

Transponovaná matice

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} . Transponovanou maticí k matici A budeme rozumět matici $A^T = (b_{ji})$ typu $n \times m$, kde pro každé $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$

$$b_{ji} = a_{ij}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

„co má řádkové matice u řádku, to má maticí ve sloupci“

Základní vlastnosti - věty

Nechť A, B jsou matice nad \mathbb{R} , které je možno sečíst, resp. vynásobit.
Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$3) (c \cdot A)^T = c \cdot A^T$$

$$4) (A^T)^T = A.$$

překvapivé!

Speciální matice

Definice

Diagonální matice nad \mathbb{R} budeme rozumět každou matici, která má mimo hlavní diagonálu samé nuly.

Příklady

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka

$$A = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \text{cokoli} & i = j \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m$$

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{R} . Řekneme, že matice A je

- horní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n, i > j$, je $a_{ij} = 0$.
- dolní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n, i < j$, je $a_{ij} = 0$.
- symetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{ij} = a_{ji}$.
- antisymetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{ij} = -a_{ji}$.

Příklady

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti

Symetrická $A^T = A.$

Antisymetrická $A^T = -A.$

Poznámka

Vodorovnými a svislými čarami můžeme matici rozdělit na tzv. bloky neboli dílčí matice.

Matice A , která je nějakým způsobem rozdělena na bloky, se nazývá bloková matice.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

- dílčí blokové matice stojící ve stejném řádku ^{sloupci}
blokové matice A mají stejný počet ^{sloupců} řádků

Hodnota matice

Definice

Nechť A je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} . Hodnota matice $h(A)$ budeme rozumět dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice A .

Poznámka:

- $\text{Hodnota} = \text{max. počet LN řádků (sloupců)}$
- zjišťujeme ji jako u dimenze lineárního obalu množiny vektorů
- $h(A) \leq \min(m, n)$

Regulární, singulární matice

Definice

Čtvercová matice se nazývá regulární, jestliže její hodnota rovná jejímu typu. V opačném případě, tj. když její hodnota menší než její typ, se nazývá singulární.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3 \text{ regulární} \\ n = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$h(B) = 1 \text{ singulární} \\ n = 2$$

Poznámka

- ! • Násobení regulární matice nezvede k změně hodnoty převodní matice.

$$A \cdot B \Rightarrow \text{hod}(A \cdot B) = \text{hod } B !$$

↑
neg.

- ! • $h(A) = h(A^T)$

Elementární transformační úpravy

Definice

Při práci s maticemi budeme elementárními transformačními úpravami rozumět

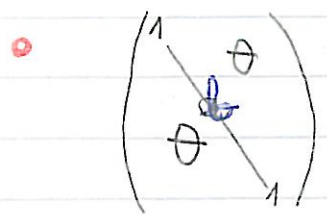
- a) vynásobením nějakého řádku/sloupce nenulovým číslem;
- b) přičtením libovolného násobku řádku/sloupce k jinému řádku/sloupci.

Věty (bez důkazu)

- 1) Provedení elementárních transformačních úprav nevede ke změně hodnoty matice.

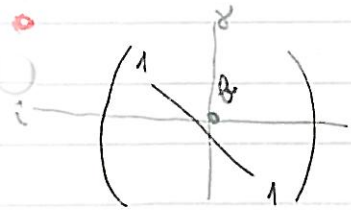
Poznámka

Elementární transformační úpravy lze vyjádřit též pomocí elementárních transformačních matic



na diagonále jsou až na místo i 1, $a_{ii} = b \neq 0$, všude jinde jsou 0

→ $A \cdot ()$ - i -tý řádek násobíme b
 $() \cdot A$ - i -tý sloupec \parallel



na diagonále jsou 1, $a_{ij} = b \neq 0$, všude jinde 0

→ $A \cdot ()$ j -tý sloupec = $b \cdot i$ -tý $A + j$ -tý A
 $() \cdot A$ i -tý řádek = $b \cdot j$ -tý $A + i$ -tý A

Definice

Matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times m$ nad \mathbb{R} se nazývá odstupňovaná,
jestliže pro její prvky platí:

1) je-li $m > 1$, pak $a_{21} = 0$.

2) jestliže pro nějaké $i \in \{1, \dots, m-1\}$ a $k \in \{1, \dots, m-1\}$
je

$a_{i,1} = a_{i,2} = \dots = a_{i,k} = 0$, potom

žadé

$a_{i+1,1} = a_{i+2,1} = \dots = a_{i+1,k+1} = 0$.

Poznámka

V odstupňované matici každý nenulový řádek začíná větším
počtem nul než předcházející řádek (pokud existuje).

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Věta

Každou matici je možno pomocí koněčné množiny elementárních
transformačních úprav převést na odstupňovanou matici.

Věta

Každou matici je možno pomocí koněčné množiny elementárních
transformačních úprav převést na diagonální matici.

Inverzní matice

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{R} . Inverzní matice k matici A budeme označovat maticí A^{-1} , pro kterou je

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

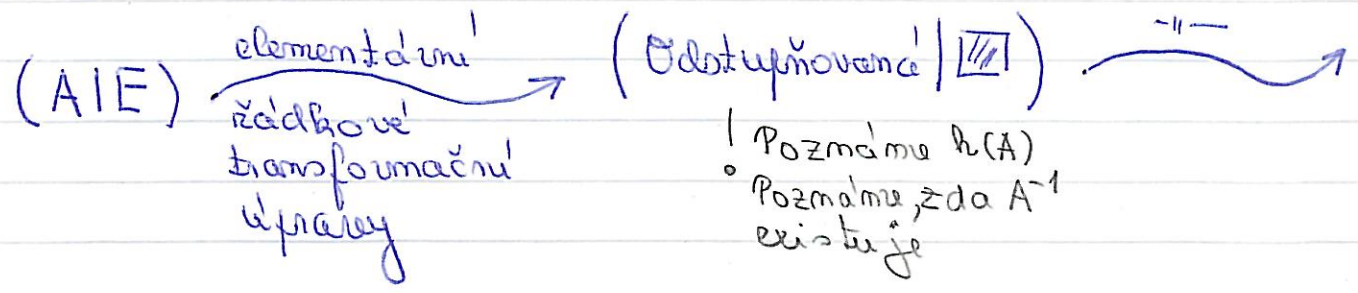
Matici A , ke které existuje inverzní matice A^{-1} , se nazývá invertibilní.

Věty:

- 1) Pokud inverzní matice existuje, je určena jednoznačně.
- 2) Nechť A, B jsou invertibilní matice téhož typu nad \mathbb{R} . Potom:
 - $(A^{-1})^{-1} = A$
 - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
 - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- 3) Čtvercová matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.
 - kritérium existence inverzní matice

Výpočet inverzní matice

A



$$(D \mid \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}) \xrightarrow{\text{---}} (E \mid A^{-1})$$

Diagonální, na diag. není žádná 0.

Prüfung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} + \\ + \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} R(A) = 3 \\ n = 3 \end{matrix} \rightarrow A^{-1} \text{ existuje}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)^4 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B^{-1} neexistuje, B není čtvercová!

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C^{-1} neexistuje, C není regulární!