Hodina 6

9.11.2020

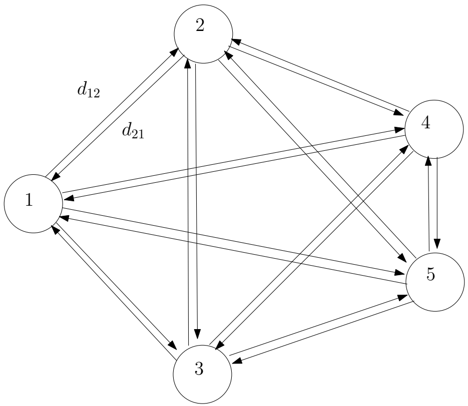
Obchodní cestující - jednosměrné cesty

Obchodní cestující - obousměrné cesty

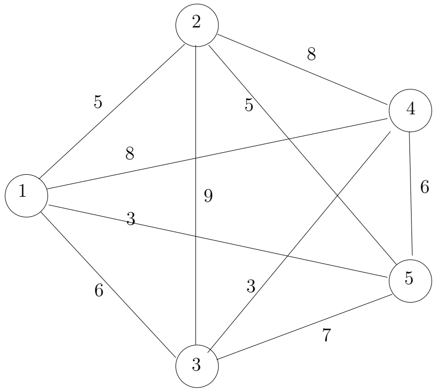
Obchodní cestující (2.6)

Je dán graf s uzly (města) a hranami (cesty). Máme projít všechna města, v každém být jen jednou a vrátit se zpět. Cesta má být co nejkratší.

Asymetrický problém -
- jednosměrné cesty



Symetrický problém -
- obousměrné cesty



Asymetrický problém (2.6.1)

x_{ij} jde z i do j

c_{ij} vzdálenost z i do j

$$J = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$\cdots$ minimální cesta

$$\sum_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_j x_{ij} = 1$$

$\cdots$ města se nesmí opakovat (každý uzel jeden vstup a jeden výstup)

cykly

Cykly

Obecné pojednání o řešení problému cyklů je pojednáno na Wikipedii

https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

Zde je uveden algoritmus Dantzig–Fulkerson–Johnson, který říká, že je potřeba všechny podcykly vyloučit. Zároveň se konstatuje, že problém vyjmenování všech podcyklů je np-těžký problém a řeší se metodou Branch and cut

https://en.wikipedia.org/wiki/Branch_and_cut

Zde si uvedeme metodu kombinací a permutací. Ta detekuje všechny podcykly. Ukazuje se ale, že v úloze TSP, kde navíc požadujeme u každého uzlu jeden vstup a jeden výstup, stačí kontrolovat cyklů méně.

Např. pro 4-uzlový graf jsou všechny 2-krokové cykly následující (svisle)

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Jestliže však kontrolujeme např. - první dva cykly, žádný další už vzniknout nemůže. U větších grafů je to pak složitější.

Heuristické řešení je následující:

1. Řešte úlohu bez omezení na cykly.
2. Ve výsledné matici x detekujte vzniklé cykly.
3. Přidejte podmínky na jejich odstranění.

To opakujte, dokud nedostanete řešení bez cyklů.

Pro hledání cyklů v grafu lze využít operaci Minimální sčítání $\oplus$

$$A \oplus B = \sum_k (a_{ik} + b_{kj}), \forall i, j$$

Postup: Pro I - incidenční matici n-grafu provedeme operace

$$I_1 = I$$

$$I_2 = I_1 \oplus I$$

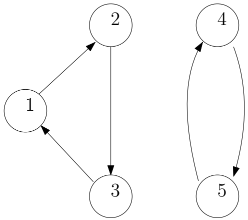
$$\dots$$

$$I_{n-1} = I_{n-2} \oplus I$$

Jsou-li diagonály matic I_1, $I_2, \cdots$, I_{n-1} všechny nulové, je graf acyklický.

Jedničky na diagonále matic I_m, kde $m = 1, 2, \cdots$ indikují cykly o délce m.

Pro n měst je cesta n-krokový cyklus. Cykly nižšího řádu musí být zakázány - není to jedna cesta.



Na obrázku je 5 měst a dva oddělení cykly. Přitom podmínka jeden vstup, jeden výstup je splněna. Tomu se zabrání následující podmínkou

$$\text{každý podgraf s } m \text{ uzly má méně než } m \text{ hran, tj.}$$

$$\sum_{[ij]=1}^{m} x_{ij} < m,$$

$$\text{kde } [ij] \text{ jsou hrany vybraného podgrafu.}$$

Cykly stačí kontrolovat do řádu $\left[\frac{n}{2}\right]$ kde $[\cdot]$ je zaokrouhlení dolů, protože doplněk podcyklu je zase podcyklus.

Poznámka 1: všechny k krokové orientované podgrafy dostaneme takto:

- Vybereme všechny k-tice uzlů - těch je $\binom{n}{k}$ (kombinace k z n prvků).
- Pro každou vybranou k-tici fixujeme jeden uzel a z ostatních děláme permutace - těch bude $\frac{V_k(n)}{k}$

Např. pro kombinaci 2, 3, 5 fixujeme 2 a permutace jsou 3, 5 a 5, 3. Tedy cykly budou 2, 3, 5 (2) a 2, 5, (2).

Poznámka 2: algoritmus, jak podcykly vyjmenovat je ve skriptech na straně 43.

Příklad

Excel: E10ObchCes.xlsx

Symetrický problém (2.6.2)

Stejná formulace, ale cesty jsou obousměrné.

$\rightarrow$ incidenční matice hran je honí trojúhelník,

$\rightarrow$ kontrolovat stačí jen kombinace uzlů.