Aplikovaná matematika

1 Lyx

Matematický editor Lyx

Lyx je matematický editor nad Latexem. Psaný text je programován a přeložen do výsledného formátu.

Výhody

- jednoduše píše hezkou matematiku
- výstup jak je, je perfektní
- naprosto stabilní - co teď napíšu, budu mít za 10 let

Nevýhody

- těžko se realizují vlastní formáty
- co píšu je sice dobře čitelné, ale jinak než bude
- musím si pamatovat klávesové zkratky
- někdy potíže s instalací nové verze

Jak na to?

- Nejprve se instaluje Miktex - https://miktex.org/download
  To je překladač pro napsaný text. Lyx se ho chytne a používá ho.
- Dále se instaluje lyx - https://www.lyx.org/Download

Pozor: Download packages : on the fly - aby si sám stahoval package (je někde)

Pro windows (jiné neumím)

Lyx se instaluje v adresáři `c:\Program Files (x86)\`
a dále v adresáři `\AppData\Roaming\`, kde si uloží soubory, které je možno měnit uživatelsky.

Menu

- bind → user.bind (možno zjistit, měnit nebo zadávat vlastní klávesové zkratky) !!! Pozor: **M** = **Alt**
- ui → stdcontext.inc (kontextové menu), stdmenus.inc (hlavní menu), stdtoolbars.inc (ikony) - tady se lze učit, jak napsat příkazy lyx.

!!! PŮVODNÍ KLÁVESOVÉ ZKRATKY JSOU V
`c:\Program Files (x86)\LyX 2.3\Resources\bind\`
ZDE JE TAKÉ PŮVODNÍ OBSAH UI.

Co chci změnit, nakopíruju do `user.bind` a změním (tady nic neměnit !!)

Hlavní soubor je `cua.bind` (myslím), pak `math.bind`

- zbytek už si snadno samo zjistíte :-)

Máme nainstalováno a co teď s tím?

Můžeme psát s použitím uvedených zkratek. Ale je ještě pár věcí okolo.

Kouknem krátce na menu:

Document (Change Tracking - opravy)

- Settings

– Document Class (volba formátu: paper, book atd.)

– Text Layout (odstavce, sloupce atd.)

– Page Layout (Portrait/Landscape, číslování stran)

– Page Margins (vlastní okraje)

– Language (jazyk pro korekce)

– PDF Properties (nastavení pdf výstupu)

– Float Placement (umístění float objektů)

Tools (zajímavé možnosti)

- Preferences

– Editing → Shortcuts

– Paths (možno nastavit pracovní adresář atd.)

– File Handling (pro pokročilé)

Základy pro vlastní psaní

Lze používat **klávesové zkratky** nebo **menu**:
Např. Alt+v+v - přeloží a ukáže psaný text (písmenko, které se má použít je podtrženo) $\cdots$ nemusí se tolik pamatovat, je pomalejší.

Ctrl+M - matematika v řádku

Ctrl+Shift+M - matematika jako odstavec

Nadpisy: lze zadávat z otevíracího okénka těsně pod File - obsah záleží na formátu dokumentu v Document/Settings/Document Class

Vytvoření dokumentu (přelož a ukaž) - ikona s očima nebo Alt+v+v (tj. View/View [PDF (pdfLatex)]

Uložení pdf na disk - File/Export/PDF (pdflatex) - uloží se do pracovního adresáře.

Jak psát

- **Forma**

název – jednoznačný a přesně říkající o čem článek je

jméno, afiliace, kontakty – mail (raději školní nebo pracovní), ORCID (často je zapotřebí)

abstrakt – má nalákat čtenáře (obvykle cca 200 slov – o čem článek je, jaké teoretické metody používáte, hlavní přínos článku, jaká data používáte)

klíčová slova - kvůli zařazení

Úvod – motivace – proč je táto úloha důležitá, proč to chceme řešit, jak to řeší ostatní (přehled literatury), jak my na to půjdeme a čím se liší náš přístup, struktura článku

Preliminaries - co je potřeba znát předem, označení

Teoretické řešení - jak se to dělá

Experimenty - že to funguje, porovnání s existujícími metodami, popis dat a experimentů, grafy s velkými písmeny, popis obrázků a tabulek

Diskuze – komentář k tomu, jak to dopadlo (co bylo cílem práce, co se povedlo, zlepšení oproti existujícím metodám, co se nepovedlo, potenciální využití, omezení řešení)

Závěr - o čem článek byl (3 klíčové body), hlavní přínosy řešení, plány do budoucna

Literatura - pozor na požadovaný formát

- **Obsah**

Především je dobré pro své téma vybrat vhodný časopis (jestli se hodí, jaký má impakt atd.) a podívat se, jaká má pravidla, prohlédnout pár jejich článků a podle toho začít psát.

Základní pravidlo: když chci psát, musím mít co napsat!
Tedy u každé věty, odstavce, kapitoly musím dobře rozmyslet,

- co chci napsat
- a pak jestli jsem skutečně napsal to, co jsem chtěl
- a jestli to také poznají čtenáři.

Neměly by se psát příliš komplikované věty (je to i důkaz toho, že nemám co psát a jen tak plkám).

Myšlenky by měly spojitě navazovat (ve větách i odstavcích) - zase je to důkaz toho, že mám co psát.

U delších textů je dobře si napsat osnovu a tu pak vyplňovat.

Když jsou s nějakou větou potíže, tak ji vynechat.

Když píšu dál, je potřeba kontrolovat je-li to v souladu s předešlým a případně předešlé přepisovat - stejné značení, názvy atd.

Vyhnout se hovorovým výrazům. U každé věty zkontrolovat, jestli má smysl - obsahem i formou.

Dát pozor na citace – pokud používám cizí metody, musím na ně vždy v textu odkázat.

Nakonec to celé pečlivě přečíst, jestli tam nejsou chyby.

2 Data

Náhodná veličina

Veličina x, jejíž hodnoty se při měření i za stejných podmínek mění.

Má konstantní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl)

Náhodný proces

Náhodná veličina indexovaná časem x_t

Typy náhodných procesů

hodnoty: diskrétní $\times$ spojité

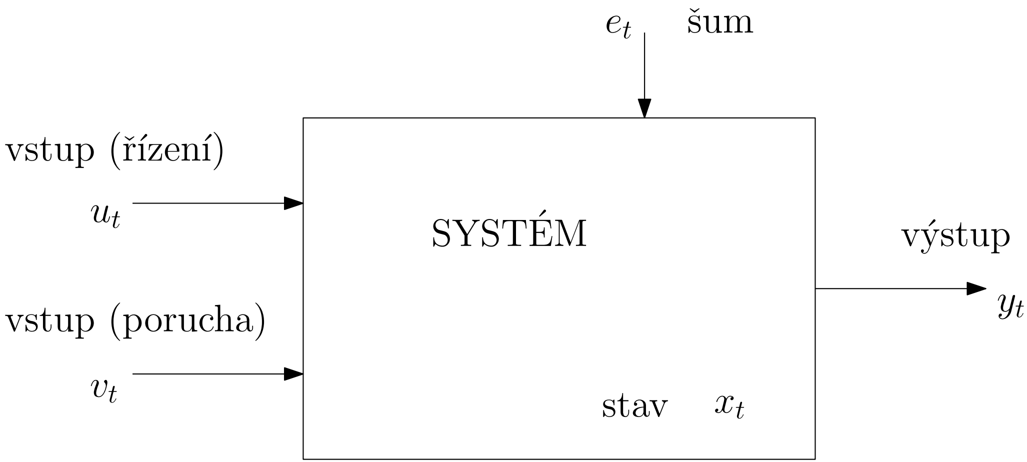
čas: diskrétní $\times$ spojitý

Pro nás

DISKRÉTNÍ SYSTÉM: diskrétní čas i hodnoty

SPOJITÝ SYSTÉM: diskrétní čas, spojité hodnoty

Systém



e_t šum
vstup (řízení)
u_t
SYSTÉM
výstup
y_t
vstup (porucha)
v_t
stav x_t

Jak na analýzu dat (s modelem)

Data jsou **naměřené hodnoty** zvolených veličin.

Jedno měření dá datový záznam (většinou) v_t a y_t - t je pořadí měření (diskrétní čas),

kde $v = [v_1, v_e, \cdots, v_n]$ (vysvětlující veličina) a y (výstup) je většinou skalár.

Data (dataset) je matice datových záznamů $\{v_t, y_t\}_{t=1}^{N}$ - N je počet dat.

Data se nejlépe uloží v Excelu ve formě *.csv

Dvojice v_t a y_t jsou měřeny současně. Pokud v záznamu nějaká hodnota chybí, je nejlépe celý záznam smazat.

Pro dotazníky

Veličina je otázka.

Hodnoty jsou odpovědi.

Datový záznam je jeden dotazník.

Dataset je množina všech vyplněných dotazníků.

Data musí být informativní: nést informaci o vlastnostech, o které se zajímáme.
např. je-li nějaká veličina konstantní, nenese informaci.

Typy dat vzhledem k úlohám

Existují zhruba 3 typy dat pro 3 typy úloh

1. **Descriptive:**
$$f\left(v_t\right)$$
kde $v_t = \left[v_1, v_2, \cdots v_n\right]_t\,,\ t = 1, 2, \cdots, N$

2. **Explanatory:**
$$f\left(y_t | v_t\right)$$
kde y_t je většinou skalár a $v_t = \left[v_1, v_2, \cdots v_n\right]_t$

3. **Predictive:**
$$f\left(y_t | y\left(t-1\right), u_t\right)$$
kde y_t je skalár, $y\left(t-1\right) = \left[y_{t-1} \cdots y_{t-k}\right]$, k pevné a u_t je řízení nebo měřená vysvětlující veličina.

1. Descriptive

Matice dat - hodnoty n veličin (ve sloupcích nebo v řádcích).

Z Excelu se dostanou buď Ctrl C, Ctrl V nebo uložit jako *.csv soubor.

Do Scilabu se natáhnou pomocí příkazu `csvRead`.

Analýzu provedeme buď přímo v Excelu nebo Scilabu (Matlabu).

Např. jaké zpomalovací prahy existují a které jsou si podobné?

Většinou jde o statistické charakteristiky a testy nebo klastrování.

3. Predictive

Jedná se o časový vývoj modelované veličiny v závislosti na jejích předchozích hodnotách a případně dalších vysvětlujících nebo řídících veličinách.

Např. předpověď intenzity dopravního proudu.

Lokální modelování: konstrukce predikce na klastrech.

Úloha je predikce založená na regresi (multiregresi) nebo diskrétním modelu. Sem patří taky směsi a všechny úlohy klasifikace z oblasti data-mining.

2. Explanatory

Nejčastěji se vyskytující úloha.

Zjišťuje, jestli a jak vysvětlující veličiny $v = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ ovlivňují modelovanou veličinu y.

Např. které okolnosti mají největší vliv na těžké dopravní nehody?

Zásady:

- veličiny v_i musí s y skutečně souviset - testovat jednu po druhé (třeba regresí)
- nesmí existovat jiná veličina, která významně ovlivňuje y a není ve v
- ve v nesmí být lineárně závislé veličiny (ideálně stochasticky nezávislé)
- záznamy s chybějícími údaji vynechat; konstantní veličiny jsou k ničemu
- data musí být informativní - počet, obsah
- pro učení (odhad) musí být k dispozici obojí v i y, pro aplikaci už jen v.

Typy dat svou povahou

Data jsou dvojího druhu: **spojitá** nebo **diskrétní** (mohou být i smíšená).

- v i y diskrétní - diskrétní model (průšvih s dimenzí), klasifikace
- v spojité, y diskrétní - logistická regrese, naivní Bayes, klasifikace
- v i y spojité - regrese, multiregrese, diskretizace

Odhad

Diskrétní model - tabulka.

Spojitý model - nejmenší čtverce, Bayes (expertní znalost)

Směsi - několik modelů pro jednotlivé módy systému. Změřím data, provedu klasifikaci vzhledem ke komponentám $\rightarrow$ váhy, statistiky komponent přepočtu s vahami.
Analýza dat, predikce, klasifikace.

3 Modely

Model

Model je popisem náhodné veličiny, případně v závislosti na jiných veličinách. Tímto popisem je (podmíněná) distribuce (pf nebo hp)

$$f\left(y_t|\psi_t,\Theta\right)$$

- y_t - výstup (modelovaná veličina, target variable $\cdots$),
- ψ_t - regresní vektor (veličiny ovlivňující y_t, případně zpožděné veličiny)
- Θ - parametry (vyjadřují jak veličiny ovlivňují y_t).

Tato distribuce bývá generována různě.

Regresní model

Spojité y_t a většinou i ψ_t

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}_t$$

kde regresní vektor je $\psi_t = [y_{t-1}, u_t, v_t, 1]$ a parametry $\theta = \{a, b, c, k\}$, + r je kovarianční matice e_t.

Krátce

$$y_t = a y_{t-1} + b u_t + c v_t + k + e_t$$

a ještě stručněji

$$y_t = \theta \psi_t + e_t$$

$\psi = [y_{1;t-1}, y_{2;t-1}, u_t, v_{1;t}, v_{2;t}, v_{3;t}, 1]'$

$\theta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & k_2 \end{bmatrix}$

Nejčastější speciální případy

Descriptive

$$y_t = k + e_t$$

Explanatory

$$y_t = cx_t + e_t$$

Predictive

$$y_t = ay_{t-1} + bu_t + e_t$$

Diskrétní model

Obecně - pf je tabulka hodnot a pravděpodobností

y_t	$f(y_t)$
1	p_1
2	p_2
$\cdots$	$\cdots$
m	p_m

Koruna

$$\begin{array}{cc} y_t & f(y_t) \\ 1 & p_1 \\ 2 & p_2 \end{array} \quad , \qquad p_1 + p_2 = 1$$

4 koruny 1,2,3,4

koruna	1	2	3	4
padlo 1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
padlo 2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}

$\rightarrow$ generuje $f(y|\text{koruna} = i)$, $i = 1, 2, 3, 4$

Obecný diskrétní model

Ve tvaru $f\left(y_t|u_t, y_{t-1}\right)$ s daty 1, 2

u_t	1	1	2	2
y_{t-1}	1	2	1	2
$y_t = 1$	$\Theta_{1\|11}$	$\Theta_{1\|12}$	$\Theta_{1\|21}$	$\Theta_{1\|22}$
$y_t = 2$	$\Theta_{2\|11}$	$\Theta_{2\|12}$	$\Theta_{2\|21}$	$\Theta_{2\|22}$

kde $\theta_{i|jk} \geq 0$ a $\sum_i \theta_{i|jk}$ $\forall j, k$ - nezáporné, součty v řádcích jsou jedna.

Dimenze modelu: součin počtu hodnot jednotlivých veličin. 10 veličin po 10 hodnotách $= 10^{10}$

Model směsi

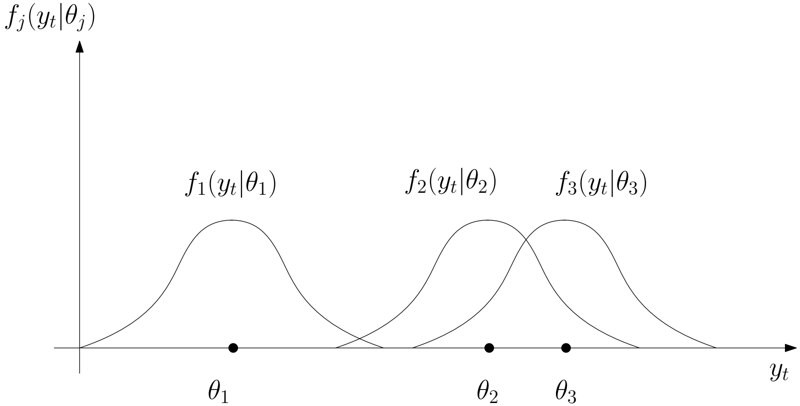
Několik modelů - komponent + klasifikace, kam změřená data patří (ukazovátko).

Komponenty (descriptive)

$$f_j\left(y_t|\Theta_j\right),\ j=1,2\cdots,n_c$$

Ukazovátko

c_t	$f\left(c_t\vert\alpha\right)$
1	α_1
2	α_2
$\cdots$	$\cdots$
n_c	α_{n_c}


$f_j(y_t|\theta_j)$
$f_1(y_t|\theta_1)$
$f_2(y_t|\theta_2)$
$f_3(y_t|\theta_3)$
y_t
θ_1
θ_2
θ_3

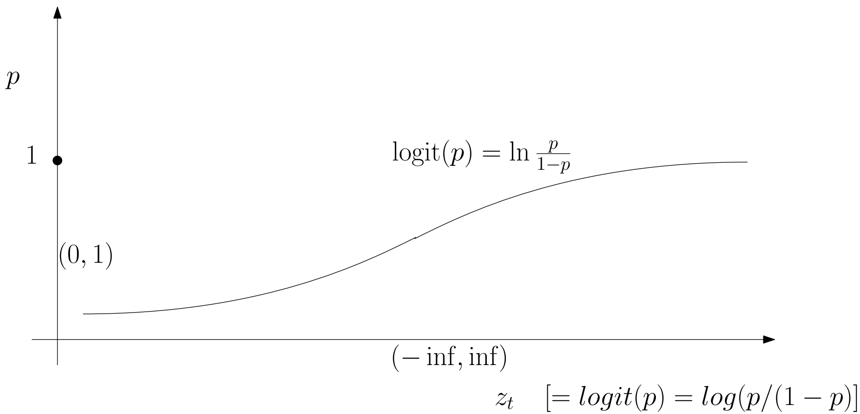
Model logistické regrese

$p = f\left(y_t = 1 | x_t, \theta\right)$

$$\operatorname{logit}\left(p\right) = \underbrace{x_t\theta}_{z_t}$$

$\rightarrow$

$$z_t = x_t\theta$$
$$\ln \frac{p}{1-p} = z_t$$



Stavový model

Stav je veličina prvního řádu (závisí pouze na své minulé hodnotě, ne na historii)

model predikce $x_t = Mx_{t-1} + Nu_{t-1} + w_t$

model filtrace $y_t = Ax_t + Bu_t + v_t$

Úloha:

- odhad hodnot neměřené veličiny z u_t a y_t
- filtrace šumu

Pro lineární model se známými parametry a normální rozdělení stavu a šumů funguje **Kalmanův filtr** - vývoj středních hodnot a kovariancí stavu.

$$f\left(x_{t-1}|d\left(t-1\right)\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{predikce}} f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{filtrace}} f\left(x_t|d\left(t\right)\right)$$

Programy

- T11simCont.sce simulation with a regression model
- T13simDisc.sce simulation with a discrete model
- T15simState.sce simulation with state model (from reg. model)

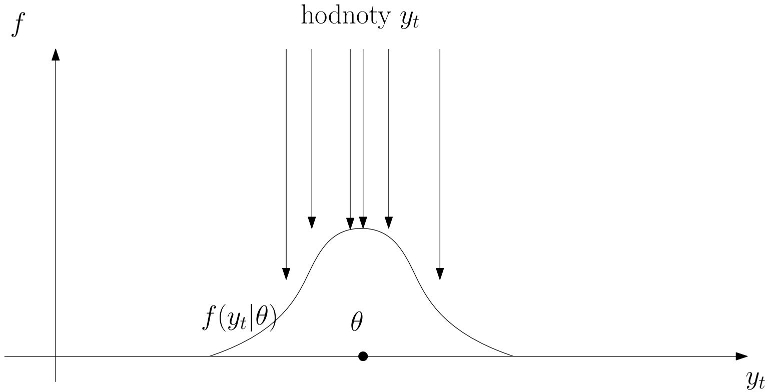
4 Odhad

Bayesů vzorec

$d\left(t\right) = \{y_\tau, u_\tau, v_\tau\}_{\tau=1}^{t}$ data, změřená do t včetně.

$$f\left(\Theta|d\left(t\right)\right) \propto f\left(y_t|\psi_t, \Theta\right) f\left(\Theta|d\left(t-1\right)\right)$$

Parametry v modelu mají za následek hodnoty y_t. Stejně tak měřené hodnoty y_t ukazují na parametr modelu, který je generoval.



θ specifikuje systém (jaderný reaktor $\times$ atomová bomba)

Likelihood

$$f\left(\Theta|d\left(t\right)\right) \propto f\left(\Theta|d\left(0\right)\right) \underbrace{\prod_{\tau=1}^{t} f\left(y_\tau|\psi_\tau,\Theta\right)}_{L_t(\Theta)-\text{likelihood}}$$

$\cdots$ pro $f\left(\Theta|d\left(0\right)\right)$ rovnoměrné (žádná apriorní znalost) je

$$f\left(\Theta|d\left(t\right)\right) \propto L_t\left(\Theta\right)$$

Parametrizace $\rightarrow$ statistiky.

Rekurzivita - konjugované rozdělení.

Jednotlivé modely

Regresní model

Přepočet statistiky

$\Psi_t = [y_t, \psi_t]'$ - rozšířený regresní vektor

$$V_t = V_{t-1} + \Psi_t \Psi_t' \quad \text{informační matice}$$
$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + 1 \qquad \text{počítadlo}$$

Bodové odhady

$V_t = \begin{bmatrix} V_y & V_{y\psi}' \\ V_{y\psi} & V_\psi \end{bmatrix}$

$$\hat{\theta} = V_\psi^{-1} V_{y\psi}$$
$$\hat{r} = \frac{V_y - V_y' \hat{\theta}}{\kappa_t}$$

nebo podle nejmenších čtverců

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} y_0 & u_1 & v_1 & 1 \\ y_1 & u_2 & v_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{N-1} & u_N & v_N & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}=\left(X'X\right)^{-1}X'Y, \quad y_p=X\hat{\theta},\ \hat{e}=y-y_p,\ \hat{r}=D\left[\hat{e}\right]$$

Jednotlivé typy

Je v: `Laboratory`.

Diskrétní model

Jako u koruny: Statistika

u_t	1	1	2	2
y_{t-1}	1	2	1	2
$y_t = 1$	$\nu_{1\|11}$	$\nu_{1\|12}$	$\nu_{1\|21}$	$\nu_{1\|22}$
$y_t = 2$	$\nu_{2\|11}$	$\nu_{2\|12}$	$\nu_{2\|21}$	$\nu_{2\|22}$

$$\nu_{y_t|u_t,y_{t-1};t} = \nu_{y_t|u_t,y_{t-1};t-1} + 1$$

ostatní nic.

Koruna: Máme dvě misky - pro rub a pro líc. Hodíme a na tu misku, jejíž strana padla, přidáme další úspěch.

Bodové odhady: normalizace řádků na součet jedna.

Model směsi

Odhad podle toho, jaké jsou komponenty.

Rozdíl:

- výpočet vah
- vážený update statistik

Tedy např.

$$V_{j;t} = V_{j;t-1} + w_j \Psi_t \Psi_t^{'},\ \forall j$$

nebo

$$\nu_{j,y_t|u_t,y_{t-1};t} = \nu_{j,y_t|u_t,y_{t-1};t-1} + w_j,\ \forall j$$

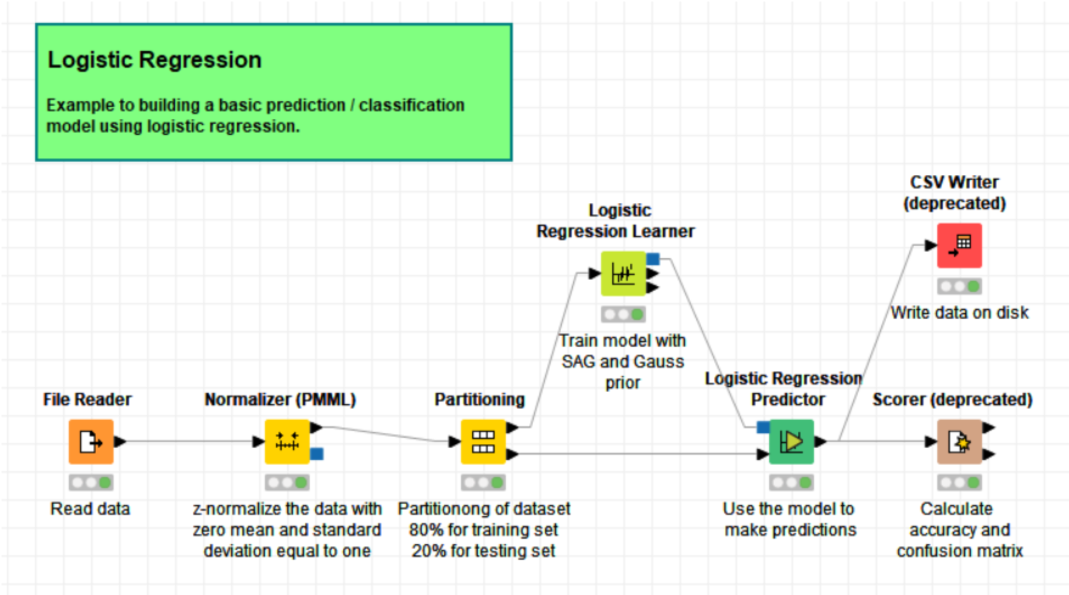
kde j je číslo komponenty.

Model logistické regrese

Nemá reprodukující se statistiku.

Sestaví se likelihood a ten se maximalizuje numericky.

Nejlépe použít hotový program - např. KNIME



Stavový model

$$x_t = Mx_{t-1} + Nu_t + F + w_t$$
$$y_t = Ax_t + Bu_t + G + v_t$$

Kalmanův filtr

```
[x,Rx,yp]=Kalman(x,y,u,M,N,F,A,B,G,Rw,Rv,Rx);
```

Filtrace šumu

$$x_t = x_{t-1} + w_t$$
$$y_t = x_t + v_t$$

y je zašuměný průběh

x je filtrovaný (hladký) průběh

r_w a r_v určují, o kolik se může měnit x a jak se mění y (x se šumem)

Programy

- T21estCont_LS.sce - odhad regresního modelu (nejmenší čtverce)
- T22estCont_B.sce - odhad regresního modelu (Bayes)
- T22estCont_B2.sce - neshoda struktury
- T22estCont_B3.sce - neshoda struktury
- T22estCont_B4.sce - odhad s reálnými daty
- T23estDisc.sce - odhad diskrétního modelu

Inicializace

Přednastavení parametrů modelu z apriorních dat nebo expertní znalosti.

Zvláště nutné je u směsí - jinak se odhad nerozběhne.

Expertní znalost je nejlépe vyjádřit v tzv fiktivních datech, která se na začátku zpracují běžným způsobem. Fiktivní data jsou např.: *když bude dopoledne nebo nehoda, tak bude hustota provozu velká.* Tedy podmínka - důsledek.

Odhad koruny - pro férovou korunu

	rub	líc	vliv
1.	1	1	slabý
2.	10	10	stření
3.	100	100	velký

Poměr udává parametr, velikost sílu informace.

Regresní model (statický) : statistiky S -součet, κ počet

Odhad střední hodnoty

$$\theta = \frac{S}{\kappa}$$

Volím

$$\kappa \text{ - počet dat}$$

$$\hat{\theta}_0 \text{ - hodnota parametru}$$

$$S = \hat{\theta}_0 \kappa$$

Jako odhad dostanu právě $\hat{\theta}_0$

Obecný regresní model

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + k + e_t$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} 1 & b_0 & a_1 & b_1 & k \\ b_0 & 1 & & & \\ a_1 & & 1 & & \\ b_1 & & & 1 & \\ k & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Odhad dá právě tyto parametry.

Síla

$$\kappa = n_0$$

$$V = V_0 \kappa$$

Dk.

$$V_\psi = E$$

$$V_{y\psi} = \theta = [b_0, a_1, b_1, k]'$$

$$\hat{\theta} = \theta$$

Programy

- T24iniCoin.sce - estimation of a coin model with initialization
- T24iniReg.sce - estimation of regression model with initialization

5 Predikce a odhad stavu

Predikce

Je to odhad budoucího výstupu.

Máme model $f\left(y_t|\psi_t,\theta\right),\ \psi=\left[y_{t-1},\cdots,y_{t-n}\right]'$.

Jsme v čase t, y_t jsme ještě nezměřili a známe $y\left(t-1\right)$.

- $f\left(y_t|y\left(t-1\right)\right)$ je nula-kroková predikce (odhad aktuálního výstupu). Ta se hodí pro kontrolu odhadu - chyba predikce.
- $f\left(y_{t+k}|y\left(t-1\right)\right)$ je k-kroková predikce (odhad do budoucna).

Příklad

$$f\left(y_{t+1}|y\left(t-1\right)\right)=\int_{\theta^*}\int_{y^*}f\left(y_{t+1},y_t,\theta|y\left(t-1\right)\right)dy_t d\theta =$$

$$=\int_{\theta^*}\int_{y^*}f\left(y_{t+1}|\psi_{t+1},\theta\right)\underbrace{f\left(y_t|\psi_t,\theta\right)}_{\to\hat{y}_t}\underbrace{f\left(\theta|d\left(t-1\right)\right)}_{\to\hat{\theta}}dy_t d\theta$$

pro bodové odhady

$$f\left(y_{t+1}|y\left(t-1\right)\right)=f\left(y_{t+1}|\hat{y}_t,\psi_t,\hat{\theta}\right)$$

$$\hat{y}_{t+1}=E\left[y_{t+1}|\hat{y}_t,\psi_t,\hat{\theta}\right]=\int_{y^*_{t+1}}y_{t+1}f\left(y_{t+1}|\hat{y}_t,\psi_t,\hat{\theta}\right)dy_{t+1}$$

V praxi

Regresní model

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + k + e_t$$

Bodová predikce + známé parametry

$$\hat{y}_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + k$$

$$\hat{y}_{t+1} = a_1 \hat{y}_t + a_2 y_{t-1} + k$$

$$\hat{y}_{t+2} = a_1 \hat{y}_{t+1} + a_2 \hat{y}_t + k$$

atd.

Diskrétní model

u_t	1	1	2	2
y_{t-1}	1	2	1	2
$y_t = 1$	$\Theta_{1\|11}$	$\Theta_{1\|12}$	$\Theta_{1\|21}$	$\Theta_{1\|22}$
$y_t = 2$	$\Theta_{2\|11}$	$\Theta_{2\|12}$	$\Theta_{2\|21}$	$\Theta_{2\|22}$

Dáno u_t a $y_{t-1} \rightarrow$ řádek, $\hat{y}_t$ je hodnota s větší pravděpodobností.

Vícekroková bodová - viz program.

Filtrace

Odhad hodnot neměřené veličiny ze vstupu a výstupu.

Kalmanův filtr - bylo.

Nelineární model

$$x_t = f\left(x_{t-1}, u_{t-1}\right) + w_t$$
$$y_t = g\left(x_t, u_t\right) + v_t$$

Linearizace - Taylorův rozvoj v $\hat{x}$ z minula

$$f\left(x\right) = f\left(\hat{x}\right) + f'\left(\hat{x}\right)\left(x - \hat{x}\right) = \underbrace{f'\left(\hat{x}\right)}_{M} x + \underbrace{f\left(\hat{x}\right) - f'\left(\hat{x}\right)\hat{x}}_{F}$$

Model s neznámými parametry

Příklad

$$x_t = ax_{t-1} + u_t + w_t$$

Nový stav

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1;t} \\ X_{2;t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t \\ a \end{bmatrix}$$

a dostaneme

$$X_{1;t} = X_{2;t-1} X_{1+t-1} + u_t + W_{1;t}$$
$$X_{2;t} = X_{2;t-1} + W_{2;t}$$

To se linearizuje - viz výše.

Programy

- T31preCont.sce prediction with reg. model, known parameters
- T32preCont_Adapt.sce prediction with reg. model, unknown parameters
- T32preCont_Adapt2.sce prediction with estimation, model mismatch
- T32preCont_Adapt3.sce prediction with estimation, real data
- T33preDisc_Off.sce prediction with discrete model
- T34preDisc_OffEst.sce pred. with disc. mod. - off-line estimation
- T35preDisc_OnEst.sce pred. with disc. mod. - on-line estimation
- T46statEst_KF.sce state estimation (KF)
- T47statEst_Noise.sce KF as a noise filter

6 Řízení

Řízení minimum variance

Velmi jednoduché ale někdy nestabilní.

Příklad

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + k + e_t$$

$E[y_t] = 0$

$$u_t = -\frac{1}{b_0}\left(a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + k\right)$$

Nepoužívá se.

Řízení na konečném intervalu

Navrhuje se najednou na několik kroků dopředu (interval řízení). Na tomto intervalu se požaduje y_t co nejblíže nule nebo požadovanému průběhu.

Jedná se o optimální řízení vzhledem ke kriteriu

$$\min_{u_1,u_2\cdots u_T} E\left[\sum_{t=1}^{T} \underbrace{\left(y_t^2 + \omega u_t^2\right)}_{J_t} |d\,(0)\right]$$

nebo

$$\min_{u_1,u_2\cdots u_T} E\left[\sum_{t=1}^{T} \underbrace{\left(y_t^2 + \omega \left[u_t - u_{t-1}\right]^2\right)}_{J_t} |d\,(0)\right]$$

Kriterium se minimalizuje metodou Dynamického programování, postupně od konce intervalu a dostaneme **Bellmanovy rovnice**

$$\varphi_t = E\left[\varphi_{t+1}^* + J_t | u_t, d\,(t-1)\right]$$

$$\varphi_t^* = \min_{u_t} \varphi_t$$

s počáteční podmínkou $\varphi_{T+1}^* = 0$.

Pro **regresní model** (ve stavovém tvaru)

$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_2 u_{t-2} + k + e_t$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ u_t \\ y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ y_{t-2} \\ u_{t-2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{N} u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_t}$$

dosadíme do Bellmanových rovnic. Dostaneme algoritmus

Optimalizace na intervalu $(1, N)$

$R_{N+1} = 0$

for $t = N,\ N-1,\ \cdots,\ 1$

$$
\begin{aligned}
U &= R_{t+1} + \Omega \\
A &= N'UN \\
B &= N'UM \\
C &= M'UM \\
S_t &= A^{-1}B \\
R_t &= C - S_t' A S_t
\end{aligned}
$$

end

Realizace optimálního řízení na intervalu $(1, N)$

for $t = 1, 2, \cdots, N$

$$
\begin{aligned}
x_{t-1} &= [y_{t-1}, u_{t-1}, y_{t-2}, u_{t-1}, 1] \\
u_t &= -S_t x_{t-1}
\end{aligned}
$$

end

Programy

- T52ctrlDisc.sce optimální řízení s diskrétním modelem
- T53ctrlX.sce optimální řízení se spojitým modelem
- T54ctrlXEst.sce adaptivní řízení se spojitým modelem

7 Směsi

Úvod do problematiky

Směs = **množina modelů** (komponent) + **ukazovátko**, označující aktivní komponentu (tu, která odpovídá aktuálním datům).

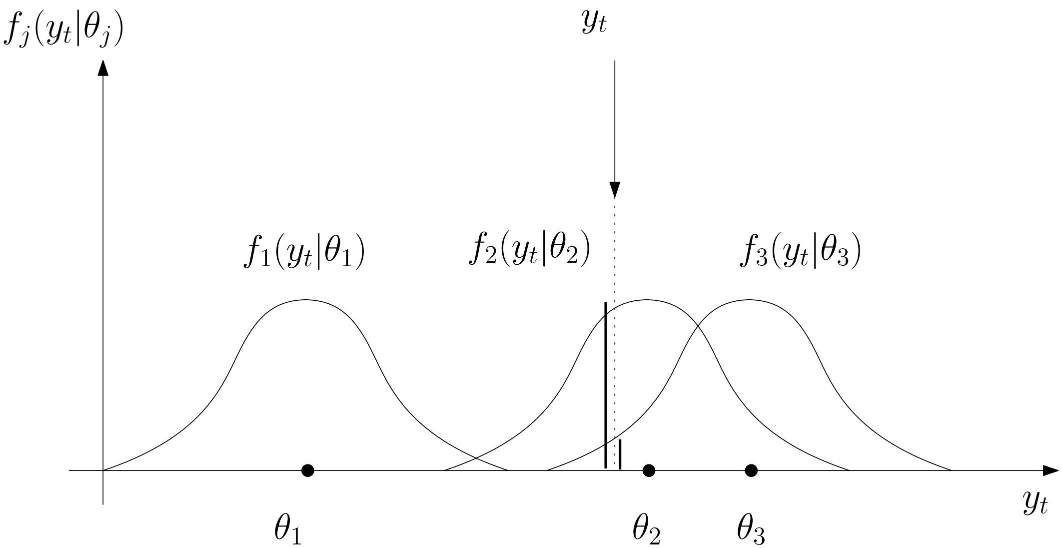
Použití: Modeluje multimodální data - systém pracuje v různých pracovních modech a mezi nimi se přepíná.
Například: Doprava (i) ráno, (ii) přes den, (iii) večer a v (iv) noci. Dále ve (1) všední dny nebo o (2) víkendu. A ještě dále (a) přes rok a (b) o prázdninách.

Problém: Při odhadu všech komponent najednou se budou mody přetahovat a komponenty se slezou všechny na jedno místo !!!

Odhad

- změříme datový vzorek
- určíme, které komponentě patří - proximity (= klasifikace)
- statistiky komponent přepočteme úměrně proximity

Proximity



Model

$$f\left(y_t|\psi_t,\Theta\right)$$

říká, jak dobře spolu data $[y_t,\ \psi_t]$ a parametry Θ souvisí. Čím lépe, tím je větší pravděpodobnost.

Proximity za parametry dosazuje jejich nejnovější bodové odhady.

Algoritmus

Pro všechny komponenty určete počáteční bodové odhady a jim odpovídající statistiky.

Pro $t = 1, 2, \cdots, N$

1. Změřte nová data
2. Pro každou komponentu spočtěte proximity s aktuálními odhady parametrů a změřenými daty.
3. Normalizujte $\rightarrow$ váhy
4. Udělejte vážený přepočet statistik komponent
5. Přepočtěte bodové odhady parametrů

C_1	C_2		C_m
$f_1(y\|\theta_1)$	$f_2(y\|\theta_2)$		$f_m(y\|\theta_m)$

$$y_t$$

$f_1(y_t\|\hat{\theta}_1)$	$f_2(y_t\|\hat{\theta}_2)$		$f_m(y_t\|\hat{\theta}_m)$
q_1	q_2		q_m

$$w = q / \Sigma\, q$$

w_1	w_2		w_m
$S_{1;t} = S_{1;t-1} + w_1 x_t$	$S_{2;t} = S_{2;t-1} + w_2 x_t$		$S_{m;t} = S_{m;t-1} + w_m x_t$
$\kappa_{1;t} = \kappa_{1;t-1} + w_1$	$\kappa_{2;t} = \kappa_{2;t-1} + w_2$		$\kappa_{m;t} = \kappa_{m;t-1} + w_m$
$\hat{\theta}_1 = \frac{S_{1;t}}{\kappa_{1;t}}$	$\hat{\theta}_2 = \frac{S_{2;t}}{\kappa_{2;t}}$		$\hat{\theta}_m = \frac{S_{m;t}}{\kappa_{m;t}}$

Programy

`mix0.sce` - regresní komponenty (statistika S)

`mix1.sce` - regresní komponenty (statistika V)

`mix3.sce` - kategorické komponenty

`mix4.sce` - kategorické komponenty (opakovaný odhad)

`mix5.sce` - binomické komponenty

($\cdots$ in `PrgsScilab/Mixtures`)

Model směsi

Množina modelů a ukazovátko, které indikuje aktivní model (komponentu).

Komponenty (statické)

$$f_j\left(y_t|\Theta_j\right),\ \ j = 1, 2 \cdots n_c$$

Ukazovátko $c_t \in \{1, 2 \cdots n_c\}$

$$f\left(c_t = j|\alpha\right) = \alpha_j$$

Model směsi

$$f\left(y_t|\Theta\right) = \sum_j f\left(y_t, c_t = j|\Theta_j\right) = \sum_j f_j\left(y_t|\Theta_j\right) f\left(c_t = j|\alpha\right) =$$

$$= \sum_j \alpha_j f_j\left(y_t|\Theta_j\right) \text{ - směs}$$

Odhad - průšvih (Bayes $\rightarrow$ součin součtů, narůstá složitost)

Odhad směsi

Neznámé veličiny jsou c_t, Θ, α. Jejich distribuce je

$$f\left(c_t, \Theta, \alpha | d\left(t\right)\right) \underbrace{\propto}_{\text{Bayes}} f\left(y_t, c_t, \Theta, \alpha | d\left(t-1\right)\right) =$$

$$= f\left(y_t | c_t, \Theta\right) f\left(c_t | \alpha\right) f\left(\Theta | d\left(t-1\right)\right) f\left(\alpha | d\left(t-1\right)\right) =$$

$$= f_{c_t}\left(y_t | \Theta_{c_t}\right) f\left(\Theta | d\left(t-1\right)\right) \times f\left(c_t | \alpha\right) f\left(\alpha | d\left(t-1\right)\right)$$

kde

$$f_{c_t}\left(y_t | \Theta_{c_t}\right) f\left(\Theta | d\left(t-1\right)\right) \propto f\left(\Theta_{c_t} | d\left(t\right)\right)$$

$$f\left(c_t | \alpha\right) f\left(\alpha | d\left(t-1\right)\right) \propto f\left(\alpha | d\left(t\right)\right)$$

jsou Bayesova pravidla pro Θ_{c_t} a α.

Kdybychom znali c_t, jsme hotovi. To neznáme, tak musíme odhadovat

$$c_t \to f\left(c_t | d\left(t\right)\right)$$

Odhad c_t

$$f\left(c_t|d\left(t\right)\right)=\int_{\Theta^*}\int_{\alpha^*}f\left(c_t,\Theta,\alpha|d\left(t\right)\right)d\alpha d\Theta\propto$$

$$\propto\int_{\Theta^*}f_{c_t}\left(y_t|\Theta_{c_t}\right)f\left(\Theta|d\left(t-1\right)\right)d\theta\times\int_{\alpha^*}f\left(c_t|\alpha\right)f\left(\alpha|d\left(t-1\right)\right)d\alpha$$

kde

$$\int_{\Theta^*}f_{c_t}\left(y_t|\Theta_{c_t}\right)f\left(\Theta|d\left(t-1\right)\right)d\theta\rightarrow f_{c_t}\left(y_t|\hat{\Theta}_{c_t;t-1}\right)=q_{c_t;t}$$

$$\int_{\alpha^*}f\left(c_t|\alpha\right)f\left(\alpha|d\left(t-1\right)\right)d\alpha\rightarrow f\left(c_t|\hat{\alpha}_{t-1}\right)=\hat{\alpha}_{c_t;t-1}=s_{c_t;t}$$

jsou tzv. proximities - „blízkosti“ dat modelům.

Proximity dostaneme tak, že do komponenty nebo modelu α dosadíme aktuální odhad parametrů a změřená data. Výsledek je číslo, které říká, jak blízko jsou změřená data modelu.

Proximity pro α je nevýznamná a lze ji vynechat.

Váhy dostaneme normalizací proximit

$$w_t=\aleph\left(q\right)$$

Přepočet statistik

$$V_{j;t} = \underbrace{V_{j;t-1}}_{\text{inf. matice}} + w_j \underbrace{\Psi_t \Psi_t'}_{\text{data}}$$

$$\kappa_{j;t} = \underbrace{\kappa_{j;t-1}}_{\text{počítadlo}} + w_j \underbrace{1}_{\text{data}}$$

pro všechny komponenty $j = 1, 2 \cdots n_c$. Liší se jen použitím vah w.

A jsme hotovi :-)