Vektorové prostory

Definice

Nechť V je neprázdná množina, na níž je definována operace sčítání, kterou budeme značit $+$. Nechť je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V$ do V, které dvojici prvků $a \in \mathbb{R}$ a $v \in V$ přiřazuje prvek $a \cdot v \in V$. A nechť platí:

1) $\forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$ asociativita $+$
2) $\forall u, v \in V \quad u+v = v+u$ komutativita $+$
3) $\exists \sigma \in V, \forall u \in V \quad u + \sigma = \cancel{\sigma + u} = u$ nulový prvek
4) $\forall u \in V \ \exists -u \in V \quad u + (-u) = \sigma$ opačný prvek
5) $\forall u \in V \quad 1 \in \mathbb{R} \quad 1 \cdot u = u$
6) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V \quad (a+b)u = a \cdot u + bu$
7) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V \quad (a \cdot b)u = a(bu)$
8) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in V \quad a(u+v) = au + av$

Potom budeme říkat, že $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

u ... vektory — 1 – 8 axiomy

a ... skalár

$-u$ ... opačný vektor k vektoru u — místo $\mathbb{R}$ – lze i $\mathbb{C}$

σ ... nulový vektor

$a \cdot u$ — a-násobek vektoru u

$+$ sčítání vektorů — uzavřenost operace

$\cdot$ násobení vektorů skalárem — uzavřenost násobení skalárem

Pozor

! $+$ - stejně značíme sčítání skalárů a vektorů

$\cdot$ - stejně značíme násobení skalárů a násobení vektoru skalárem

Věty – odvoditelné z axiomů

1) $\forall u \in V \quad 0 \cdot u = o$
2) $\forall u \in V \quad (-1) \cdot u = -u$
3) $\forall u \in V \; \forall a \in \mathbb{R} \quad (-a) \cdot u = -au$
4) $\forall u \in V \quad -(-u) = u$
5) $\forall u, v \in V \; \forall a \in \mathbb{R} \quad a(u-v) = au - av$
6) $\forall u \in V \; \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a-b)u = au - bu$
7) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot o = o$

} zkusit doma

Důkaz 1

$$o \underset{\text{4. axiom}}{=} u + (-u) = 1 \cdot u + -1 \cdot u \underset{\text{distr.}}{=} (1-1)u = 0 \cdot u$$

Definice

Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor. Nechť W je podmnožina množiny V, nechť $(W,+,\cdot)$ je vektorový prostor. Potom říkáme, že $(W,+,\cdot)$ je podprostorem prostoru $(V,+,\cdot)$.

krátce W je podprostorem V.

Poznámka: Každý vektorový prostor má podprostor.

a) Triviální podprostory
- nulový $(\{o\},+,\cdot)$
- sám V $(V,+,\cdot)$

} existují vždy

b) Netriviální podprostory — nemusí existovat

Příklady vektorových prostorů

1) množina všech n-tic nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — Znáte ze SŠ

$u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$+$ $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ — sčítání po složkách

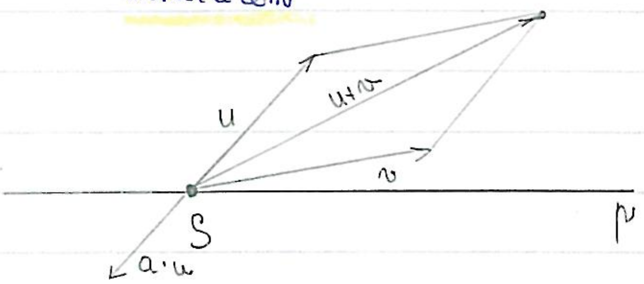
$\cdot$ $c \cdot u = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$ $c \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — násobení skalárem

- ověříme uzavřenost $+, \cdot$
- ověříme 1 – 8

$o = (0, 0, \dots, 0)$

$-u = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

2) množina všech vázaných vektorů v rovině se společným počátkem v pevně zvoleném bodě S, „klasické sčítání", „klasické násobení skalárem"



Znáte ze SŠ

- ověříme uzavřenost $+, \cdot$ → „rovnoběžník sil"
- ověříme 1 – 8
- $o \rightsquigarrow S$
- $a \cdot u$ → „orientace", „velikost"

podprostory: $(V, +, \cdot)$, $(o, +, \cdot)$ } triviální

libovolná přímka p jdoucí bodem S – netriviální

! zobecnění pro $n = 3, 4 \dots$

3) množina $T^{\mathbb{N}}$ všech nekonečných posloupností prvku z $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$, obecně T)

$(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$a + b$ – po složkách

ca – po složkách

podprostory netriviální

- množina všech posloupností s nulami na prvních n-místech
- množina všech konvergentních posloupností
- množina všech posloupností s limitou 0
- ? proč $\underline{\underline{0}}$ – zdůvodnit

4.) Interval (a, b), množina všech reálných funkcí definovaných na (a, b)

+ $f + g$
· af

netriviální podprostory

- funkce omezené na (a, b)
- funkce spojité na (a, b)
- funkce mající derivaci až do řádu k na (a, b)
- polynomy
- polynomy nejvýše do řádu n

Pozor

! - polynomy řádu (stupně) n ... netvoří vektorový prostor

zdůvodnění

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Nechť V je vektorový prostor, $v_1, \dots, v_n$ jsou vektory z prostoru V, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Vektor v

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

se nazývá lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ s koeficienty $a_1, \dots, a_n$.

Poznámky

- je-li $k = 0$ ... prázdná lineární kombinace
  - $k \geq 1$
    - $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ triviální lineární kombinace $\rightarrow o$
    - alespoň jedno $a_i \neq 0$ netriviální lineární kombinace $\rightarrow$?

- k - konečné, konečný počet vektorů

! výsledný vektor je ze stejného vektorového prostoru

$k = 1$ ... skalární násobek vektoru (už bylo vlastně v definici prostoru)

Definice

Nechť V je vektorový prostor, $v_1, \dots, v_k$ jsou vektory z prostoru V. Řekneme, že jsou lineárně nezávislé, jestliže lze nulový vektor vyjádřit pouze jako jejich triviální lineární kombinaci.

Tedy $$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = o \iff (a_1, a_2, \dots, a_k) = (0, 0, \dots, 0)$$

! pouze

Nejsou-li vektory lineárně nezávislé, říkáme, že jsou lineárně závislé.

Tedy nulový vektor lze napsat jako jejich netriviální lineární kombinaci.

$\exists (a_1, a_2, \dots, a_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tak, že $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = o$

Příklady

- $\{(0,2,0), (3,0,0), (0,0,-5)\}$ – lineárně nezávislé vektory
- $\{(1,2,1), (1,3,2), (1,1,0)\}$ – lineárně závislé vektory

Jak to zjistíme?

– řešením soustavy rovnic – známe ze SŠ

$$\{\overset{v_1}{(1,2,1)}, \overset{v_2}{(1,3,2)}, \overset{v_3}{(1,1,0)}\}$$

$$(*) \quad \boxed{k v_1 + l v_2 + m v_3 = o}$$

→ pokud rovnice řešitelná jen pro $k = l = m = 0$ LN

→ existuje-li alespoň jedno nenulové LZ

$k(1,2,1) + l(1,3,2) + m(1,1,0) = (0,0,0)$ · + rovnost vektorů

$(k, 2k, k) + (l, 3l, 2l) + (m, m, 0) = (0,0,0)$

$(k + l + m, 2k + 3l + m, k + 2l) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} k + l + m &= 0 \\ 2k + 3l + m &= 0 \\ k + 2l &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k + 2l &= 0 \\ \cancel{k + 2l = 0} \end{aligned}$$

$\longrightarrow k = -2l$ $\quad l \in \mathbb{R}$

$m = -k - l = 2l - l = l$

$(k, l, m) \Rightarrow (-2l, l, l) = \underline{l(-2, 1, 1)} \quad l \in \mathbb{R}$

mám tedy (*) $-2l v_1 + l v_2 + l v_3 = l \cdot \underbrace{(-2v_1 + v_2 + v_3)}_{o} = o \quad \forall l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ vidím netriviální LK $\longrightarrow$ LZ

Vysokoškolská metoda – ekvivalentní úpravy – vektory nahradíme vhodnými LK, abychom „viděli"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1\,-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

LZ (objevil se nulový řádek)

↳ LZ objevil se „stejný" řádek

∘ v_1

∘∘ $v_2 - v_1$

- vhodné úpravy
  - výměna řádků
  - vynásobení řádku nenulovou konstantou (skalárem)
  - přičtení libovolného násobku řádku k jinému řádku
  - přičtení LK řádků k jinému řádku

cíl: upravit na „odstupňovaný" tvar, z něhož vidíme odpověď

[pečlivě probereme později]

Věta

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když některý z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Důkaz: vysvětlit, co znamená právě tehdy, když

$$\left.\begin{array}{l} 1 \Longrightarrow 2 \\ 2 \Longrightarrow 1 \end{array}\right\} 1 \Longleftrightarrow 2$$

1) LZ $\Rightarrow$ některý je LK ostatních

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = o$ LZ $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$

nechť $a_1 \neq 0$ (pokud ne, mohu přerovnat díky komutativitě +)

$2 \Downarrow 1$

$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_k v_k$ $a_1 \neq 0$, lze s ním dělit

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k = \underbrace{b_2 v_2 + \dots + b_k v_k}$$

$\Rightarrow v_1$ je LK $v_2, \dots, v_k$