autor textu: Martina Bečvářová, 2020

# Determinanty

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ čtvercová matice

$$\det A = \sum_{\pi_i \in S_n} \operatorname{sgn} \pi_i \, a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$

$\pi$ … permutace sloupcového indexu

$S_n$ … množina všech permutací $n$-prvkové množiny

## 1. Vypočtěte determinanty

- $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{2 \cdot 4} - \underline{(-5) \cdot 3} = 8 + 15 = \underline{\underline{23}}$

- $\begin{vmatrix} x & xy \\ y & xy \end{vmatrix} = x \cdot xy - xy \cdot y = \underline{\underline{xy(x-y)}}$

- $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - (-\sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \underline{\underline{1}}$

## 2. Vypočtěte determinanty

Sarrusovo pravidlo

- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{-8+0+0}_{} - \underbrace{(-2+0+0)}_{} = -8 + 2 = \underline{\underline{-6}}$

první dva řádky
$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{matrix}$

- $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 0 - (0 + 5 + 3) = -\underline{\underline{18}}$

$\begin{matrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$

3) Řešte rovnici

- $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6x^2 + 0 + 10 - 4x + 0 - 15x = 6x^2 - 19x + 10$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 240}}{12} = \frac{19 \pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

- $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 6 - 6 - 4x + 3x - 3x = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) =$$

$$= x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -2$$

## Determinanty matic řádu $n > 3$

- nelze užít Sarrusovo pravidlo
- Laplaceova věta o rozvoji

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$ ... rozvoj podle $i$-tého řádku

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$ ... rozvoj podle $j$-tého sloupce

$A_{ij}$ ... matice, která vznikne z matice $A$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce

$a_{ij}$ ... prvek matice $A$ na místě $ij$

Poznámka: místo jednoho determinantu řádu $n$ počítáme $n$ determinantů řádu $n-1$

## 1) Vypočtěte determinanty

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \\ 2 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

rozvoj podle 1. řádku

$$(-1)^{1+3}\cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= 1\cdot(0+0-9-3-0-2) - 1\cdot(0-4-9-0-0-2)$$

$$= -14 + 15 = \underline{1}$$

$$\begin{vmatrix} j & i & b & f \\ \boxed{0 \quad 0 \quad a \quad 0} \\ 0 & e & c & 0 \\ 0 & h & d & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{2+3}\cdot a \begin{vmatrix} j & i & f \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = -a\,(0+0+0-0-0-0)$$

rozvoj podle 2. řádku

$$= \underline{0}$$

Poznámka: výhodné pro výpočet je vybírat řádek (sloupec), kde je hodně nulových prvků

nemáme-li nulové prvky, „vyrobíme" je podle vět o výpočtu determinantů

## 2) Vypočtěte determinanty

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \;\; \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & -4 & -1 \\ \boxed{0} & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \overset{\text{Sarrus}}{=}$$

rozvoj podle 1. sloupce

$$= +1\cdot(-8+1+1+4-1-2) = \underline{-5}$$

4)

- $$\begin{vmatrix} 3&1&1&1\\ 1&3&1&1\\ 1&1&3&1\\ 1&1&1&3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -1 & -1 \\ & -\frac{1}{3} & \end{matrix} = \begin{vmatrix} \boxed{3}&1&1&1\\ 0&-8&-2&-2\\ 0&-2&2&0\\ 0&-2&0&2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8&-2&-2\\ -2&2&0\\ -2&0&2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-32+0+0-8-8+0) = -(-48) = \underline{\underline{48}}$$

- $$\begin{vmatrix} 0&1&1&1\\ -1&0&2&2\\ -1&-2&0&3\\ -1&-2&-3&0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0&1&1&1\\ -1&0&2&2\\ 0&-2&-2&1\\ 0&-2&-5&-2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1&1&1\\ -2&-2&1\\ -2&-5&-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(4+10-2-4-4+5) = \underline{\underline{9}}$$

- $$\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 0&1&-1&2\\ 0&0&3&1\\ 0&0&0&7 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3\cdot 7 = \underline{\underline{21}}$$

## Aplikace determinantů

### I. Cramerovo pravidlo

$A\cdot x^T = b^T \qquad b \neq o \qquad$ $A$ … čtvercová matice typu $n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ neznámé

$b = (b_1, \dots, b_n) \neq o$

$A$ … regulární matice ($\det A \neq 0$)

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

$A_i$ … matice, která vznikne z matice $A$ náhradou $i$-tého sloupce sloupcem $b$

$x_i$ … $i$-tá neznámá

Poznámka: Máme soustavu $n$ rovnic o $n$ neznámých s regulární maticí $A$.
Počítáme $n+1$ determinantů řádu $n$.
Pomalá metoda pro velké soustavy

1) S využitím Cramerova pravidla řešte soustavu

$$x+y+z=1,$$
$$x-y=2,$$
$$x-z=0.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1+0+0+1-0+1 = 3 \qquad (3 \neq 0)$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0+2 = 3$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & \boxed{2} & 0 \\ 1 & \boxed{0} & -1 \end{vmatrix} = -2+0+0-2+1 = -3$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & \boxed{0} \end{vmatrix} = 0+2+0+1+0+0 = 3$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{3}{3} = 1$$
$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-3}{3} = -1$$
$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{3}{3} = 1$$

řešení: $[1, -1, 1]$

## II. Výpočet inverzní matice

$A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n$, $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = (b_{ij}) \qquad b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$$

- počítáme jeden determinant řádu $n$, $n^2$ determinantů řádu $n-1$
- pro velké matice pomalá metoda
- $A_{ji}$ ... vznikne z $A$ vynecháním $j$-tého řádku a $i$-tého sloupce

1) Vypočtěte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 21 + 0 - 0 - 14 + 0 = -30 \; (\neq 0)$$

$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$ $\quad \det A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad \det A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -7$

$\det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -21$ $\quad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$

$\det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15$ $\quad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $\quad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -9 & 1 & -7 \\ 21 & 1 & -7 \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

## III. Využití determinantů v analytické geometrii

### A) Rovina

1) Máme dány body $A = [2,0]$, $B = [1,1]$, $C = [3,-1]$. Zjistěte, zda leží na jedné přímce.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 1 - 3 + 2 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

Ano, leží, neboť determinant je roven 0.

2) $A = [2,0]$, $B = [1,1]$, $C = [3,5]$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 + 0 - 3 - 10 - 0 = 7 - 13 = \underline{\underline{-6}}$$

Ne, neleží, determinant je různý od nuly.

2) Jsou dány body $A=[1,1]$, $B=[2,-1]$. Napište obecnou rovnici přímky $AB$. 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = -1+2y+x+x-y-2 = \underline{2x+y-3=0}$$

3) Vypočtěte obsah $\triangle ABC$, $A=[0,1]$, $B=[-2,1]$, $C=[7,-1]$.

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left|0+7+2-7+0+2\right| = \frac{1}{2}|4| = \underline{\underline{2\ j^2}}$$

## B) Prostor

1) Jsou dány body $A=[0,0,1]$, $B=[1,1,0]$, $C=[1,1,1]$, $D=[2,2,1]$. Rozhodněte, zda body leží v jedné rovině.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\cdot(-1)\,+}{} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(0+0-2+2+0+0\right) = 0$$

Ano, leží v jedné rovině, neboť determinant je nulový.

2) Jsou dány body $A=[0,0,1]$, $B=[1,1,0]$, $C=[1,1,1]$. Napište obecnou rovnici roviny $ABC$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} \underset{\cdot(-1)}{} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z-1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\left(z-1+0-y+x+0-z+1\right) =$$

$$= -(x+y) = \underline{\underline{-x-y=0}} \quad \text{nebo} \quad \underline{\underline{x+y=0}}$$

3) Vypočtěte objem čtyřstěnu ABCD, kde $A = [0,0,0]$, $B = [1,1,0]$, $C = [0,1,0]$, $D = [2,3,1]$. 8)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \boxed{0 \ 0 \ 0 \ 1} \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| (-1)^{1+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| -1 \, (1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) \right| = \underline{\underline{\frac{1}{6} \, j^3}}$$

Poznámka:

1) Od obsahu trojúhelníku lze přejít k obsahu rovnoběžníku.

2) Od objemu čtyřstěnu lze přejít k objemu hranolu (rovnoběžnostěnu).