autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Kvadratické formy

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je jeho báze, A je symetrická matice. Kvadratickou formou F na V budeme rozumět zobrazení z V do $\mathbb{R}$, které má analytické vyjádření vzhledem k bázi M ve tvaru

$$\forall x \in V: \quad F(x) = \langle x \rangle_M \cdot A \cdot \langle x \rangle_M^T .$$

Poznámka:

$\langle x \rangle_M$ ... souřadnice vektoru x vzhledem k bázi M

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{symetrická matice}$$

$$\langle x \rangle_M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \dots$$
$$\dots 2a_{n-1\,n} x_{n-1} x_n$$

$\longrightarrow$ plyne ze symetrie matice A

Poznámka

V vektorový prostor

M, M' dvě báze prostoru V

A ... matice kvadratické formy vzhledem k bázi M

B ... matice přechodu od báze M' k bázi M

$$F(x) = \langle x \rangle_{M'} \cdot B^T A \cdot B \cdot \langle x \rangle_{M'}$$

$\longrightarrow$ změna báze znamená změnu matice KVF

Věta

Nechť V je vektorový prostor, F a G jsou dvě kvadratické formy na V, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\left.\begin{matrix} F+G \\ \alpha F \end{matrix}\right\} \text{ jsou kvadratické formy na } V.$$

Důkaz

F ... A $\qquad$ $F+G \Rightarrow A+B$

G ... B $\qquad$ $\alpha F \Rightarrow \alpha A$

– plyne z vlastností maticových operací (součet dvou symetrických matic je symetrická matice; skalární násobek symetrické matice je symetrická matice)

Příklad 1

$F(\vec{x}) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 4xz + 6yz$. Rozhodněte, zda F je KVF a najděte její matici.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ano $F(\vec{x})$ je KVF

$F(\vec{x}) = x^2 + y^2 + x + y$

ne $F(\vec{x})$ není KVF $\qquad F(x) \neq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$F(\vec{x}) = x^2 + y^2 + \underbrace{x + y}_{\uparrow \text{narušuje}}$

Příklad 2

Rozhodněte, zda daná matice reprezentuje kvadratickou formu, pokud ano, najděte její analytické vyjádření.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ne, není čtvercová

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ne, není symetrická

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

ano, je symetrická

$F(\vec{x}) = x^2 - 3z^2 - 2xz + 4yz$

- vysvětlit, jak dostaneme předpis

Definice

Hodností kvadratické formy F rozumíme hodnost její vytvořující matice.

Poznámka:

$h(A) = n$ ... regulární kvadratická forma (pouze $\vec{o}$ se zobrazí na ϕ)

$h(A) < n$ ... singulární kvadratická forma

Definice

Bázi $N = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vektorového prostoru V nazýváme polární bází kvadratické formy F, jestliže má forma F vzhledem k této bázi analytické vyjádření

$$F(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 .$$

Poznámka 1

A vzhledem k polární bázi je diagonální matice !

Poznámka 2

Změna báze vlastně znamená transformaci souřadnic

$$F(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$ původní vyjádření KVF $\qquad A$ sym.

lineární transformace souřadnic

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j \qquad i = 1, \dots, n$$

potom při vhodné transformaci lze docílit vyjádření

$$F(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2 = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{nn}y_n^2 \qquad B \text{ diag.}$$

Poznámka 3

$$F(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

– tento tvar nazýváme polárním tvarem kvadratické formy F

Věta

Ke každé kvadratické formě existuje polární báze, tj. každou kvadratickou formu lze převést na polární tvar.

Poznámka 4

! Není-li stanovena báze, automaticky se uvažuje, že matice, resp. analytické vyjádření je určeno vzhledem ke kanonické bázi.

Klasifikace kvadratických forem

Definice

Nechť F je kvadratická forma na vektorovém prostoru V. Forma F se nazývá

a) pozitivně definitní, jestliže $\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} \neq \vec{o}$ $\quad F(\vec{x}) > 0$,
b) negativně definitní, jestliže $\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} \neq \vec{o}$ $\quad F(\vec{x}) < 0$,
c) pozitivně semidefinitní, jestliže $\forall \vec{x} \in V$ $\quad F(\vec{x}) \geq 0$,
d) negativně semidefinitní, jestliže $\forall \vec{x} \in V$ $\quad F(\vec{x}) \leq 0$,
e) indefinitní, jestliže $\exists \vec{x} \in V,\ \exists \vec{y} \in V$ $\quad F(\vec{x}) > 0 \wedge F(\vec{y}) < 0$.

Poznámka

- Typ kvadratické formy „nepoznáme" z analytického vyjádření jen podle definice.

! - Typ určujeme z polárního tvaru

Věta

Nechť V je vektorový prostor, M je polární báze,

$$F(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

je polární tvar kvadratické formy F vzhledem k polární bázi M. Kvadratická forma F je

a) pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\quad a_{ii} > 0$,

b) negativně definitní $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a_{ii} < 0$,
c) pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a_{ii} \geq 0$,
d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a_{ii} \leq 0$,
e) indefinitní $\exists i, j : \quad a_{ii} > 0 \wedge a_{jj} < 0$.

Důkaz:
- stačí si rozmyslet analytické vyjádření kvadratické formy a hodnoty kvadratické formy na vektorech polární báze

Zákon setrvačnosti kvadratických forem

Definice
Signaturou kvadratické formy F rozumíme uspořádanou trojici čísel vyjadřující počet kladných a_{ii}, záporných a_{ii} a nulových a_{ii} v polárním tvaru kvadratické formy.

Značení $\quad \operatorname{sgn} F = (p, z, q)$

Poznámka:
V vektorový prostor, $\dim V = n \qquad p + z + q = n$

a) pozitivně definitní $\quad (n, 0, 0)$
b) negativně definitní $\quad (0, n, 0)$
c) pozitivně semidefinitní $\quad (p, 0, q)$
d) negativně semidefinitní $\quad (0, z, q)$
e) indefinitní $\quad (p, z, q) \quad p, z$ pouze nenulové

Věta
Signatura kvadratické formy nezávisí na lineární transformaci souřadnic, která převádí danou kvadratickou formu na polární tvar.

- bez důkazu