autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Transponování matic

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$. Transponovanou maticí k matici A budeme rozumět matici $A^T = (b_{ji})$ typu $n \times m$, kde pro každé $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$

$$\boxed{b_{ji} = a_{ij}.}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

„co má původní matice v řádku, to má nová ve sloupci"

Základní vlastnosti – věty

Nechť A, B jsou matice nad $\mathbb{R}$, které je možno sečíst, resp. vynásobit. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom platí

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$
2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ překvapivé!
3) $(c A)^T = c \cdot A^T$
4) $(A^T)^T = A.$

Speciální matice

Definice

Diagonální maticí nad $\mathbb{R}$ budeme rozumět každou matici, která má mimo hlavní diagonálu samé nuly.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka

$A = (a_{ij})$ $\qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n \\ \text{cokoli} & i = j \end{cases}$

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že matice A je

a) horní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$, $i > j$, je $a_{ij} = 0$.

b) dolní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, je $a_{ij} = 0$.

c) symetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{ij} = a_{ji}$.

d) antisymetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{ij} = -a_{ji}$.

Příklady

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti

Symetrická $A^T = A$.
Antisymetrická $A^T = -A$.

Poznámka

Vodorovnými a svislými čarami můžeme matici rozdělit na tzv. bloky neboli dílčí matice.

Matice A, která je nějakým způsobem rozdělena na bloky, se nazývá blokové matice.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & \vdots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

sloupců
- dílčí blokové matice stojící ve stejném řádku
  sloupců
  blokové matice A mají stejný počet řádků

Hodnost matice

Definice

Nechť A je matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$. Hodností matice $h(A)$ budeme rozumět dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice A.

Poznámka:

- Hodnost = max. počet LN řádků (sloupců)
- zjišťujeme ji jako u dimenze lineárního obalu množiny vektorů
- $h(A) \leq \min(m, n)$

Regulární, singulární matice

Definice

Čtvercová matice se nazývá regulární, jestliže její hodnost rovna jejímu typu. V opačném případě, tj. když je její hodnost menší než její typ, se nazývá singulární.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 3$ regulární

$n = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 1$ singulární

$n = 2$

Poznámka

- Násobení regulární maticí nevede ke změně hodnosti původní matice.

$$\underset{\text{reg.}}{A} \cdot B \Rightarrow \text{hod}(A \cdot B) = \text{hod}\, B \; !$$

- $h(A) = h(A^T)$

Elementární transformační úpravy

Definice

Při práci s maticemi budeme elementárními transformačními úpravami rozumět

a) vynásobení nějakého řádku/sloupce nenulovým prvkem;

b) přičtení libovolného násobku řádku/sloupce k jinému řádku/sloupci.

Věty (bez důkazu)

1) Provádění elementárních transformačních úprav nevede ke změně hodnosti matice.

Poznámka

Elementární transformační úpravy lze vyjádřit též pomocí elementárních transformačních matic

- $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & b & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ na diagonále jsou až na místo ii 1, $a_{ii} = b \neq 0$, všude jinde jsou 0

  $\longrightarrow$ $A \cdot (\ )$ – i-tý řádek násobíme b

  $(\ ) \cdot A$ – i-tý sloupec –||–

- $\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & b & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ na diagonále jsou 1, $a_{ij} = b \neq 0$, všude jinde 0

  $\longrightarrow$ $A \cdot (\ )$ j-tý sloupec $= b \cdot$ i-tý A + j-tý A

  $(\ ) \cdot A$ i-tý řádek $= b \cdot$ j-tý A + i-tý A

Definice

Matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ se nazývá odstupňovaná, jestliže pro její prvky platí:

1) je-li $m > 1$, pak $a_{21} = 0$.

2) Jestliže pro nějaké $i \in \{1, \dots, m-1\}$ a $k \in \{1, \dots, n-1\}$ je

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik} = 0, \text{ potom}$$

také

$$a_{i+1,1} = a_{i+2,1} = \dots = a_{i+1,k+1} = 0.$$

Poznámka

V odstupňované matici každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předcházející řádek (pokud existuje).

Příklad

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Věta

Každou matici je možno pomocí konečně mnoha elementárních transformačních úprav převést na odstupňovanou matici.

Věta

Každou matici je možno pomocí konečně mnoha elementárních transformačních úprav převést na diagonální matici.

Inverzní matice

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$. Inverzní maticí k matici A budeme rozumět matici A^{-1}, pro kterou je

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Matice A, ke které existuje inverzní matice A^{-1}, se nazývá invertibilní.

Věty:

1) Pokud inverzní matice existuje, je určena jednoznačně.

2) Nechť A, B jsou invertibilní matice téhož typu nad $\mathbb{R}$. Potom:

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},$$
$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.$$

3) Čtvercová matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.

– kritérium existence inverzní matice

Výpočet inverzní matice

A

$$(A|E) \xrightarrow{\text{elementární}} (\text{Odstupňovaná} \mid \quad) \xrightarrow{-\|-}$$

řádkové transformační úpravy

! Poznáme $h(A)$
Poznáme, zda A^{-1} existuje

$$(D \mid \quad) \xrightarrow{-\|-} (E \mid A^{-1})$$

Diagonální, na diag. není žádná 0.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$h(A) = 3 \longrightarrow A^{-1}$ existuje

$n = 3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ B^{-1} neexistuje, B není čtvercová

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ C^{-1} neexistuje, C není regulární