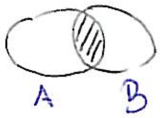
Průnik a spojení podprostorů

Připomenutí SŠ

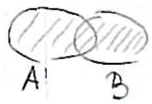
A, B množiny

$A \cap B$ – průnik množin



obsahuje prvky, které jsou v A i B

$A \cup B$ – sjednocení množin



obsahuje prvky, které jsou v A nebo B

Věta

Průnik neprázdného souboru podprostorů prostoru V je vektorový podprostor.

Poznámka: v nejhorším případě triviální ($<^{o}_{V}$)

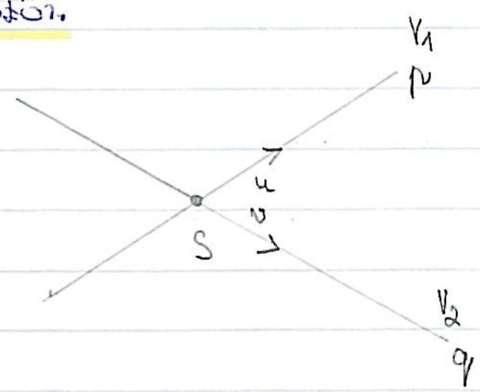
zdůvodnění: $\longrightarrow$ plyne z vlastností podprostorů
(je to neprázdná množina, uzavřená na $+$, $\cdot$ skalárem)

značení $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ ... $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$

Příklad (množinové)

Sjednocení souboru podprostorů prostoru V nemusí být vektorový prostor.

Příklad



$V_1 + V_2$ – obsahují vektory z „p" a „q", ale $u + v$ neobsahuje

Definice

Nechť V je vektorový prostor, M je podmnožina V. Průnik všech podprostorů prostoru V, které obsahují množinu M, nazveme lineární obal množiny M a označíme symbolem $[M]$.

Lineární obal množiny $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ prostoru V budeme značit symbolem $[v_1, v_2, \dots, v_k]$.

Poznámka

Lineární obal množiny M je vektorovým prostorem, s každým vektorem obsahuje jeho skalární násobek (libovolný), obsahuje také každou LK vektorů množiny M.

$\rightsquigarrow U \cup W \longrightarrow [U \cup W]$ – a máme opět vektorový prostor (*)

Příklady

- $M = \{(1,2,3), (1,-1,1)\}$

$$[M] = \{a(1,2,3) + b(1,-1,1);\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(a+b, 2a-b, 3a+b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

- $M = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$

$$[M] = \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,\quad a_i \in \mathbb{R}\ i = 0, 1, \dots, n\}$$

Abychom se vyhnuli problémům (*)

Definice

Spojením souboru podprostorů vektorového prostoru V budeme rozumět lineární obal množinového sjednocení podprostorů tohoto souboru.

$$V_1 + V_2,\quad V_1 + V_2 + V_3,\quad \dots,\quad \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad \left(\overset{\text{nekon.}}{\sum_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha} \right)$$

Množina generátorů

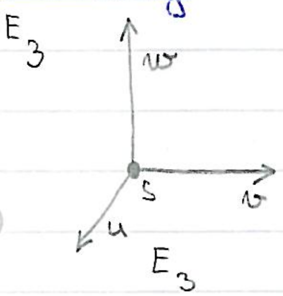
Definice

Nechť V je vektorový prostor, nechť M je podmnožina V taková, že pro $\forall v \in V$ platí, že v lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů z M. Pak říkáme, že množina M je množinou generátorů prostoru V, resp. že M generuje prostor V.

Poznámka

- $[M] = V$, lineární obal množiny M je roven vektorovému prostoru V
- každý vektorový prostor má množinu generátorů
  (u nekonečně generovaných prostorů ji neumíme vypsat!) Funkce

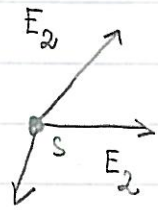
Příklady



$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\{(1,2), (1,3), (0,1)\}$

$\{1, x^1, x^2, x^3, \dots, x^n\}$



Definice

Bází vektorového prostoru budeme rozumět každou jeho lineárně nezávislou množinu generátorů.

Poznámka:

! Požadujeme generování a LN

$\longrightarrow$ každá báze je množinou generátorů ale opačně to neplatí

Příklady

1) $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ $\quad v = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R} \longrightarrow$ báze $B = \{1, i\}$

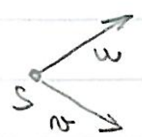
2) Uspořádané n-tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $+, \cdot$

báze kanonická

$B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$

- i-tý vektor má na i-tém místě 1, všude jinde 0

3) „Rovina" – vázané vektory

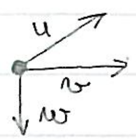


4) Polynomy až do řádu (stupně) n

$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Protipříklady

1) Rovina



$u, v, w \longrightarrow$
jsou LZ, jen množina generátorů

2) $\{\overset{v_1}{(1, 1, 1)}, \overset{v_2}{(2, 2, 2)}, \overset{v_3}{(1, 0, 1)}\}$ – není báze, jen množina generátorů

$v_2 = 2v_1$

3) $\{1, x, 2x, x^2, x+3, x^2+2x+1, x^3, \dots, x^n\}$

– není báze $\quad 2x \rightarrow 2 \cdot x$

$x+3 \rightarrow 1 \cdot x + 3 \cdot 1$

$x^2+2x+1 \rightarrow 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot 1$

Věty o generátorech a bázi (jen konečně generované prostory, věty platí obecně)

1) Každá lineárně nezávislá podmnožina vektorového prostoru je částí nějaké báze tohoto prostoru.

Důkaz

Nechť $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je nějaká množina generátorů prostoru V
M je lineárně nezávislá podmnožina prostoru V

$$M_1 = \begin{cases} M & \text{je-li } v_1 \in [M] \\ M \cup \{v_1\}, & v_1 \notin [M] \end{cases}$$

M_1 je LN, $v_1 \in [M_1]$

$$M_2 = \begin{cases} M_1 & \text{je-li } v_2 \in [M_1] \\ M_1 \cup \{v_2\} & v_2 \notin [M_1] \end{cases}$$

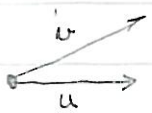
$\vdots$

po k krocích dojdeme k lineárně nezávislé množině M_k, jejíž obal obsahuje $\{v_1, \dots, v_k\}$ (množina generátorů prostoru V). Proto M_k generuje prostor V a je tedy i jeho bází.

Poznámka

- lineárně nezávislá množina
  - → buď přímo generuje → je to báze
  - → nebo ji „doplníme" o další LN vektory tak, aby se stala bází

E_3



LN, ale není to báze

LN, generují — je to báze („dodali" jsme w)

2) Každou lineárně nezávislou množinu vektorů lze doplnit na bázi.

- jiná formulace 1

3) Z každé množiny generátorů lze vybrat bázi.

Důkaz - zřejmý

1) $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ množina generátorů a LN $\longrightarrow$ přímo báze

2) $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ -//- ——— a LZ

nechť $v_1 = a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \longrightarrow$ odstraníme

$\{v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ $\longrightarrow$ zopakujete tak, až dostaneme max. LN množinu $\longrightarrow$ báze

4) Každý vektorový prostor má bázi.

Důkaz: zřejmý. V každém prostoru existuje lineárně nezávislá množina a dle 1 nebo 2 ji lze doplnit na bázi.

5) n lineárně nezávislých vektorů prostoru V nelze možno vyjádřit jako lineární kombinaci $n-1$ vektorů prostoru V.

6) Jestliže v prostoru V existuje n lineárně nezávislých vektorů, potom prostor V nemůže mít množinu generátorů o méně než n prvcích.

5 a 6 jednoduché důsledky 1 a 3.

7) Každé dvě báze vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Důkaz - zřejmý

$B_1 \ldots n$ prvků
$B_2 \ldots m$ prvků

$\Big\}$ potom dle předchozích vět nelze $m < n$, $m > n \Longrightarrow$

$m = n$

Definice

Dimenzí vektorového prostoru budeme rozumět počet vektorů jeho libovolné báze.

Značení: $\dim V = n \qquad n \in \mathbb{N}$

Věty

1) Nechť V je vektorový prostor. Pak platí

a) je-li M lineárně nezávislá množina, $M \subset V$, potom
$$\dim [M] \leq \dim V.$$

b) je-li W podprostor prostoru V, potom
$$\dim W \leq \dim V.$$

2) Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru V, potom

$$\underbrace{\dim (U+W) + \dim (U \cap W)}_{\text{vypočteme snadno}} = \underbrace{\dim U + \dim W}_{\text{vypočteme snadno}}.$$

$U+W$ spojení
$U \cap W$ průnik
$U \oplus W$ direktní součet $(U \cap W = \emptyset)$

Příklad

$M = \{(1,0,2,-3), (3,2,1,-5), (-1,2,1,-2), (-3,0,2,0)\}$ je množina generátorů prostoru V. Vyberte nějakou jeho bázi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{-5} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$B = \{u_1, u_2, u_3\} \qquad \dim V = 3$

Poznámka o výběru, pořadí

Souřadnice vektoru

Definice $\qquad\qquad B=\{v_1,\dots,v_m\}$

Nechť B je báze vektorového prostoru V. Souborem souřadnic vektoru $x\in V$ vzhledem k bázi B budeme rozumět jednoznačně určený soubor $\{a_v\}_{v\in B}$

$$x=\sum_{v\in B} a_v v = a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_mv_m$$

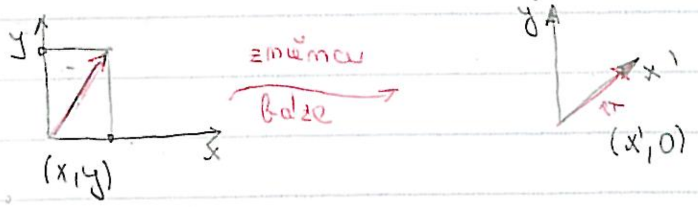
Budeme psát $\langle x\rangle_B=(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Poznámky

1) Souřadnice stanovujeme jen vzhledem k bázi.
2) Vektor musí v daném prostoru ležet.
3) Souřadnice jsou určeny jednoznačně. [nejednoznačnost → špatně poč. / máme jen gener.]
4) Změna báze = změna souřadnic. Transformace souřadnic

≡ souřadnice jsou „koeficienty lineární kombinace" u vektorů báze"

ze SŠ



Příklad

$B=\{\overset{v_1}{(1,2,3)},\overset{v_2}{(0,1,1)}\}$

$x=(2,3,5)$ $\qquad\qquad$ $x=(2,3,0)$

$\boxed{a_1v_1+a_2v_3=x}$

$$\begin{aligned} a_1+0&=2\\ 2a_1+a_2&=3\\ 3a_1+a_2&=1 \end{aligned}$$

$a_1=2$ $\qquad \langle x\rangle_B=(2,-1)$

$a_2=-1$

? Kam zmizela „3. souřad."

$$\begin{aligned} a_1\quad+\quad&=2\\ 2a_1+a_2&=3\\ 3a_1+a_2&=0 \end{aligned}$$

$a_1=2$

$\left.\begin{aligned}a_2&=3-4=-1\\ a_2&=-6\end{aligned}\right]\neq$

$x\notin V$, nelze stanovit souřadnice

[poznámka 2]