autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Definice

Soustavou n lineárních rovnic o m neznámých nad $\mathbb{R}$ budeme rozumět soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= y_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= y_2, \\
&\ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= y_n,
\end{aligned}$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$ a pravé strany $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou prvky z $\mathbb{R}$.

Poznámka

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \qquad y^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  matice soustavy — neznámé — sloupec pravých stran

- jiné zápisy

  a) $A \cdot x^T = y^T$ maticový, symbolický

  b) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

  c) $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \cdot (\,) = (\,)$

Poznámka

Vyřešit soustavu znamená najít všechny m-tice $(x_1, \dots, x_m)$ prvků z $\mathbb{R}$, pro které platí všech n výše uvedených rovnic.

Poznámka

Má-li soustava řešení, nazývá se řešitelná.

Nemá-li soustava řešení, nazývá se neřešitelná.

Poznámka

Jestliže $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, potom hovoříme o soustavě homogenní.

$$\boxed{A \cdot x^T = o^T}$$

Jestliže alespoň jedno $y_i \neq 0$ $i = 1, \dots, n$, potom hovoříme o soustavě nehomogenní

$$\boxed{A \cdot x^T = y^T}$$

Matice

$$(A|y^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & y_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & y_n \end{pmatrix}$$

se nazývá rozšířená matice soustavy.

Okruhy problémů:

1) Nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy.
2) Struktura řešení [obecný tvar množiny všech řešení soustavy].
3) Metody nalezení množiny všech řešení.

Věta - Nutná a postačující podmínka existence řešení (Frobenius)

Nechť $A \cdot x^T = y^T$ je soustava n rovnic o m neznámých. Tato soustava je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice.

$$\boxed{h(A|y^T) = h(A).}$$

Poznámka

a) $h(A) = h(A|y^T)$ ... má řešení

b) $h(A) < h(A|y^T)$ ... nemá řešení

c) $h(A) > h(A|y^T)$ ... nikdy nenastane

Důkaz

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- přepsali jsme soustavu „sloupcově"

Z tohoto zápisu okamžitě vidíme

a) je-li sloupec pravých stran LK sloupců „$1 - m$", tj. $h(A) = h(A|y^T)$, existují koeficienty $x_1, x_2, \dots, x_m$

$\longrightarrow$ tudíž soustava je řešitelná

b) existují-li koeficienty $x_1, \dots, x_m$ $\longrightarrow$ sloupec pravých stran je LK sloupců $1 - m$ $\longrightarrow$ tudíž $h(A) = h(A|y^T)$

Poznámka

Homogenní soustava $A \cdot x^T = o^T$ $\longrightarrow$ A a $(A|o)$

$h(A) = h(A|o)$ vždy

! $\longrightarrow$ je vždy řešitelná. V nejhorším případě existuje jen triviální řešení $(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$

Struktura řešení

Homogenní soustava lineárních rovnic

Věta

Nechť $A \cdot \vec{x}^T = \vec{o}$ je homogenní soustava lineárních rovnic. Množina všech jejích řešení tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je rovna rozdílu počtu neznámých a hodnosti matice soustavy.

$$\dim V = n - h(A).$$

[první část triviální [ověření axiomů vekt. prostoru]
druhá část bez důkazu

Poznámka

1) je-li $n = h(A)$ ... existuje pouze triviální = nulové řešení

2) je-li $n > h(A)$ ... existuje i netriviální řešení (tj. nenulové)
   - všechna řešení nalezneme tak, že nalezneme právě tolik lineárně nezávislých řešení, kolik je $n - h(A)$
   - tato řešení tvoří bázi prostoru řešení

3) $n < h(A)$ ... nenastane

Nehomogenní soustava lineárních rovnic

Věta

Nechť $A \cdot x^T = y^T$ a $y^T \neq o$ je nehomogenní soustava lineárních rovnic, nechť $h(A) = h(A|y^T)$. Množina všech jejích řešení je lineární množina $x_0 + W$, kde x_0 je libovolné řešení nehomogenní soustavy $A \cdot x^T = y^T$ a W jsou všechna řešení příslušné soustavy homogenní $A \cdot x^T = o$.

– bez důkazu

Poznámka

a) $h(A) < h(A|y^T)$ ... neexistuje x_0 $\longrightarrow$ soustava nemá řešení

b) $h(A) = h(A|y^T)$ - soustava má řešení

I. $n = h(A)$ [počet neznámých je roven hodnosti matice soustavy]
$\longrightarrow$ jediné řešení x_0, W - triviální podprostor

II. $n > h(A)$ $\longrightarrow$ „více řešení" - W netriviální podprostor

III. $n < h(A)$ $\longrightarrow$ nenastane

Poznámka

Při řešení soustav lineárních rovnic se často hovoří o lineárně závislých či nezávislých rovnicích.
$\longrightarrow$ tím je míněna LZ či LN odpovídajících řádků rozšířené matice soustavy

Věta

Soustava lineárních rovnic je řešitelná pro každý sloupec pravých stran právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna počtu rovnic.

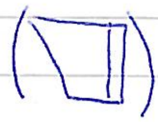
$$h(A) = m.$$

bez důkazu

Algoritmus řešení = Gaussův eliminační algoritmus

$$A \cdot x^T = y^T$$

podle teorie probrané v partii o maticích
$\rightarrow$ každou matici lze konečným počtem elementárních transformačních úprav převést na odstupňovanou matici

$(A|y^T) \longrightarrow$ 

- „vyčteme" hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené
- rozhodneme o existenci řešení
- nalezneme x_0
- nalezneme W
- zapíšeme řešení

Příklad

$$\begin{aligned} x - y + z + u - 2v &= 0 \\ 2x + y - z - u + v &= 1 \\ 3x + 3y - 3z - 3u + 4v &= 2 \\ 4x + 5y - 5z - 5u + 7v &= 3 \end{aligned}$$

4 rovnice

5 neznámých

nehomogenní soustava

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & u & v & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & +1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \; -3 \; -4 \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & +3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & +10 & 2 \\ 0 & +9 & -9 & -9 & +15 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} h(A) &= 2 \\ h(A|y^T) &= 2 \end{aligned}\right] \; 2 = 2 \qquad \dim V = 5 - 2 = 3$$

a) nehomogenní část v_0

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overbrace{\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3},}^{\text{dopočteme}} \underbrace{0, 0, 0}_{\text{volba}}\right]$$

volba ° (lze volit cokoliv, volím tak, aby se dobře počítalo)

° volím tolik hodnot, kolik je dimenze

$$\begin{aligned} 3y - 3z - 3u + 5v &= 1 \\ 3y + 0 + 0 + 0 &= 1 \\ y &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + z + u - 2v &= 0 \\ x - \tfrac{1}{3} + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ x &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

b) homogenní část

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$W = \{ (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0) \}$

- tolik LN vektorů, kolik je dimenze!
- „kanonická báze" – zajištění LN, zajištění „snadného" počítání
- dopočtení
- nikdy nelze zvolit $0, \dots, 0 \longrightarrow \sigma$, víme, že není vektorem báze

Řešení

$[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0] + \{ (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0) \}$

Poznámky

1) x_0 ... lze vybrat „nekonečně" mnoho (je-li $m - h(A) > 0$)

2) W ... báze, jiná volba $\longrightarrow$ jiné vektory, ale jejich LK lze vyjádřit „původní" $\rightarrow$ problém rychlé kontroly

3) Geometrická představa

vektorový prostor $\downarrow$ bod + vektorový prostor

$\downarrow$ to nemusí existovat „průsečík"

Soustavy lineárních rovnic regulární matice

Věta

Nechť $A \cdot x^T = y^T$ je nehomogenní soustava lineárních rovnic s regulární maticí. Potom má soustava právě jediné řešení $x = (x_1, \dots, x_m)$, pro které je

$$x^T = A^{-1} \cdot y^T.$$

Důkaz

$$A \cdot x^T = y^T \qquad \exists A^{-1}, \text{ je jediná}$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot x^T = A^{-1} y^T$$
$$E \cdot x^T = A^{-1} y^T$$
$$x^T = A^{-1} y^T$$

Poznámka

Řešení získáme tak, že inverzní matici k matici soustavy vynásobíme sloupečkem pravých stran.

1) $(A|E) \rightsquigarrow (E|A^{-1})$

2) $x^T = A^{-1} \cdot y^T$

Problémy

1) Výpočet A^{-1} může být zdlouhavý, nemusíme vidět, že A je regulární.

2) Daná matice soustavy nemusí být nutně čtvercová, ale během elementárních transformačních úprav se může na čtvercovou přeměnit.

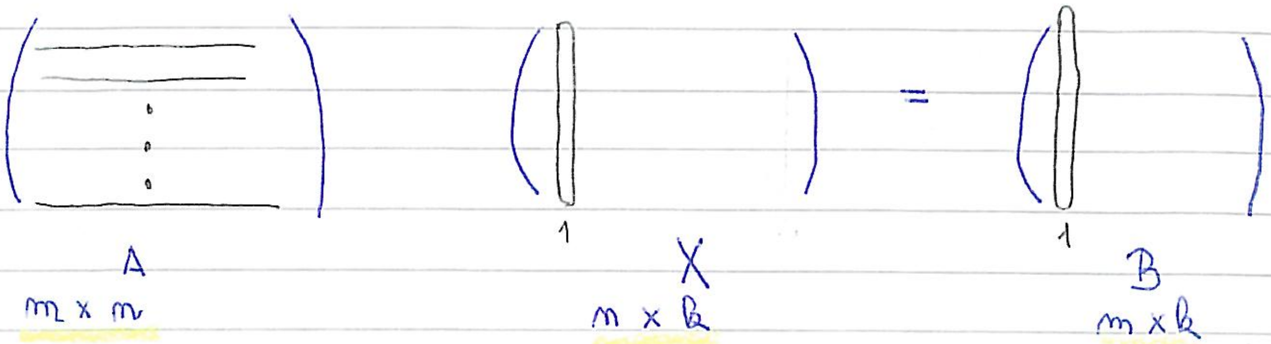
Maticové rovnice typu $A \cdot X = B$

Definice

Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$ a $m \times k$ nad $\mathbb{R}$. Maticovou rovnicí rozumíme rovnici typu $A \cdot X = B$.

Poznámka

Vyřešit maticovou rovnici znamená najít všechny matice X typu $n \times k$ nad $\mathbb{R}$, pro které je součin $A \cdot X$ roven matici B.



- násobíme-li $A \times 1.$ sloupec $X \longrightarrow 1.$ sloupec B

$A \times 2.$ sloupec $X \longrightarrow 2.$ sloupec B

$\vdots$

$A \times k.$ sloupec $X \longrightarrow k.$ sloupec B

→ dostáváme vlastně k soustav lineárních rovnic se stejnou maticí A a různými pravými stranami (to jsou sloupce matice B)

→ „násobná Frobeniova podmínka"
[každá ze soustav musí být řešitelná]

Věta

Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$ a $m \times k$ nad $\mathbb{R}$. Maticová rovnice $A \cdot X = B$ je řešitelná právě tehdy, když

$$h(A) = h(A|B).$$

Poznámka

- Dimenze řešení maticové rovnice $A \cdot X = B$ je rovna součinu

$$\underbrace{k}_{\text{máme } k \text{ soustav}} \cdot \underbrace{(n - h(A))}_{\text{odpovídá soustavě}}$$

- Při řešení maticových rovnic používáme stejné metody jako při řešení soustav lineárních rovnic.

Poznámky

I. A je regulární matice

$$A \cdot X = B \qquad \exists!\, A^{-1}$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

- jednoznačnost
- nalezení inverzní matice
- násobení ze správné strany

II. A^{-1} neexistuje

- $h(A) \neq h(A|B)$ – neexistuje řešení
  - tj. některá ze soustav není řešitelná
- $h(A) = h(A|B)$
  - vektorový prostor nad $\mathbb{R}^{n \times k}$
  - dimenze $k \cdot (n - h(A))$
  - báze
  - $X_0 + W_{n \times k}$