autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Matice a operace s maticemi

Definice

Nechť X je neprázdná množina a m, n jsou přirozená čísla. Maticí typu $m \times n$ nad množinou X budeme rozumět obdélníkové schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in X$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a pro každé $j = 1, \dots, n$.

Tuto matici budeme značit $(a_{ij})_{m \times n}$ nebo (a_{ij}) nebo A.

Poznámky

obdélníková matice $m \neq n$

čtvercová matice $m = n$ $\qquad$ a_{ii} – prvky hlavní diagonály [někdy i pro obdélníkové]

a_{ij} – prvek stojící na místě ij

i – řádkový index

j – sloupcový index

X – $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

- řádek
- sloupec

} užíváme v klasickém smyslu

Příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3 \qquad C = \begin{pmatrix} \bigcirc & \triangle \\ \square & * \\ \odot & ☺ \end{pmatrix} \quad 3 \times 2$$

Poznámka

Někdy se matice zavádí pomocí zobrazení $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do X, neboli každé dvojici (i, j), kde $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in X$.

V dalším budeme uvažovat jen matice nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Poznámka: Rovnost matic

Dvě matice téhož typu se rovnají (jsou totožné), jestliže jejich prvky na odpovídajících místech jsou stejné.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \neq B$$

Základní maticové operace a jejich vlastnosti

Sčítání matic

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{R}$. Součtem těchto dvou matic budeme rozumět matici

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

která je typu $m \times n$ a na místě ij má součet prvků stojících v maticích A a B na místě ij.

Poznámky

1) Sčítat lze jen matice téhož typu.
2) Při sčítání se nemění typ matic.
3) „Matice sčítáme po složkách".

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 & -1+1 \\ 0+1 & 1+2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$A + C$ neexistuje

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Základní vlastnosti – věty

1) Sčítání matic je asociativní $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$,
2) Sčítání matic je komutativní $\quad A+B = B+A$

– důkazy – triviální, plynou přímo z definice sčítání

Definice

Nulovou maticí typu $m \times n$ nad ~~tělesem~~ $\mathbb{R}$ budeme rozumět matici

$$O = (a_{ij}), \text{ kde } a_{ij} = 0 \text{ pro každé } i = 1, \dots, m \text{ a } j = 1, \dots, n.$$

Poznámka

Nulová matice má na všech místech nuly.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Opačnou maticí k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ budeme rozumět matici

$$-A = (-a_{ij}) \text{ stejného typu.}$$

Poznámka

Opačná matice má na místě ij prvek opačný k prvku, který je na místě ij původní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Základní vlastnosti – věty

3) Nechť O je nulová matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$. Potom pro každou matici A typu $m \times n$ platí

a) $A + O = O + A = A$,

b) $A + (-A) = -A + A = O$,

c) $-(-A) = A$

Důkaz: zřejmý, plyne z definic

Násobení matice skalárem

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$, nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolný prvek. c-násobkem matice A budeme rozumět matici

$$c \cdot A = (c\,a_{ij})$$

typu $m \times n$, která má na místě ij c-násobek prvku, který je v matici A na místě ij.

Poznámka

- skalární násobek ~ násobení skalárem

$c \cdot A \longrightarrow cA$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad -2A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

  $c = -2$

- $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Základní vlastnosti – věta

Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$. Potom platí

1) $c(A+B) = cA + cB$,
2) $(c+d)A = cA + dA$,
3) $(cd)A = c(dA)$,
4) $1 \cdot A = A$,

– důkazy – zřejmé, plynou z definice operací

Věta

Matice téhož typu spolu se sčítáním a násobení skalárem tvoří vektorový prostor.

– větu jsme v předchozím dokázali.

Násobení matic

Definice

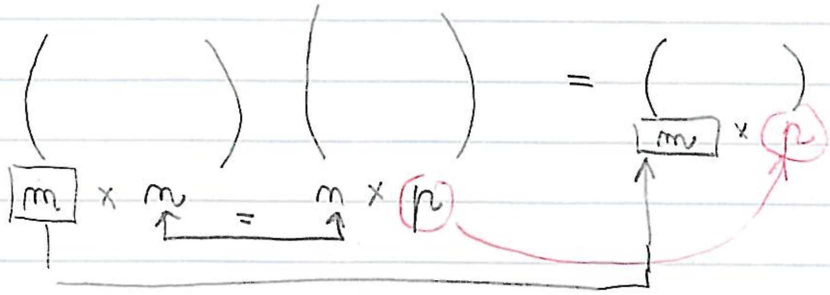
Nechť $A = (a_{ik})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{kj})$ je matice typu $n \times p$ nad $\mathbb{R}$. Součinem matic A, B (v tomto pořadí) budeme rozumět matici C

$$C = A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

typu $m \times p$, která na místě ij má součet součinů odpovídajících prvků i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

Poznámka

- Součin $A \cdot B$ je definován jen tehdy, má-li matice A stejný počet sloupců jako matice B řádků.
- $A \cdot B \rightarrow AB$
- AB



– při násobení matic se může měnit typ matice

Příklad

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad 3 \times 2$ $\qquad$ $A \cdot B$ není definováno

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 3$ $\qquad$ $A \cdot C$ je definováno

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+2 & -1+6 \\ 0+0 & 0+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Proč je násobení matic tak „složité"?

Uvažujme dvě lineární substituce

$$x = ax' + by' \qquad x' = ex'' + fy''$$
$$y = cx' + dy' \qquad y' = gx'' + hy''$$

symbolické vyjádření

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

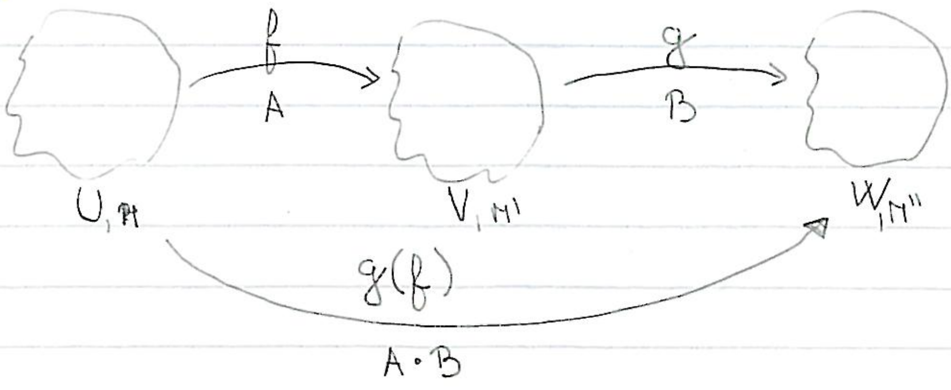
složení ($x \longrightarrow x''$, $y \longrightarrow y''$)

$$x = (ae + bg)x'' + (af + bh)y''$$
$$y = (ce + dg)x'' + (cf + dh)y''$$

symbolické vyjádření?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Skládání lineárních substitucí (zobrazení) odpovídá násobení matic.



Vlastnosti násobení

1) Násobení matic je asociativní. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
2) Násobení matic není komutativní. $A\cdot B \neq B\cdot A$
3) Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání.
$$C(A+B) = CA + CB$$

1, 3 - bez důkazu („hra" s indexy)

2) triviální - stačí najít jednu dvojici, pro niž $A\cdot B \neq B\cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Poznámka

- $C\cdot D$ existuje, $D\cdot C$ neexistuje
- $C\cdot D$ i $D\cdot C$ existují, ale nemusí mít stejný typ

2×3	3×2	2×2
3×2	2×3	3×3 !

Definice

Nechť C, D jsou čtvercové matice typu n nad $\mathbb{R}$. Pokud $C\cdot D = D\cdot C$, hovoříme o záměnných nebo komutujících maticích.

Definice

Jednotkovou maticí typu n nad $\mathbb{R}$ budeme rozumět matici $E = (\delta_{ij})$, kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \quad i,j = 1,\dots,n, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \quad i,j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Symbol δ_{ij} se nazývá Kroneckerovo δ.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobení

1) Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice typu n, E je jednotková matice téhož typu. Potom platí

$$\boxed{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

- důkaz plyne z definice násobení a definice E