Lineární algebra – teoretická část zkoušky

Ukázka typových otázek za 5 bodů:

1. Napište definici vektorového prostoru. Uveďte jeden netriviální příklad vektorového prostoru a jednu strukturu, která není vektorovým prostorem.
2. Napište definici podprostoru vektorového prostoru. Uveďte jednu netriviální dvojici prostor – podprostor. Uveďte jednu strukturu, která není podprostorem.
3. Napište definici lineární kombinace vektorů. Uveďte jeden příklad lineární kombinace vektorů.
4. Napište definici lineární závislosti vektorů. Uveďte jeden příklad lineárně závislé skupiny vektorů.
5. Napište definici množiny generátorů a báze vektorového prostoru. Uveďte jeden příklad množiny generátorů, která není bází.
6. Dimenze vektorového prostoru.
7. Napište definici souřadnic vektoru vzhledem k bázi
8. Definujte pojmy: obdélníková matice, typ matice, hodnost matice, symetrická matice. Uveďte netriviální příklady (kde je to možné).
9. Definujte pojmy: singulární matice, diagonální matice, jednotková matice, opačná matice. Uveďte netriviální příklady (kde je to možné).
10. Definujte pojmy: čtvercová matice, regulární matice, antisymetrická matice, nulová matice. Uveďte netriviální příklady (kde je to možné).
11. Napište definici sčítání matic. Popište alespoň pět vlastností této operace.
12. Napište definici násobení matic. Popište alespoň pět vlastností této operace.
13. Napište definici transponování matice. Popište alespoň dvě vlastnosti této operace.
14. Definujte inverzní matici. Popište alespoň tři její vlastnosti.
15. Napište definici elementárních transformačních úprav. Vysvětlete jejich význam a použití.
16. Napište definici homogenní soustavy lineárních rovnic. Vysvětlete její maticovou interpretaci.
17. Napište definici nehomogenní soustavy lineárních rovnic. Vysvětlete její maticovou interpretaci.
18. Napište definici determinantu.
19. Napište definici skalárního součinu vektorů, vektorového součinu vektorů, úhlu dvou vektorů.
20. Definujte pojmy: velikost (délka) vektoru, jednotkový vektor, kolmost dvou vektorů.
21. Definujte pojmy: ortogonální vektory, ortonormální vektory. Uveďte příklady.
22. Definujte pojem podobnost matic. Vysvětlete dvě metody, které umožňují rozhodnout, zda jsou dvě matice podobné.
23. Definujte pojmy: charakteristická matice, charakteristický polynom, charakteristická rovnice.
24. Definujte pojmy: vlastní číslo, vlastní vektor, zobecněný vlastní vektor matice.
25. Definujte pojem Jordanova buňka. Uveďte dva příklady.
26. Definujte pojem matice s jednoduchou strukturou. Objasněte Jordanův kanonický tvar matice s jednoduchou strukturou.
27. Napište definici kvadratické formy. Vysvětlete základní způsoby jejího zápisu (analytické vyjádření, maticové vyjádření). Uveďte dva příklady.
28. Proveďte úplnou klasifikaci kvadratických forem.
29. Definujte pojmy: polární báze kvadratické formy a polární tvar kvadratické formy.
30. Napište definici signatury kvadratické formy. Vysvětlete souvislost signatury a typu kvadratické formy.

Ukázka typových otázek za 10 bodů:

1. Napište, jak vypadají souřadnice *i*-tého vektoru báze vzhledem k této bázi.
2. Popište dvě metody nalezení inverzní matice.
3. Popište Gaussův eliminační algoritmus. Vyložte jeho podstatu a použití.
4. Napište nutnou a postačující podmínku existence řešení soustavy lineárních rovnic.
5. Popište strukturu řešení soustavy homogenních lineárních rovnic. Vysvětlete geometrický význam řešení.
6. Popište strukturu řešení soustavy nehomogenních lineárních rovnic.
7. Popište řešitelnost maticové rovnice $A \cdot X = \mathrm{B}$, kde A, B jsou zadané matice a X je hledaná matice. Uvažujte všechny možnosti případů.
8. Popište Sarussovo pravidlo. Vysvětlete jeho použití.
9. Napište znění věty o rozvoji determinantu. Vysvětlete její použití.
10. Napište znění alespoň tři vět, které popisují vlastnosti determinantů.
11. Napište znění Cramerova pravidla. Vysvětlete jeho použití.
12. Popište geometrický význam determinantů. Uveďte alespoň tři použití determinantů v analytické geometrii.
13. Popište postup ortogonalizace skupiny vektorů (Schmidtův ortogonalizační proces).
14. Popište algoritmus nalezení Jordanova kanonického tvaru matice.
15. Popište alespoň dvě metody stanovení signatury kvadratické formy.
16. Napište zákon setrvačnosti kvadratické formy.

Ukázka typových otázek za 15 bodů:

1. Dokažte: Vektory v_1, v_2, …, v_k jsou lineárně závislé právě tehdy, když některý z nich je lineární kombinací ostatních.
2. Dokažte: Z každé množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi.
3. Dokažte: Matice téhož typu spolu se sčítáním a násobením skalárem tvoří vektorový prostor.
4. Dokažte: Násobení matice není komutativní.
5. Dokažte: Všechna řešení soustavy homogenních lineárních rovnic tvoří vektorový prostor.
6. Dokažte: Každé řešení soustavy nehomogenních lineárních rovnic je možné zapsat jako součet partikulárního řešení této soustavy a řešení příslušné soustavy homogenních lineárních rovnic.
7. Dokažte: A je matice typu n x n. Determinant matice je roven nule, jestliže je jeden řádek matice A lineární kombinací některých ostatních řádků.
8. Dokažte: A je matice typu n x n, c je reálné číslo. $\mathrm{Det}\,(c \cdot A) = c^n \cdot \det A$.
9. Dokažte: A je matice typu n x n. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku matice A rovny nule, je determinant této matice roven nule.
10. Dokažte: Hodnota determinantu matice se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků.
11. Dokažte: Podobné matice mají stejná vlastní čísla.
12. Dokažte: Vlastní vektory příslušné danému vlastnímu číslu tvoří spolu s nulovým vektorem vektorový prostor.
13. Dokažte: Vlastní vektory symetrické matice příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální (tj. jsou na sebe kolmé).