autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Soustavy lineárních rovnic

I. Homogenní soustavy lineárních rovnic

$A \cdot x^T = o^T$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad m \times n$ matice soustavy

m … počet rovnic

n … počet neznámých $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- všechna řešení soustavy homogenní tvoří vektorový prostor V
- $\dim V = n - h(A)$
- všechna řešení popíšeme pomocí báze, tj. nalezneme $n - h(A)$ lineárně nezávislých řešení; každé řešení je lineární kombinací výše nalezených $n - h(A)$ lineárně nezávislých řešení

1) Řešte soustavu

$$x + 2y + z = 0,$$
$$x - y = 0,$$
$$x + y - z = 0.$$

3 rovnice, 3 neznámé

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$h(A) = 3$

$\dim V = 3 - 3 = 0$

z teorie $\longrightarrow$ $\underline{B = \{(0,0,0)\}}$

- $5z = 0$ $\quad \underline{z = 0}$
- $-3y - z = 0$
  $-3y = 0$ $\quad \underline{y = 0}$
- $x + 2y + z = 0$
  $x + 0 + 0 = 0$ $\quad \underline{x = 0}$

$$\underline{B = \{(0,0,0)\}}$$

$\sim$ existuje pouze triviální řešení ($\dim V = 0$)

Metoda: <u>Gaussův eliminační algoritmus</u>

1) úprava matice na odstupňovaný tvar
2) určení $\dim V$
3) výčet řešení

2) Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x+y-z \quad &= 0, \\ x-y \quad +t &= 0, \\ x \quad -z+t &= 0. \end{aligned}$$

3 rovnice, 4 neznámé

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} -1 \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \uparrow \begin{matrix} \bullet \\ \bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \end{matrix}$$

$h(A)=3$

$\dim V = 4-3 = 1$

• $z-t=0$ volba $t=1$ (lze vše, jen ne nulu, volba nuly by vedla na $\vec{o}$)

$z-1=0$

$z=1$

•• $-2y+z+t=0$

$-2y+1+1=0$

$y=1$

••• $x+y-z=0$

$x+1-1=0$

$x=0$

$B=\{(0,1,1,1)\}$

3) Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x+y+z-t&=0, \\ x-y-z+t&=0. \end{aligned}$$

2 rovnice, 4 neznámé

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-2) \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \uparrow \begin{matrix} \bullet\bullet \\ \bullet \end{matrix}$$

$h(A)=2$

$\dim V = 4-2 = 2$

[musíme najít 2LN vektory!]

• $y+z-t=0$ volba $z=0, t=1$ volba $z=1, t=0$

$y+0-1=0$ $y+1-0=0$

$y=1$ $y=-1$

•• $x+y+z-t=0$ $x+1+0-1=0$ $x-1+1+0=0$

$x=0$ $x=0$

$B=\{(0,1,0,1),(0,-1,1,0)\}$ [Vidíme, že vektory jsou LN!!]

4) Řešte soustavu

$$x+y+z=0,$$
$$x-y+z=0,$$
$$x+y-z=0,$$
$$-x+y+z=0.$$

4 rovnice
3 neznámé

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A)=3$

$\dim V = 3-3 = 0$

$\underline{B = \{(0,0,0)\}}$

5) Řešte soustavu

$$x+y+2z=0,$$
$$2x-y+z=0,$$
$$3x+3z=0.$$

3 rovnice
3 neznámé

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A)=2$

$\dim V = 3-2 = 1$

$\underline{B = \{(-1,-1,1)\}}$

• $y+z=0$ volba $\underline{z=1}$

$y+1=0$ $\underline{y=-1}$

•• $x+y+2z=0$

$x-1+2=0$

$\underline{x=-1}$

DÚ: Řešte soustavu

$$x+y-z+t=0,$$
$$x-y+z+t=0,$$
$$x+y+z-t=0,$$
$$3x+y+z+t=0.$$

$[B=\{(-1,1,1,1)\}]$

II. Nehomogenní soustava lineárních rovnic

$A\cdot x^T=b^T$, $b\neq 0$ $A=(a_{ij})$ $m\times n$

$m\ldots$ počet rovnic

$n\ldots$ počet neznámých $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ sloupec pravých stran

- řešitelná $\iff h(A)=h(A|b)$
- řešení: x_0+W → všechna řešení příslušné soustavy homogenní

x_0 ← jedno partikulární řešení soustavy nehomogenní

1) Řešte soustavu

$$x+y+3z=1,$$
$$x-y-z=2,$$
$$x+3y+7z=6.$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 7 & 6\end{array}\right)\overset{-1)+-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right).$$

$h(A)=2$

$h(A|b)=3$ $2\neq 3$

→ soustava nemá řešení

Pozmánka

- $0\cdot z=6$, z neexistuje

→ soustava nemá řešení

2) Řešte soustavu

nehomogenní
3 rovnice
3 neznámé

$$x + y - z = 3,$$
$$x - y + z = 1,$$
$$x + y + z = 2.$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$h(A) = 3$
$h(A|B) = 3$ $\quad 3 = 3 \Longrightarrow$ má řešení

$\dim V = 3 - 3 = 0$

• nehomogenní část x_0

• $2z = -1 \qquad z = -\frac{1}{2}$

• • $-2y + 2z = -2$
$-2y - 2 \cdot \frac{1}{2} = -2$
$-2y = -1 \qquad y = \frac{1}{2}$

• • • $x + y - z = 3$
$x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$
$x = 2$

$x_0 = [2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

• homogenní část V

$\dim V = 0$

$\rightsquigarrow \{(0,0,0)\} = B$

řešení: $[2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] + \{(0,0,0)\} = [2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

Poznámka:

Geometrický význam úlohy 2 – hledáme průsečík tří rovin v E^3.
(vyšel nám 1 bod)

3) Řešte soustavu

$$x + 2y + t = 3,$$
$$x + y + 2z - t = 6,$$
$$2x - y + z = 0.$$

nehomogenní
3 rovnice
4 neznámé

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \end{array} \overset{-1,\,-2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \overset{-5}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & -21 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \circ\circ\circ \\ \circ\circ \\ \circ \end{array}$$

$h(A) = 3$ $\quad 3 = 3 \longrightarrow$ má řešení
$h(A|b) = 3$
$\dim V = 4 - 3 = 1$

• nehomogenní část x_0

• $-9z + 8t = -21$ volba $t = 0$ (lze volit vše)

$-9z + 0 = -21$

$z = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

•• $-y + 2z - 2t = 3$

$-y + \frac{14}{3} + 0 = 3$

$y = \frac{5}{2}$

••• $x + 2y + t = 3$

$x + \frac{10}{3} + 0 = 3$

$x = -\frac{1}{3}$

$x_0 = [-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 0]$

• homogenní část W

• $-9z + 8t = 0$ volba $t = 9$ (vše, jen ne 0)

$-9z + 8 \cdot 9 = 0$

$z = 8$

•• $-y + 2z - 2t = 0$

$-y + 16 - 18 = 0$

$y = -2$

••• $x + 2y + t = 0$

$x - 4 + 9 = 0$

$x = -5$

$B = \{(-5, -2, 8, 9)\}$

Řešení: $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 0] + \{(-5, -2, 8, 9)\}$

DÚ: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y - z + t + v &= 5, \\ y + 2z + t \quad &= 1, \\ x \quad + t - v &= 0, \\ x + y \quad - v &= 5. \end{aligned}$$

$[[\,[2, 3, 0, -2, 0] + \{(-2, -1, -1, 3, 1)\}$

Zopakujte strukturu řešení u obou typů soustav lineárních rovnic

III. Soustavy lineárních rovnic s parametrem

1) V závislosti na parametru a, $a \in \mathbb{R}$, řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + ay &= 1, \\ ax + y &= a^2. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{array}\right)^{-a}_{\curvearrowleft +} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right)$$

není žádná podmínka

$1 - a^2 = 0$?

$(1-a)(1+a) = 0$

I. $a = 1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $h(A) = h(A|b) = 1 \longrightarrow$ má řešení!

$\dim V = 2 - 1 = 1$

řešení: $[1, 0] + \{(-1, 1)\}$

II. $a = -1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ $h(A) = 1$, $h(A|b) = 2$ $\quad 1 \neq 2$

$\longrightarrow$ nemá řešení!

III. $a \neq 1 \wedge a \neq -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right)$ $h(A) = 2 = h(A|b) \longrightarrow$ má řešení!

$\dim V = 2 - 2 = 0$

řešení: $\left[\dfrac{1+a+a^2}{1+a}, \dfrac{a(a-1)}{1-a^2}\right] + \{(0,0)\} = \left[\dfrac{1+a+a^2}{1+a}, \dfrac{-a}{1+a}\right]$

2) V závislosti na parametru p, $p \in \mathbb{R}$, řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ px + y + z &= 2, \\ x - py + 3z &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -p & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -p \; -1 \\ \sim \\ + \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-p & 1+p & 2-p \\ 0 & -1-p & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{-1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-p & 1+p & 2-p \\ 0 & 1+p & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 1+p \\ p-1 \end{matrix} \Big) +$$

! $1-p \neq 0$!

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-p & 1+p & 2-p \\ 0 & 0 & p^2-2p+5 & -p^2+2p+1 \end{array}\right) \end{array}$$

$p^2 - 2p + 5 = 0$? $\quad p_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \notin \mathbb{R}$

I. $p \neq 1$ $\qquad h(A) = h(A|b) = 3 \qquad \dim V = 3 - 3 = 0$

• $z = \ominus \dfrac{(-p^2+2p+1)}{p^2-2p+5}$ $(*)$

•• $(1-p)y + (1+p)z = 2-p$

$(1-y)y = 2 - p - (1+p) \cdot (*)$

$y = \dfrac{2-p-(1+p)\cdot(*)}{1-y} = \Delta$

••• $x + y - z = 1$

$x = 1 - y + z = 1 + (*) - \Delta$ $\quad \square$

řešení: $[\square, \Delta, *]$

II. $p = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} h(A) = 3 = h(A|b) \\ \dim V = 3 - 3 = 0 \end{array}$$

řešení: $[0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$

3) Řešte soustavu v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

$$ax + y + z = 1,$$
$$x + ay + z = 2,$$
$$x + y + az = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & -3 \end{array}\right)$$

! $a \neq 1$

$$a^2 + a - 2 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

I. $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 1$
$h(A|b) = 2$ $\quad 1 \neq 2$

$\longrightarrow$ nemá řešení

II. $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2$
$h(A|b) = 3$ $\quad 2 \neq 3$

$\longrightarrow$ nemá řešení

III. $a \neq 1 \wedge a \neq -2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

$h(A) = 3 = h(A|b)$
$\dim V = 3 - 3 = 0$

• $z = \dfrac{-3}{(a-1)(a+2)}$

•• $(1-a)y + (a-1)z = 2$
$(1-a)y + \dfrac{3}{a+2} = 2 \quad \dots \quad y = \dfrac{5a+1}{(a+2)(a-1)}$

••• $x + y + az = 0$
$x = -y - az = -\dfrac{2a+1}{(a-1)(a+2)}$

řešení: $\left[-\dfrac{2a+1}{(a-1)(a+2)} \;\middle|\; \dfrac{5a+1}{(a-1)(a+2)} \;\middle|\; \dfrac{-3}{(a-1)(a+2)}\right]$

4) V závislosti na parametru p, $p \in \mathbb{R}$, řešte soustavu

$$4x + y + 2z = 0,$$
$$x + py - z = 0,$$
$$6x + y + 2pz = 0.$$

$$\begin{pmatrix}4&1&2\\1&p&-1\\6&1&2p\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4&1&2\\0&1-4p&6\\0&-1&-6+4p\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4&1&2\\0&1&6-4p\\0&1-4p&6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4&1&2\\0&1&6-4p\\0&0&\underbrace{28p-16p^2}\end{pmatrix}$$

$$28p - 16p^2 = 0$$
$$4p(7-4p) = 0$$

I. $p = 0$ $\begin{pmatrix}4&1&2\\0&1&6\\0&0&0\end{pmatrix}$ $h(A) = 2$ $\dim V = 3-2 = 1$

řešení: $\{(1, -6, 1)\}$

II. $p = \frac{7}{4}$ $\begin{pmatrix}4&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $h(A) = 2$ $\dim V = 3-2 = 1$

řešení: $\{(-\frac{3}{4}, 1, 1)\}$

III. $p \neq 0 \wedge p \neq \frac{7}{4}$

$\begin{pmatrix}4&1&2\\0&1&6-4p\\0&0&28p-16p^2\end{pmatrix}$ $h(A) = 3$

$\dim V = 3-3 = 0$

řešení: $\{(0, 0, 0)\}$

DÚ: V závislosti na parametru a, $a \in \mathbb{R}$, řešte soustavu

$$2x + ay + z = 2,$$
$$x \qquad - az = -2,$$
$$9x + 5y + 6z = 12.$$

I. $a = -\frac{5}{9}$ nemá řešení

II. $a = 1$ $[-2, 6, 0] + \{(1, -3, 1)\}$

III. $a \neq -\frac{5}{9} \wedge a \neq 1$ $\left[\frac{12a-10}{9a+5}, -\frac{6}{9a+5}, \frac{30}{9a+5}\right]$