první kapitole.

Tato metoda vyžaduje propustnost jednotlivých hran dopravní sítě rovnu konstantě, je tedy deterministickým modelem. Propustnost hran v železniční dopravní síti (disponibilní propustnost) se stanoví jako rozdíl maximální intenzity (tzv. plného grafikonu) a intenzity (tzv. realizovaného grafikonu). Výsledkem je tedy konstanta rovná počtu vlaků, které mohou ještě projet danou hranou aniž by byla překročena kapacita tratě. I když je realizovaný grafikon každý den jiný, můžeme při minimálních rozdílech v realizovaných grafikonech použít ve výpočtech

[1] Ing. Tomáš Třasák, doktorand, katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT, xtrasak@fd.cvut.cz

jeden z těchto realizovaných grafikonů. Další možností je využít této metody na operativní úrovni rozhodování při tvorbě denních plánů, kdy známe předpokládaný grafikon v probíhajícím nebo následujícím dni.

Zatím dosud není metoda pro optimalizaci dopravních toků v silniční síti dopravního systému. Vstupní tok do silniční dopravní sítě je z podstaty svobody rozhodnutí účastníků silničního provozu stochastická veličina.

Metoda pro eficientní rozložení dopravních toků[2]

Máme zadanou dopravní síť jako množinu uzlů U a hran H a jejich ohodnocení. Všechny uzly $u_i \in U$ jsou ohodnoceny kapacitou uzlu c_i (množství vlaků, které v něm mohou být na jednotku času – 1 den – odstaveny) a cenou za odstavení jedné vlakové jednotky za časovou jednotku (1 den) a_i. Všechny hrany $\mathbf{h}^{(ij)} \in H$ jsou ohodnoceny kapacitou hrany $c^{(ij)}$ (použitelnou propustností), tj. počtem vlakových jednotek, které mohou být přemístěny po této hraně za časovou jednotku (1 den), cenou za průjezd jedné vlakové jednotky po této hraně $a^{(ij)}$ a dobou průjezdu danou hranou (délkou hrany v časových jednotkách) $d^{(ij)}$.

Všechny hrany $\mathbf{h}^{(ij)} \in H$ uvažujeme jako uzavřené úsečky včetně jejich počátečního a koncového uzlu a tedy použitelná propustnost oběma přilehlými uzly u_i a u_j je větší nebo rovna použitelné propustnosti hrany $\mathbf{h}^{(ij)}$ a v ceně za průjezd hranou $\mathbf{h}^{(ij)}$ je započtena i cena za průjezd přilehlými uzly u_i a u_j.

Předpokládejme, že ohodnocení hran a uzlů je po celou dobu dopravy všech vlakových jednotek z pramene do ústí konstantní.

Pro každý uzel $u_i \in U$ označme jako ${}_iI$ indexovou množinu všech uzlů $u_l \in U$ (předchůdců uzlu u_i), pro které existují hrany $\mathbf{h}^{(ni)}$, $n \in {}_iI$ a jako I_i indexovou množinu všech uzlů $u_k \in U$ (následníků uzlu u_i), pro které existují hrany $\mathbf{h}^{(ik)}$, $k \in I_i$.

Cíl úlohy

Máme dopravit daný počet vlakových jednotek (v) po dané dopravní síti (přes uzly ze zadané množiny U a po hranách z množiny H) z pramene u_0 do ústí u_p v čase menším nebo rovném T, přičemž všechny vlakové jednotky musí opustit výchozí uzel za dobu Q ($Q \leqq T$). Dopravním tokem nazveme proměnnou veličinu $x_{ij}(t)$, která označuje množství vlakových jednotek, které byly přemístěny z uzlu u_i do uzlu u_j po hraně $\mathbf{h}^{(ij)}$ ve dni t. Proměnná t značí konec každého dne dopravy.

Dopravní toky danou sítí jsou omezeny omezujícími podmínkami, které tvoří omezení na kapacitu hran a uzlů.

Cílem úlohy je vybrat takový tok danou dopravní sítí ze všech možných, aby cena za přemístění v vlakových jednotek z pramene do ústí byla minimální a současně, aby doba průjezdu sítí byla minimální.

Omezující podmínky

Povahu dopravní sítě vyjádříme pomocí omezení pro dopravní toky $x_{ik}(t)$ ve dni t ($1 \leqq t \leqq T$) po dané dopravní síti, $u_i \in U$, $k \in I_i$. Dopravní toky $x_{ik}(t)$ musí splňovat následující podmínky:

---

[2] Citace metody, Grygarová, L.: Dopravní problém, nepublikovaná výzkumná práce, Praha, 1999 (k dispozici na katedře logistiky a dopravních procesů, FD ČVUT)

a) Omezení na kapacitu hrany $\mathbf{h}^{(ik)}$
   Dopravní tok každou hranou musí být menší nebo roven kapacitě hrany.
   $0 \le x_{0k}(t) \le c^{(0k)}, (k \in I_0, t = 1, ..., Q)$
   $0 \le x_{ik}(t) \le c^{(ik)}, (i = 1, ..., P - 1, k \in I_i, t = 1, ..., T).$

b) Omezení na kapacitu uzlu u_i (i = 1, ..., P – 1)
   Pro každý průchozí uzel (uzly sítě mimo zdroje a ústí) musí být počet odstavených vlaků v každém dni menší nebo roven kapacitě uzlu přičemž na konci posledního dne musí být všechny vlakové jednotky v posledním uzlu (ústí). Jinými slovy na konci posledního dne nesmí zůstat v žádném uzlu mimo posledního odstavené vlaky.
   $$0 \le \sum_{s=1}^{t} \left(\sum_{l \in {}_iI} x_{li}(s) - \sum_{k \in I_i} x_{ik}(s) \right) \le c_i', (i = 1, ..., P - 1, t = 1, ..., T - 1),$$
   přičemž
   $$\sum_{s=1}^{T} \left(\sum_{l \in {}_iI} x_{li}(s) - \sum_{k \in I_i} x_{ik}(s) \right) = 0, (i = 1, ..., P - 1).$$

c) Omezení pro výchozí uzel (pramen) u_0
   Všechny vlakové jednotky musí opustit výchozí uzel do doby Q.
   $$\sum_{t=1}^{Q} \sum_{k \in I_0} x_{0k}(t) = v.$$

d) Omezení pro dopravní toky
   Každý dopravní tok může nabývat pouze kladných hodnot.
   $x_{ik}(t) \ge 0 \; (i = 1, ..., P - 1, k \in I_i, t = 1, ..., T),$
   $x_{0k}(t) \ge 0 \; (k \in I_0, t = 1, ..., Q)$

Tyto omezující podmínky popisují množinu přípustných řešení daného problému. Označme ji M.

Cílové funkce

Cílem úlohy je minimalizovat náklady a čas přemístění. Zavedeme tedy dvě cílové funkce nákladovou a časovou. Obě tyto funkce jsou lineární. Proměnné jsou dopravní toky přes jednotlivé hrany v jednotlivých dnech.

Nákladová funkce je tvořena součtem cen za průjezd hranami $\mathbf{h}^{(ij)}$, cen za průjezd hranami vycházejícími z výchozího uzlu $\mathbf{h}^{(0j)}$, cen za odstavení vlakových jednotek v uzlech u_i, cen za odstavení vlakových jednotek ve výchozím uzlu u_0 a cen za odstavení vlakových jednotek v posledním uzlu u_p. Součty jsou tvořeny přes všechny hrany resp. uzly a přes všechny dny dopravy (z výchozího uzlu se vyjíždí do doby Q). Cena za průjezd hranou $\mathbf{h}^{(ij)}$ ve dni t je vyjádřena jako součin ceny za průjezd jedné vlakové jednotky $a^{(ij)}$ a dopravního toku touto hranou $x_{ij}(t)$. Cena za odstavení vlakových jednotek v uzlu u_i ve dni t je vyjádřena jako součin ceny za odstavení jedné vlakové jednotky a_i a počtu vlakových jednotek, které zůstanou odstaveny v uzlu déle než jeden den (v uzlu mohou také zůstat odstavené vlakové jednotky z předchozích dní). Ve výchozím uzlu jsou na počátku přepravy přistavené vlakové jednotky, které uzel postupně opouštějí. Do posledního uzlu vlaky naopak postupně přijíždějí.

$$f_1 \equiv \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P-1}\sum_{j\in I_i} a^{(ij)}\, x_{ij}(t) + \sum_{t=1}^{Q}\sum_{j\in I_0} a^{(0j)}\, x_{0j}(t) + \sum_{i=1}^{P-1} a_i \left[\sum_{s=1}^{t}\left(\sum_{l\in {}_iI} x_{li}(s) - \sum_{k\in I_i} x_{ik}(s)\right)(T-s)\right] +$$

$$+ a_0\left[(Q-1)v - \sum_{t=1}^{Q-1}(Q-t)\sum_{k\in I_0} x_{0k}(t)\right] + a_p\left[\sum_{t=1}^{T-1}(T-t)\sum_{l\in {}_pI} x_{lp}(t)\right]$$

Časová cílová funkce je tvořena součtem dob průjezd jednotlivými hranami $\mathbf{h}^{(ij)}$ v jednotlivých dnech t (z výchozího uzlu se vyjíždí do dne Q). Doba průjezdu hranou ve dni t je vyjádřena jako součin doby průjezdu jedné vlakové jednotky $d^{(ij)}$ a dopravního toku touto hranou $x_{ij}(t)$.

$$f_2 \equiv \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P-1}\sum_{j\in I_i} d^{(ij)}\, x_{ij}(t) + \sum_{t=1}^{Q}\sum_{j\in I_o} d^{(oj)}\, x_{oj}(t)$$

Řešení vícekriteriální úlohy

Hledáme minimum nákladové a časové cílové funkce na množině přípustných řešení M. Tuto úlohu vícekriteriálního programování převedeme na úlohu jednoparametrického programování $\min_{M}\{(1-\lambda)f_1 + \lambda f_2\}$, $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ a vyřešíme Simplexovou metodou. Hodnota parametru představuje váhu jednotlivých funkcí. Pro každý interval hodnoty parametru dostaneme jiné eficientní řešení. Uživatel si vyber jedno řešení podle toho oč je pro něj důležitější minimalizace nálkadů než doby průjezdu.

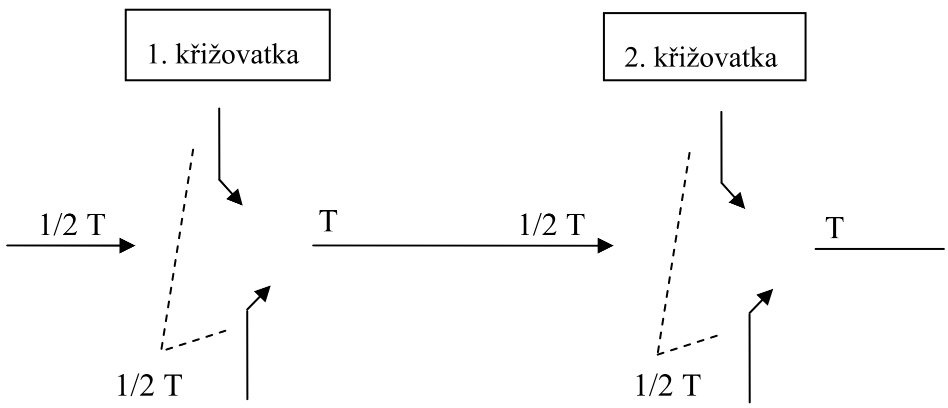
Silniční dopravní síť

Propustnost dopravních komunikací je maximální množství vozidel (dopravních kompletů), které mohou projet danou komunikací za jednotku času (den, hodinu). Je dána technickými parametry dopravní komunikace tedy především konstrukční rychlostí a počtem jízdních pruhů. Na této komunikaci je realizován dopravní provoz jinými slovy pohyb dopravních prostředků. Tento provoz vytváří dopravní proud, který je charakterizován svojí rychlostí a intenzitou (počtem vozidel, která projedou měřené místo za jednotku času). Maximální intenzita dopravního proudu na dané komunikaci by se teoreticky mohla rovnat propustnosti komunikace. To by platilo pouze v případě, že vozidla mohou po opuštění této komunikace neomezeně pokračovat ve svém pohybu.

V reálné dopravní síti silničních komunikací může nastat a také nastává situace že propustnost následného úseku ke zkoumanému úseku je menší než propustnost zkoumaného úseku. To je například situace, kdy dálnice se dvěma jízdními pruhy v jednom směru se zúží do jednoho jízdního pruhu. Dále je to případ křižovatky, kdy se dvě komunikace sbíhají v jednu. Dále je to světelná křižovatka, kde propustnost je omezena dobou zákazu jízdy (dobou červené) a tak podobně.

Pro účastníka silničního provozu, který se chystá projet silniční síť mezi danými místy, však není důležitá propustnost jednotlivých úseků, jakožto maximální intenzita, ale dostupná intenzita. Dostupná intenzita je rozdíl mezi maximální intenzitou a intenzitou dopravního proudu v době, kdy bude účastník daný úsek sítě projíždět. Nenulová dostupná intenzita dává možnost průjezdu, nulová dostupná intenzita označuje stav, kdy daná komunikace je plně obsazena vozidly. Z toho plynou dva základní stavy systému: obsazeno/volno.

Uzly silniční dopravní sítě představují křižovatky. Pro jednoduchost předpokládejme křížení dvou komunikací, provoz je řízen světelným signalizačním zařízením se signálním plánem 1/2 periody volno pro jednu komunikaci a 1/2 periody pro druhou. Do libovolné hrany mohou vstupovat komplety po celou dobu periody T ale vystupovat z této hrany pouze po dobu poloviny periody 1/2 T (obr. 1.). To má za následek, že se komplety v hraně snáze hromadí (tvoří se fronty) než opouštějí tuto hranu.



Obr. 1.: Schéma dvou přilehlých křižovatek

Pro každou hraně $h^{(ij)}$ silniční dopravní sítě existuje jiný průběh vstupního $x_{vst}^{(ij)}(t)$ a výstupního $x_{výst}^{(ij)}(t)$ toku v čase (obr 2). Vstupní resp. výstupní tok je intenzita dopravního proudu měřená na vstupu resp. výstupu hrany v počtu kompletů za jednotku času.

Vstup do hrany $\mathbf{h}^{(ij)}$ za dobu t

$$Y_{vst}^{(ij)}(t) = \int_0^t x_{vst}^{(ij)}(s)\, ds$$

v počtu kompletů.

Výstup z hrany $\mathbf{h}^{(ij)}$ za dobu t

$$Y_{výst}^{(ij)}(t) = \int_0^t x_{výst}^{(ij)}(s)\, ds$$

v počtu kompletů.

Délka fronty

Délka fronty $F^{(ij)}(t)$ (určená počtem čekajících vozidel) na hraně $h^{(ij)}$ v čase t je určena jako rozdíl vstupu a výstupu do hrany v počtu kompletů.

$$F^{(ij)}(t) = Y_{vst}^{(ij)}(t) - Y_{výst}^{(ij)}(t) = \int_0^t x_{vst}^{(ij)}(s)\,ds - \int_0^t x_{výst}^{(ij)}(s)\,ds = \int_0^t \left(x_{vst}^{(ij)}(s) - x_{výst}^{(ij)}(s)\right)ds$$

Změna délky fronty na hraně $h^{(ij)}$ v čase t je určena jako rozdíl vstupního a výstupního toku.

$$\frac{dF^{(ij)}(t)}{dt} = x_{vst}^{(ij)}(t) - x_{výst}^{(ij)}(t)$$

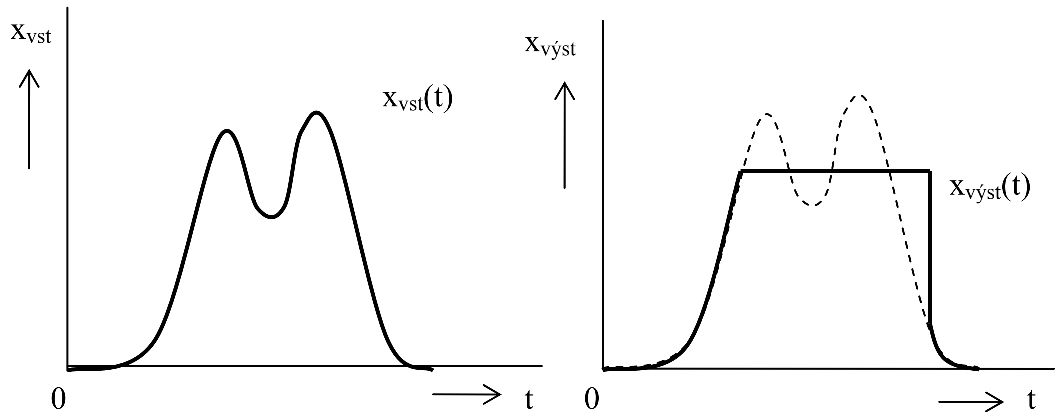
Doba průjezdu $d^{(ij)}(t)$ hranou $h^{(ij)}$ v čase t je určena jako součet zdržení způsobeného čekáním ve frontě vozidel a dobou průjezdu této hrany bez fronty. Zdržení způsobené čekáním ve frontě je určeno jako podíl délky fronty a výstupního toku.

$$d^{(ij)}(t) = \frac{F^{(ij)}(t)}{x_{výst}^{(ij)}(t)} + d_0^{(ij)} = \frac{1}{x_{výst}^{(ij)}(t)}\int_0^t x_{vst}^{(ij)}(s)\,ds - \frac{1}{x_{výst}^{(ij)}(t)}\int_0^t x_{výst}^{(ij)}(s)\,ds + d_0^{(ij)} =$$

$$= \frac{1}{x_{výst}^{(ij)}(t)}\int_0^t \left(x_{vst}^{(ij)}(s) - x_{výst}^{(ij)}(s)\right)ds + d_0^{(ij)}$$

Vstupní tok je náhodná veličina závislá na čase. Na obrázcích je zobrazena střední hodnota náhodné veličiny v závislosti na čase. Jak vstupní tak výstupní tok lze na jednotlivých hranách měřit (telematika) a jednotlivé naměřené průběhy statisticky zpracovávat.

Pro každou hranu existuje jiný průběh vstupního a výstupního toku v čase, což dává možnost využít k jízdě hranu s menší frontou v danou dobu.



Obr. 2.: Závislost vstupního a výstupního toku na čase

Závěr

Intenzita dopravy na silniční komunikaci není neomezená, ale má svou hranici a tou je kapacita nejužšího místa komunikace. Pokud je intenzita na vstupu větší než kapacita úzkého místa, tvoří se před tímto místem fronty vozidel. Délka fronty závisí na vstupním toku (intenzitě), kapacita komunikace je daná konstrukčním provedením komunikace a může se měnit v závislosti na povětrnostních podmínkách, viditelnost, technickém stavu apod. Rychlost rozpouštění fronty je dána kapacitou úzkého místa. (Čím užší je toto místo tím delší doba rozpouštění fronty.)

Pro optimalizaci dopravních toků v silniční dopravní síti můžeme formulovat tuto úlohu: Máme přemístit daný počet dopravních kompletů v mezi dvěma místy silniční dopravní sítě přes uzly ze zadané množiny U a po hranách z množiny H tak, aby doba přemístění byla nejmenší možná a zároveň náklady na přemístění byly nejmenší možné.

Dopravní síť je definována jako ohodnocený orientovaný graf. Ohodnoceny jsou hrany vstupním tokem a náklady na průjezd hranou. Vstupní tok x je náhodná veličina. Náklady na průjezd hranou r jsou určeny jako konstanta pro každou hranu.

Řešení úlohy vede na vícekriteriální optimalizační úlohu. Máme dvě cílové funkce, časovou a nákladovou. Proměnné představují počet sledovaných dopravních kompletů y, které projedou hranou **h**. Všechny komplety musí opustit výchozí uzel a ve všech uzlech mimo pramene a ústí musí být splněna rovnost vstupu a výstupu.

V další práci je nutné nalézt vhodnou metodu pro vyřešení této úlohy. Protože doba průjezdu hranami dopravní sítě je funkcí času nelze použít metodu lineárního programování.