

Trojúhelník v zajetí zákonitostí a náhod

Dalibor Martišek
Poděbrady 2019



Náhodným pokusem, který lze zopakovat s pravděpodobností nula, sestrojíme geometrický útvar, který se skládá z nekonečně mnoha trojúhelníků.

Zjistíme, že se vymyká běžným představám o počtu rozměrů a zopakujeme přitom něco málo ze stejnolehlosti a geometrických řad.

Připomeneme Pascalův trojúhelník, dotkneme se dělitelnosti, spočetnosti a nespočetnosti.

Budeme velet pochodující želvě, trochu si zaprogramujeme, zkusíme vyřešit hlavolam, který má možná na svědomí smrt, a není vyloučeno, že se dočkáme i konce světa.

Kostku od Člověče nezlob se s sebou!

A collection of various colored dice (red, purple, yellow, blue, green, white, and black) scattered on a dark green, textured surface. Some dice are standard six-sided, while others are multi-sided (d8, d10, d12). A small, dark blue, multi-sided die is visible in the center. The dice are arranged in a somewhat chaotic manner, with some overlapping. The lighting is soft, creating gentle shadows.

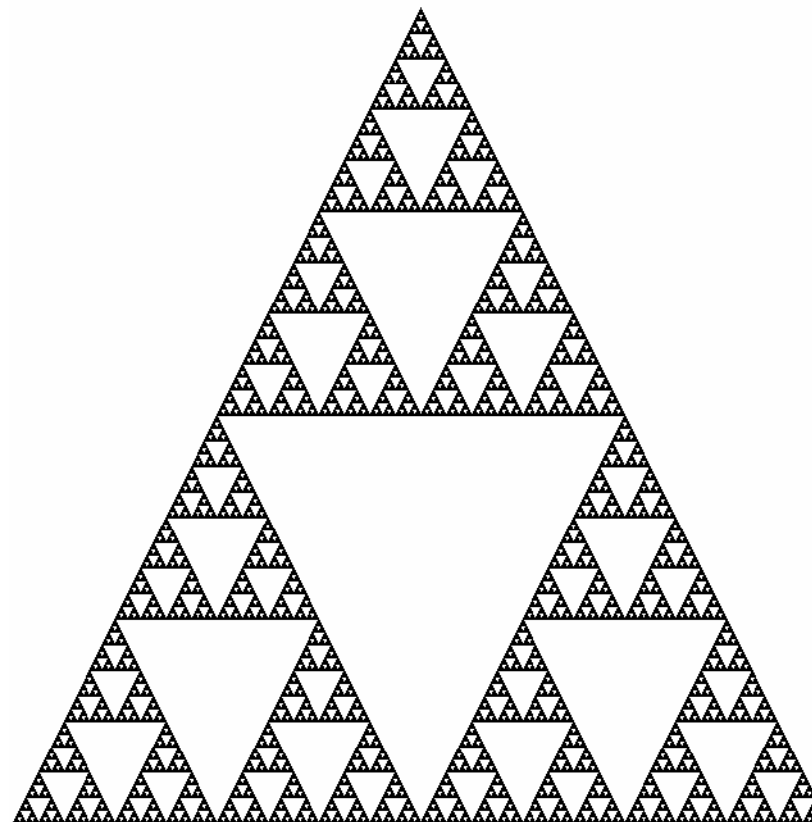
Když zatýká náhoda

Waclaw Franciszek Sierpiński (1882 - 1969)

a jeho (?) trojúhelník
(1915)

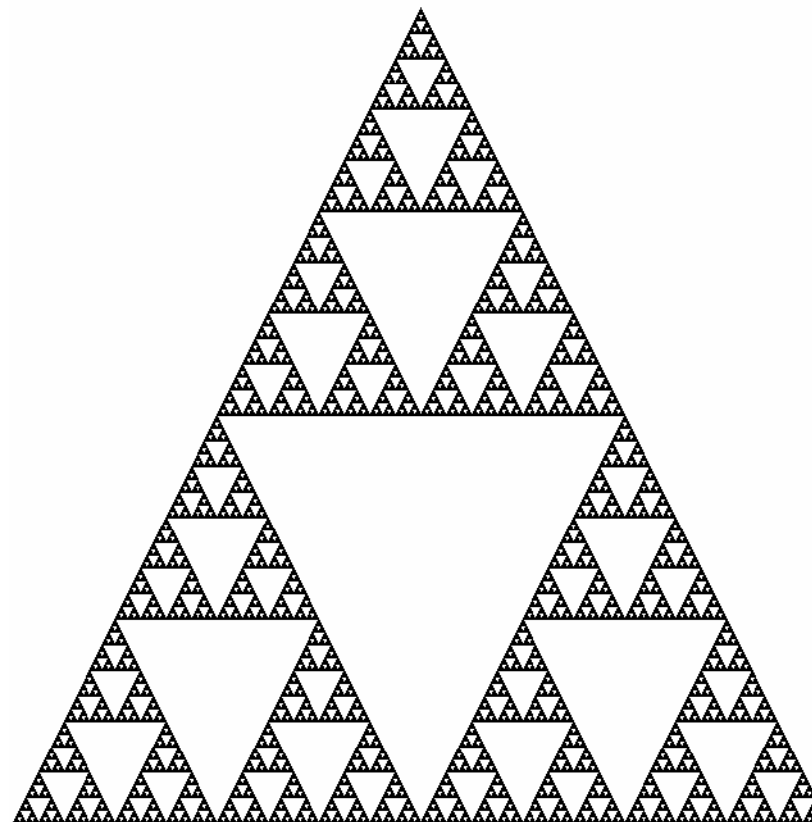


*Je to plocha? Pokud ano, pak má
nenulový a konečný obsah.*



*Je to plocha? Pokud ano, pak má
nenulový a konečný obsah.*

Obsah původního trojúhelníka – S_0

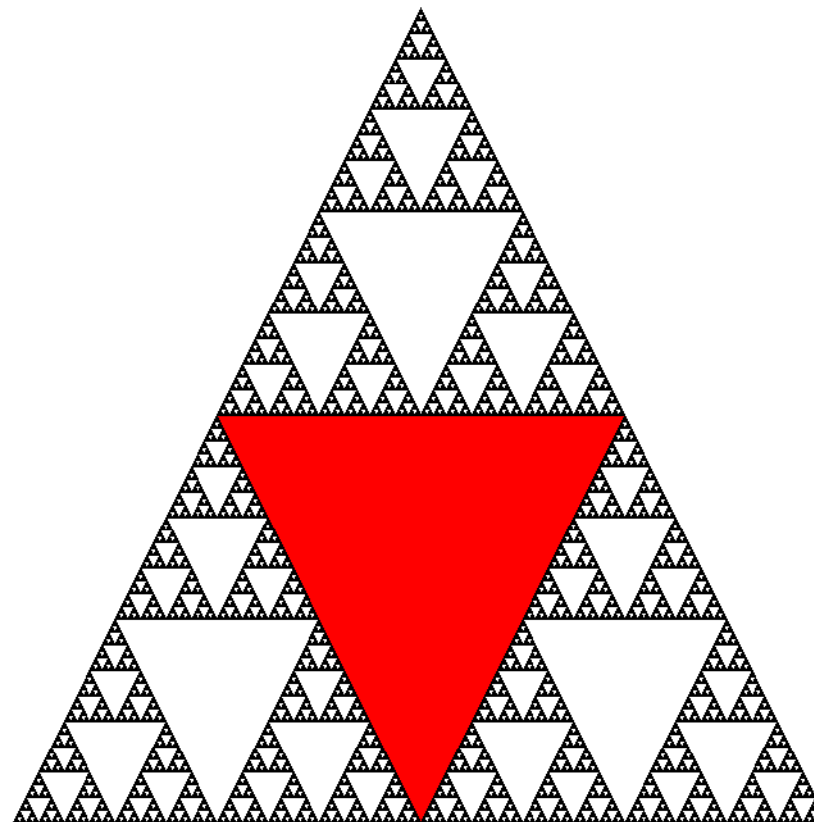


Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

Obsah původního trojúhelníka – S_0

Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$



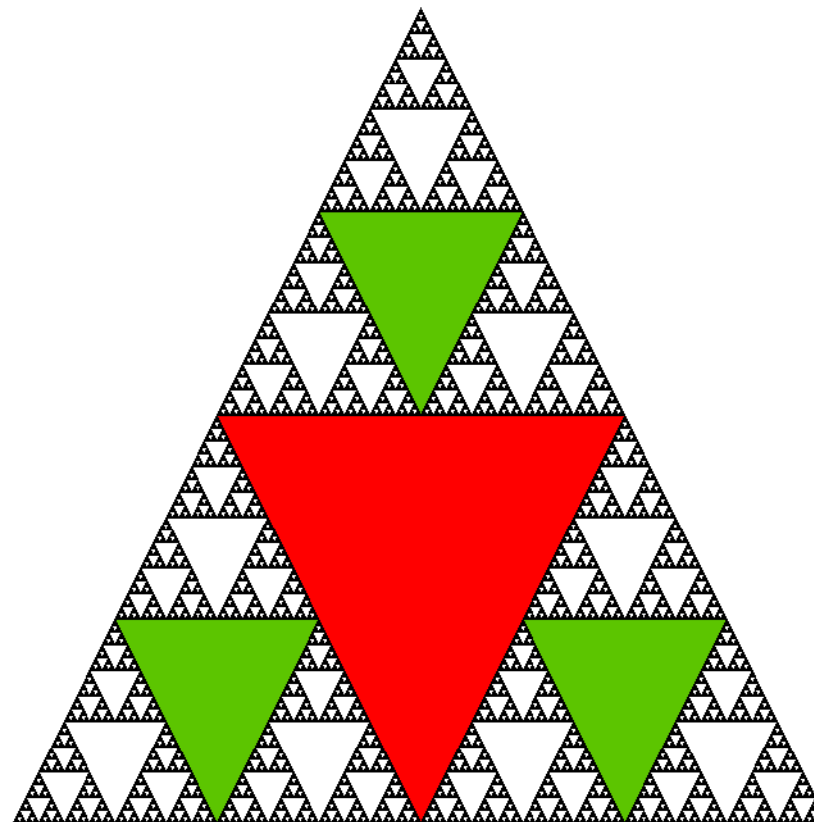
Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

Obsah původního trojúhelníka – S_0

Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$



Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

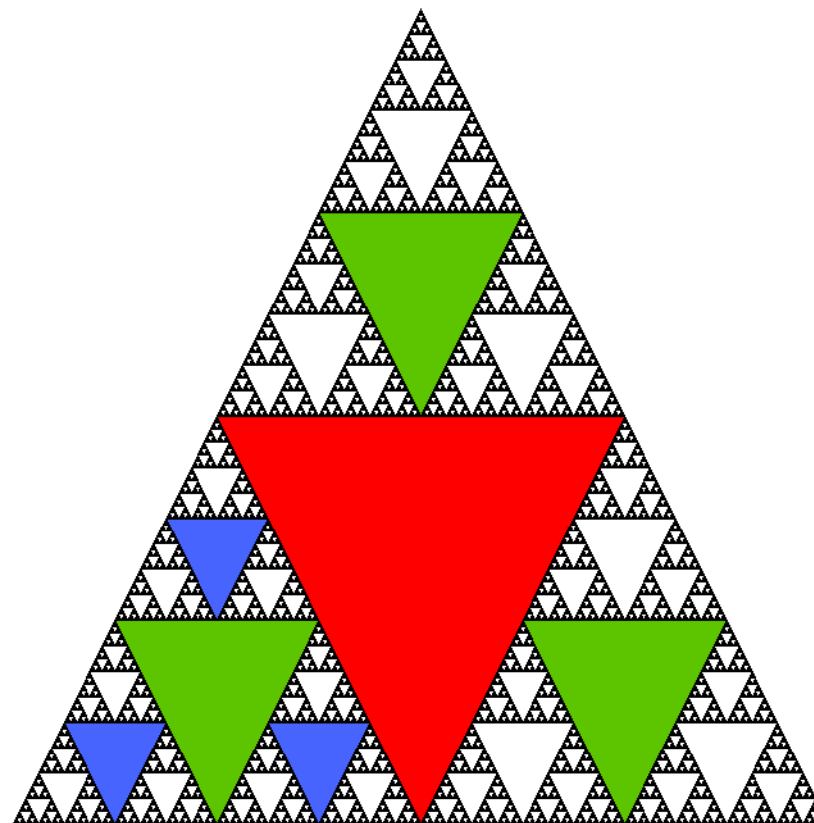
Obsah původního trojúhelníka – S_0

Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$

$$S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} S_0$$



Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

Obsah původního trojúhelníka – S_0

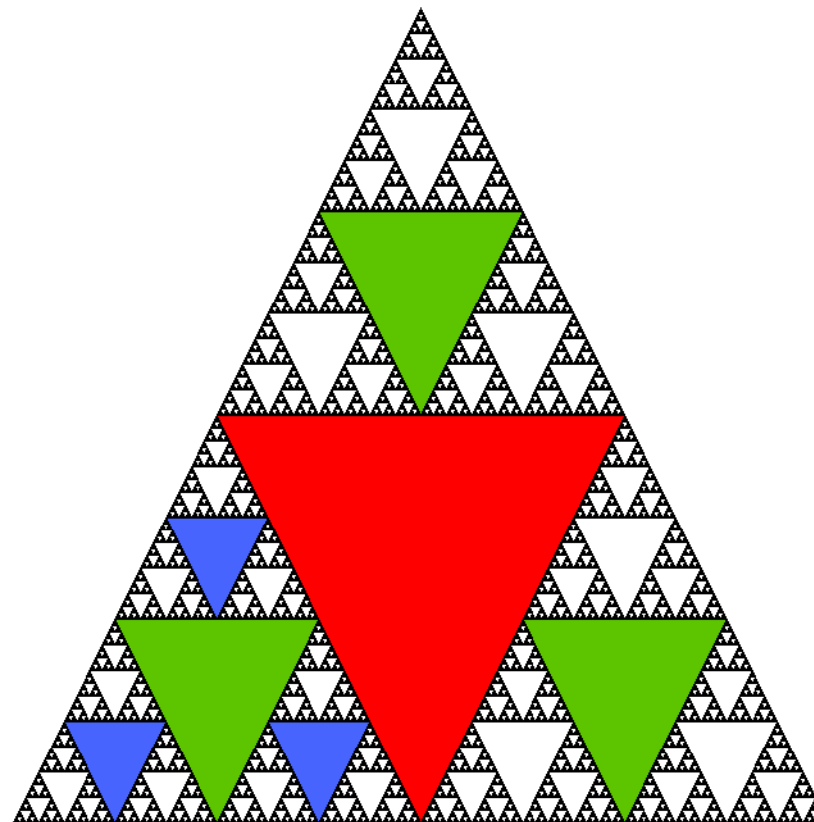
Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$

$$S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} S_0$$

$$S_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} S_0$$



Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

Obsah původního trojúhelníka – S_0

Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

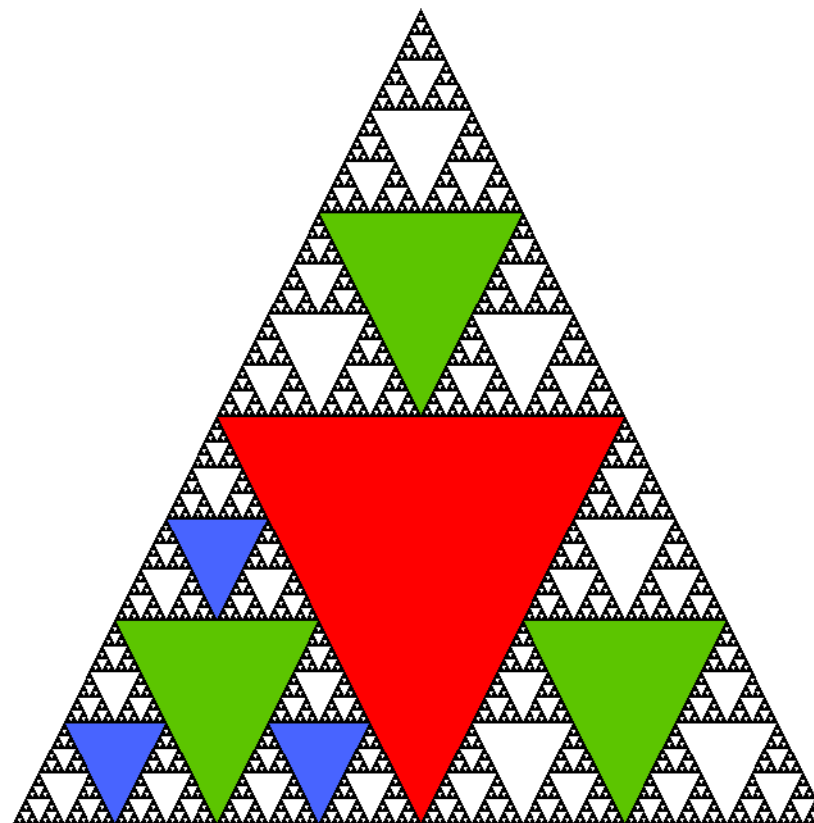
$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$

$$S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} S_0$$

.....

$$S_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} S_0$$

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0; \quad q = \frac{3}{4}; \quad S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4} S_0}{1-\frac{3}{4}} = S_0$$



Je to plocha? Pokud ano, pak má nenulový a konečný obsah.

Obsah původního trojúhelníka – S_0

Obsah vyjmutých trojúhelníků:

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

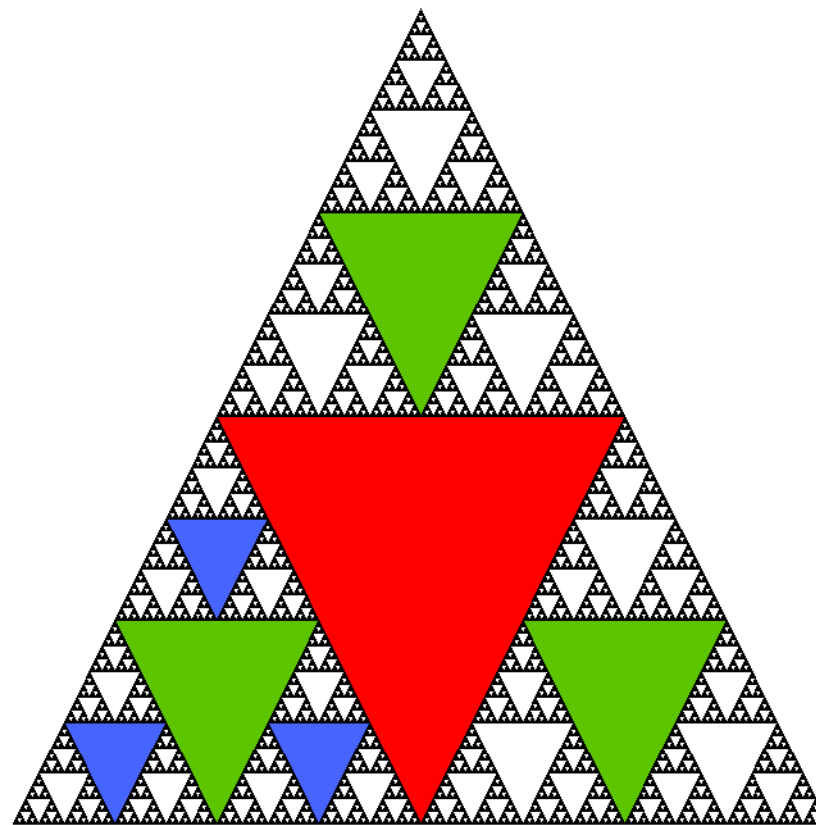
$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$

$$S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} S_0$$

.....

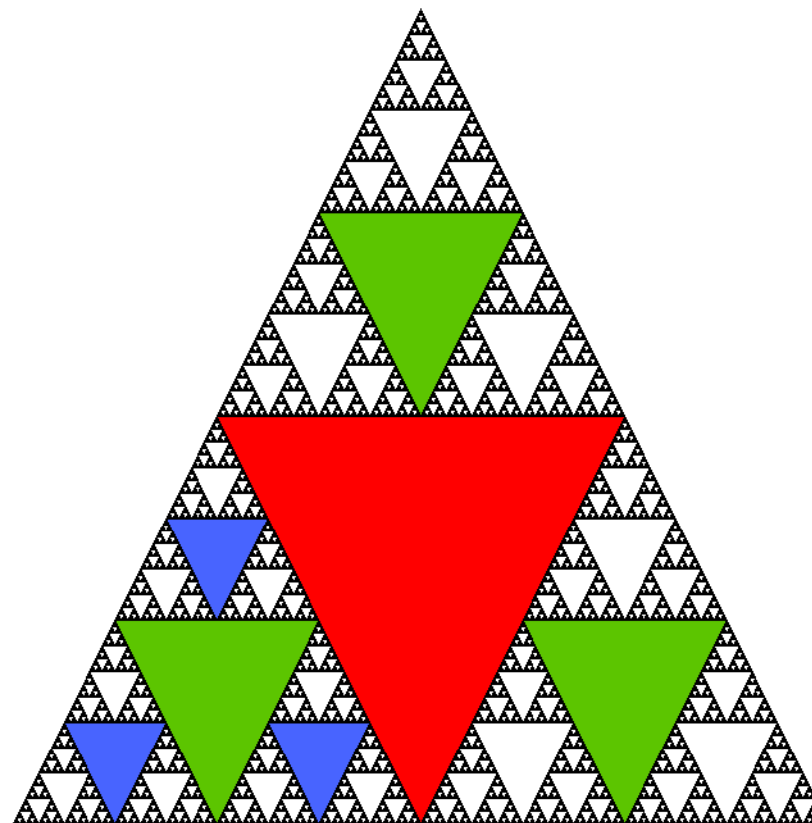
$$S_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} S_0$$

$$S_1 = \frac{1}{4} S_0; \quad q = \frac{3}{4}; \quad S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4} S_0}{1 - \frac{3}{4}} = S_0$$



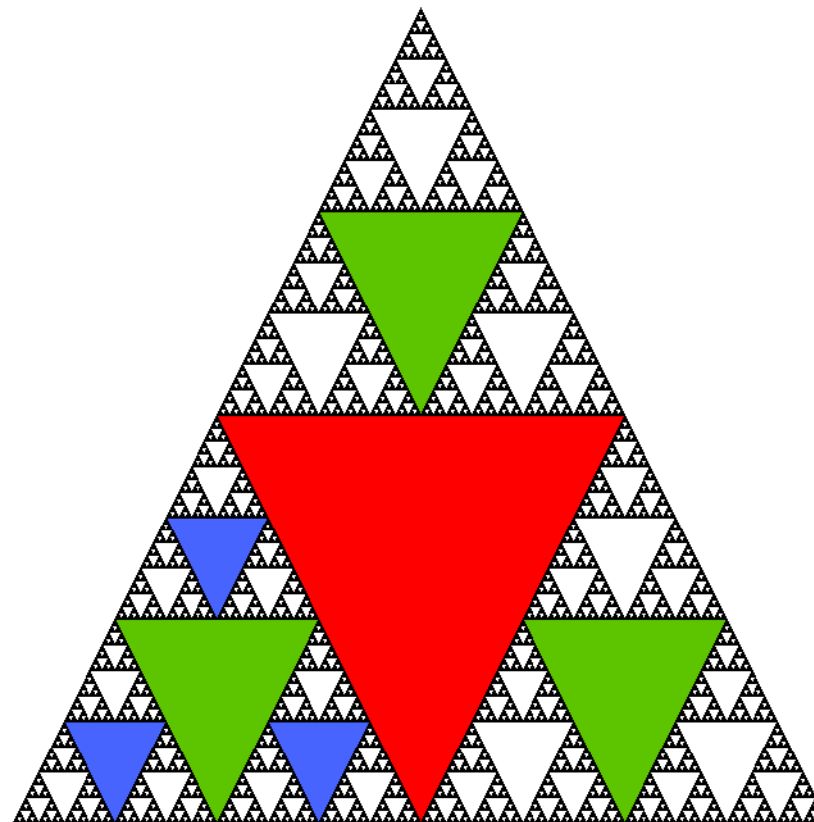
Sierpiňského Δ má nulový obsah

*Je to tedy křivka? Pokud ano, pak má
nenulovou a konečnou délku.*



Je to tedy křivka? Pokud ano, pak má nenulovou a konečnou délku.

Obvod původního trojúhelníka – d_0



Je to tedy křivka? Pokud ano, pak má nenulovou a konečnou délku.

Obvod původního trojúhelníka – d_0

Obvod vyjmutých trojúhelníků:

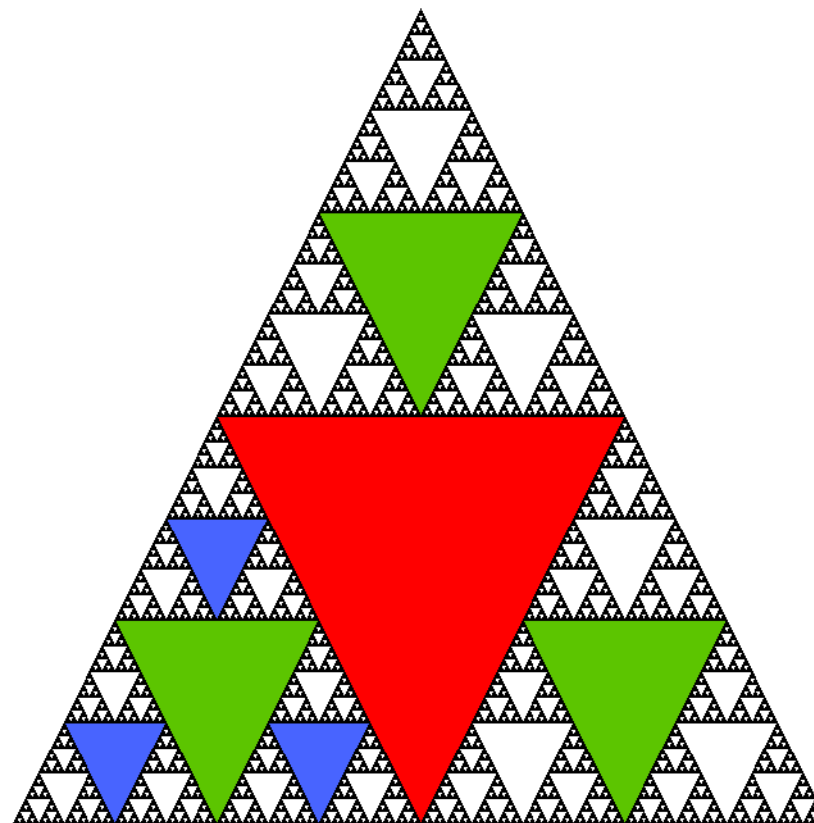
$$d_1 = \frac{1}{2} d_0$$

$$d_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} d_1 = 3 \cdot \frac{1}{2^2} d_0$$

$$d_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} d_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{2^3} d_0$$

$$d_n = \frac{3^{n-1}}{2^n} d_0$$

$$d_1 = \frac{1}{2} d_0; \quad q = \frac{3}{2}$$



Je to tedy křivka? Pokud ano, pak má nenulovou a konečnou délku.

Obvod původního trojúhelníka – d_0

Obvod vyjmutých trojúhelníků:

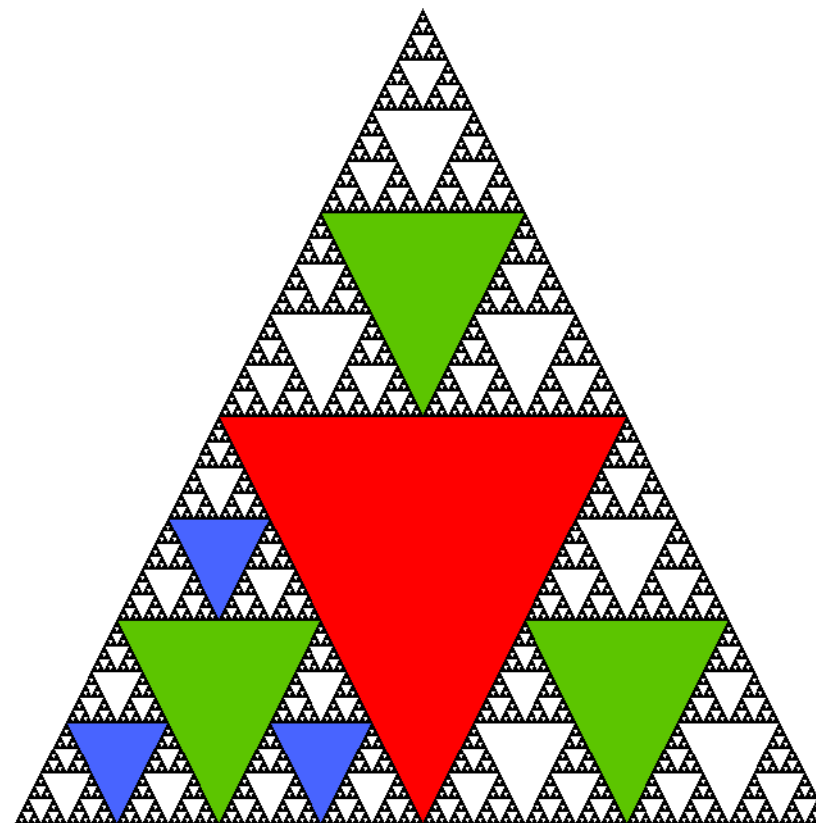
$$d_1 = \frac{1}{2} d_0$$

$$d_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} d_1 = 3 \cdot \frac{1}{2^2} d_0$$

$$d_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} d_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{2^3} d_0$$

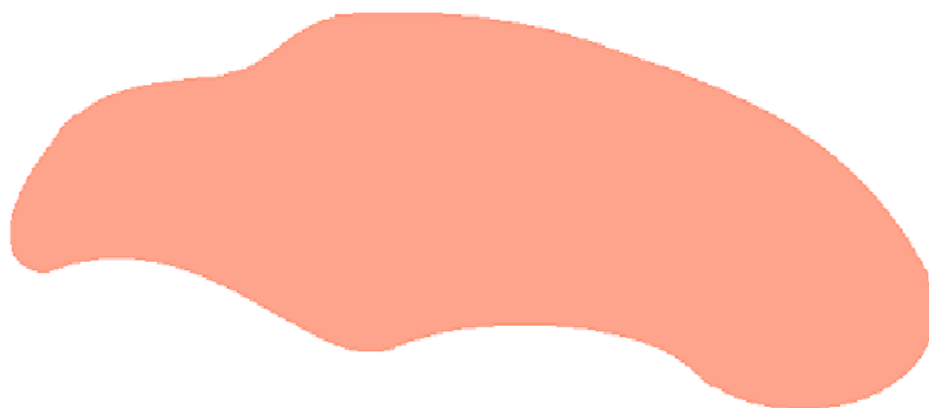
$$d_n = \frac{3^{n-1}}{2^n} d_0$$

$$d_1 = \frac{1}{2} d_0; \quad q = \frac{3}{2}$$

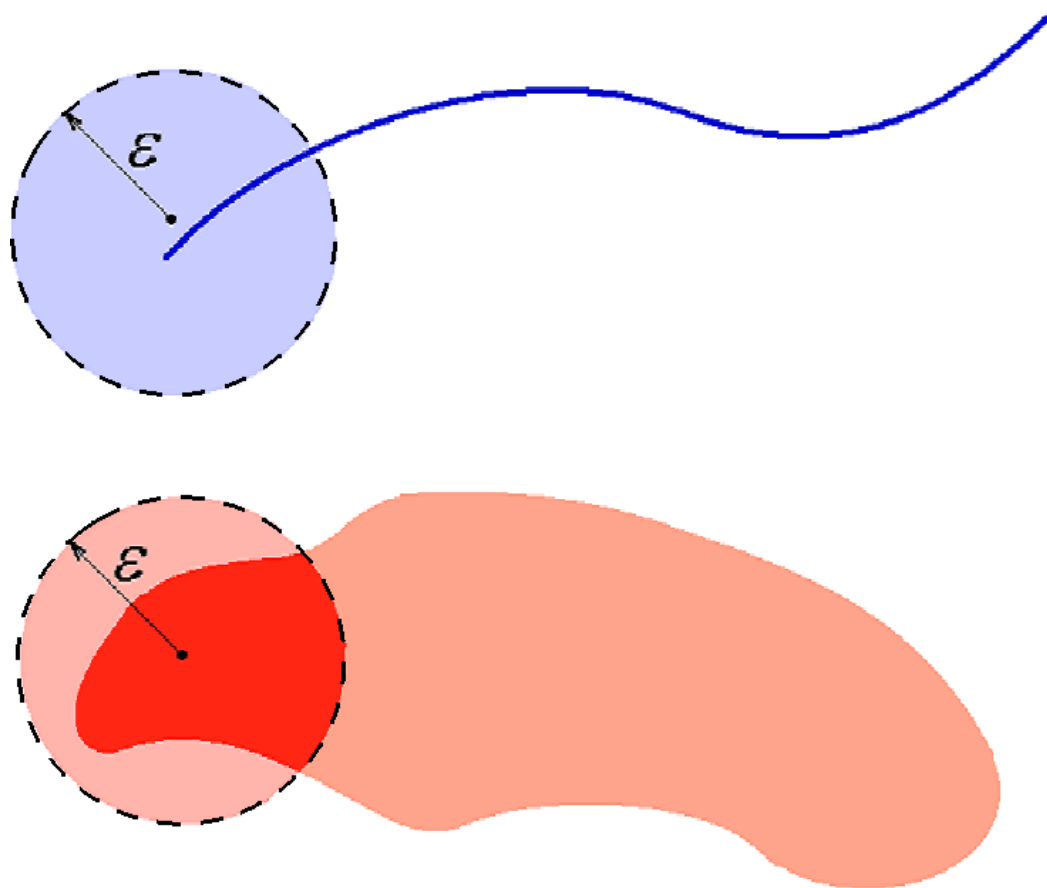


Sierpiňského Δ má nekonečnou délku

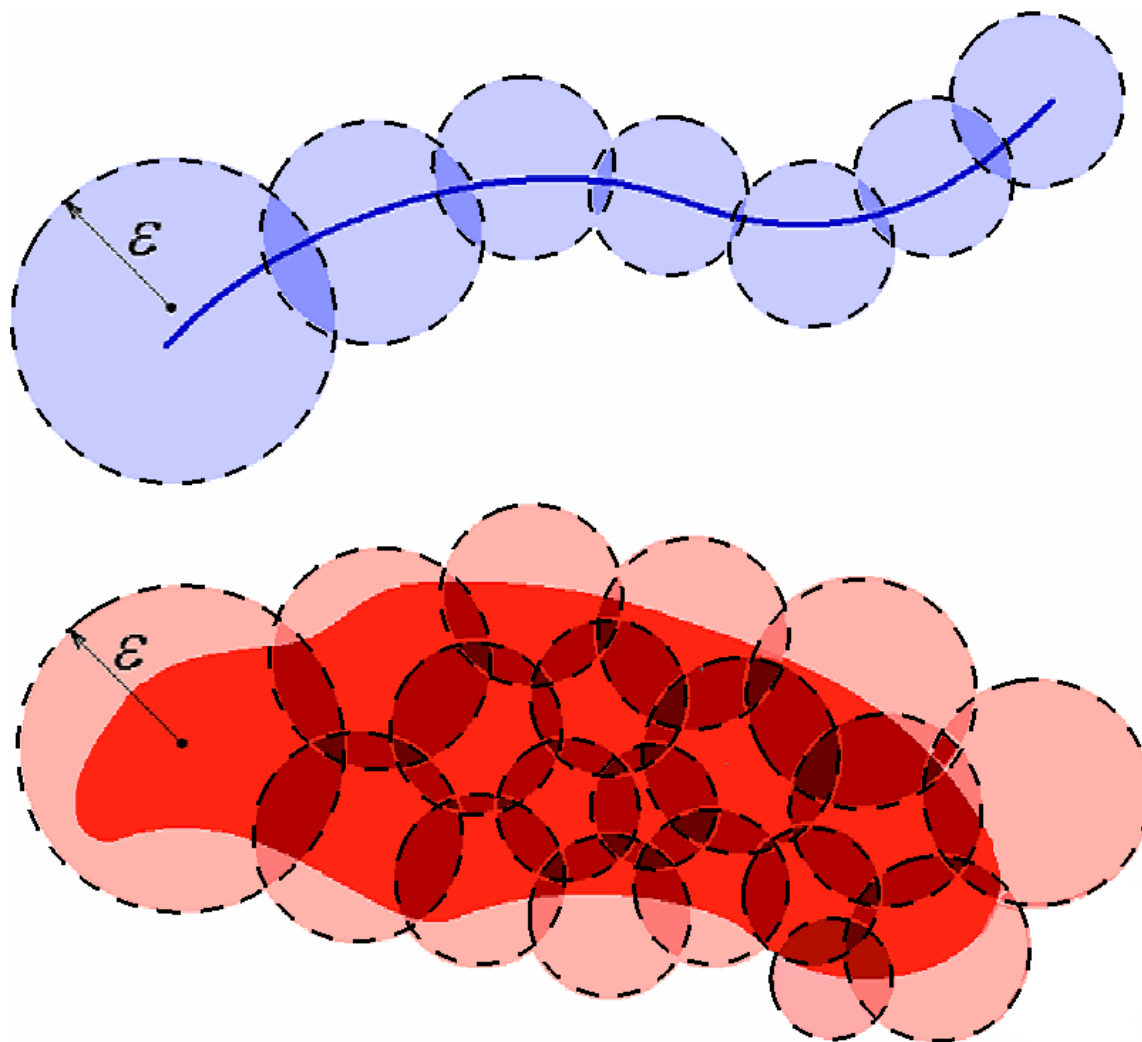
Topologická dimenze



Topologická dimenze

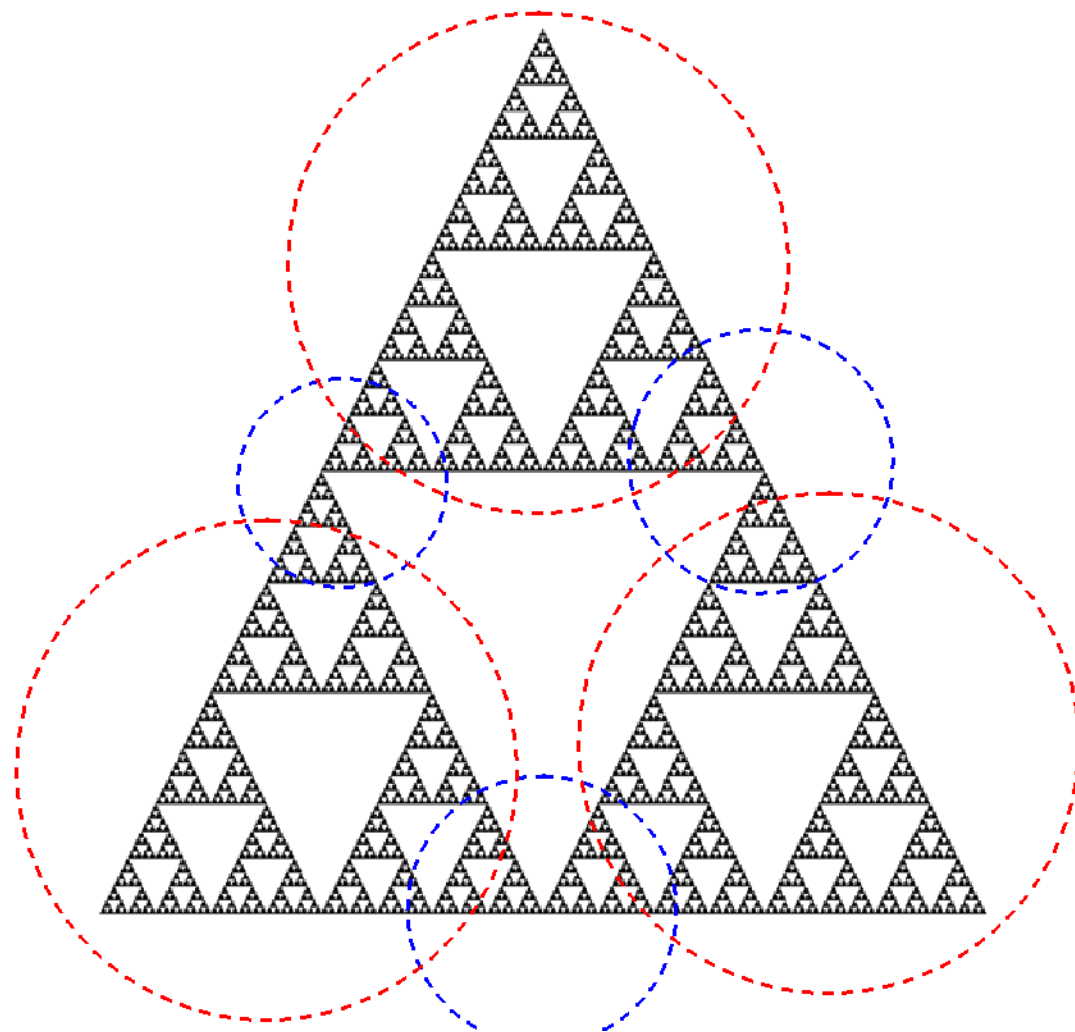


Topologická dimenze



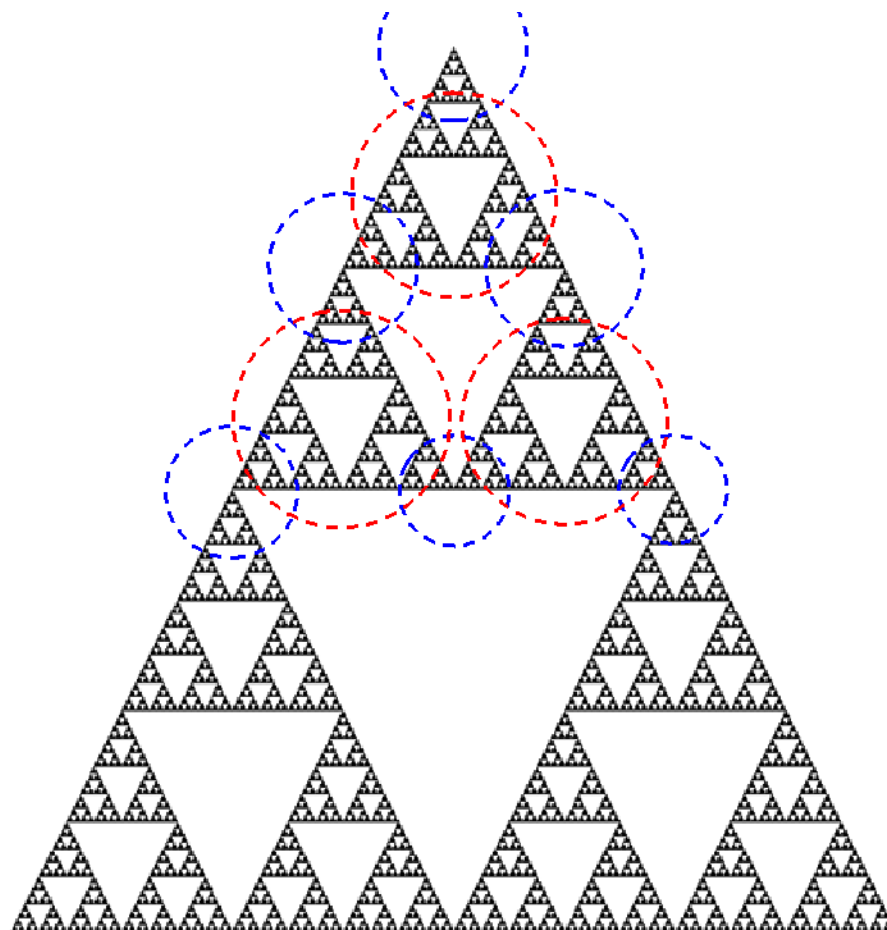
Topologická dimenze

Sierpiňského trojúhelník



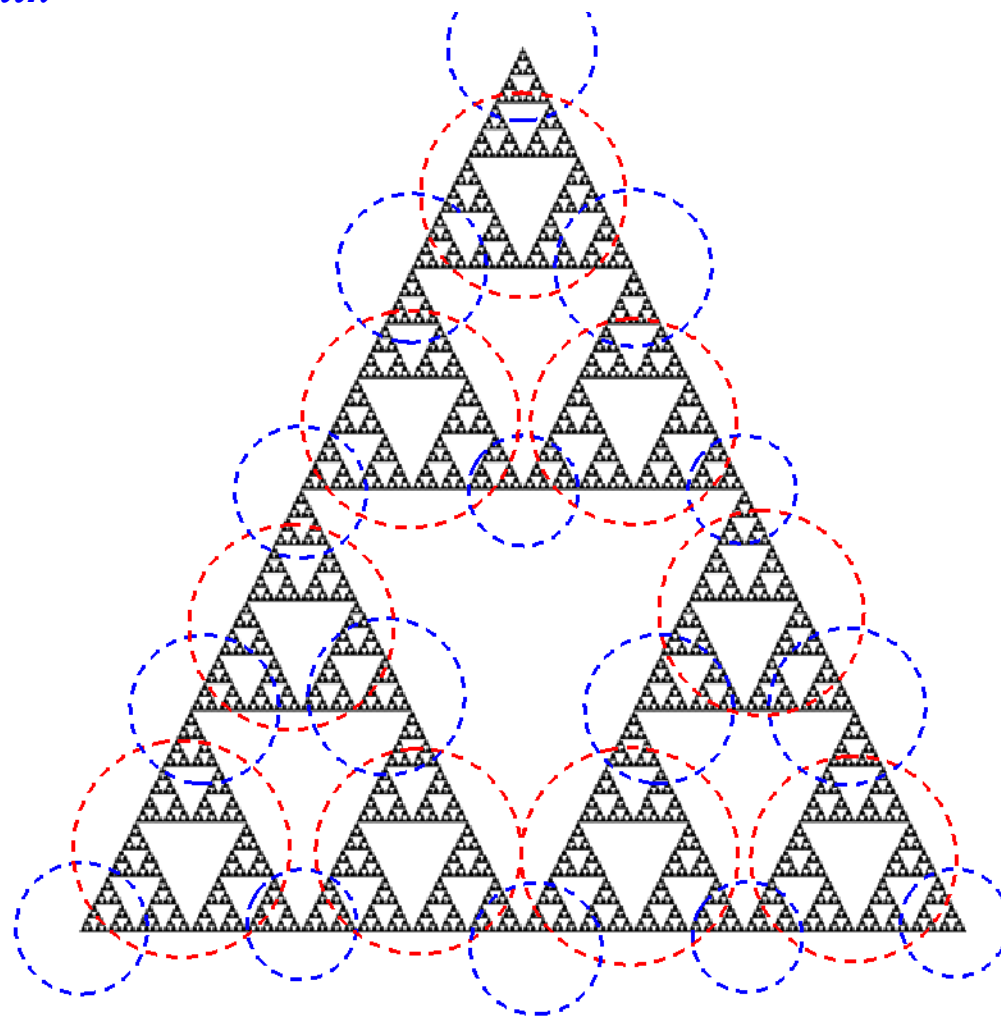
Topologická dimenze

Sierpiňského trojúhelník



Topologická dimenze

Sierpiňského trojúhelník



Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina -

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina

– množina \mathcal{M} , pro kterou existují podobnosti $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_n$ s koeficienty $k_1; k_2; \dots; k_n$; $k_i < 1$ tak, že

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina

– množina \mathcal{M} , pro kterou existují podobnosti $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_n$ s koeficienty $k_1; k_2; \dots; k_n$; $k_i < 1$ tak, že

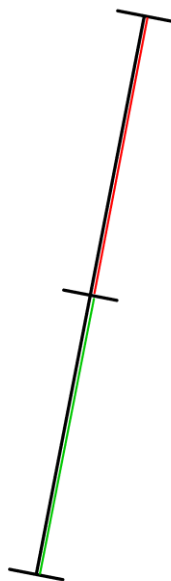
$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(\mathcal{M})$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina

– množina \mathcal{M} , pro kterou existují podobnosti $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_n$ s koeficienty $k_1; k_2; \dots; k_n$; $k_i < 1$ tak, že

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(\mathcal{M})$$

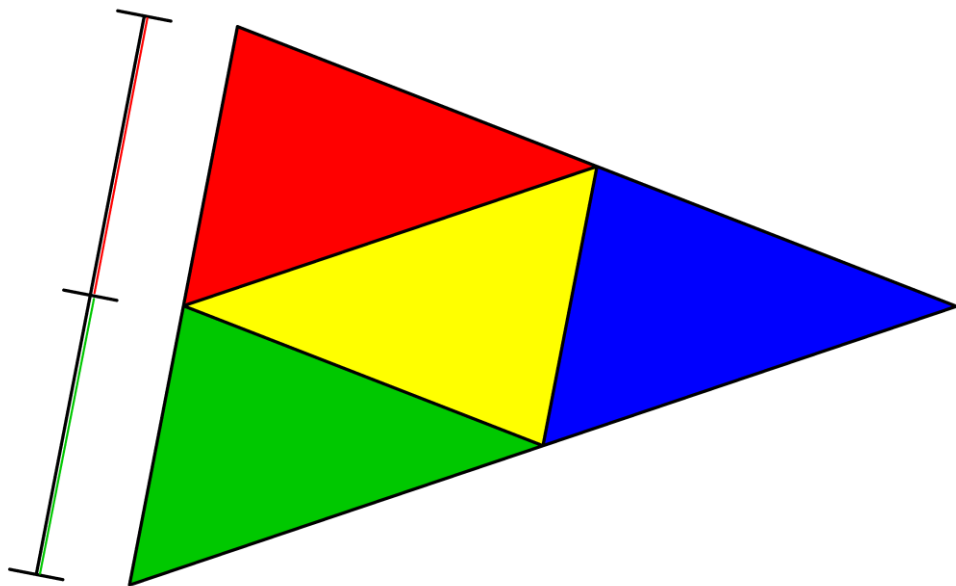


Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina

– množina \mathcal{M} , pro kterou existují podobnosti $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_n$ s koeficienty $k_1; k_2; \dots; k_n$; $k_i < 1$ tak, že

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(\mathcal{M})$$

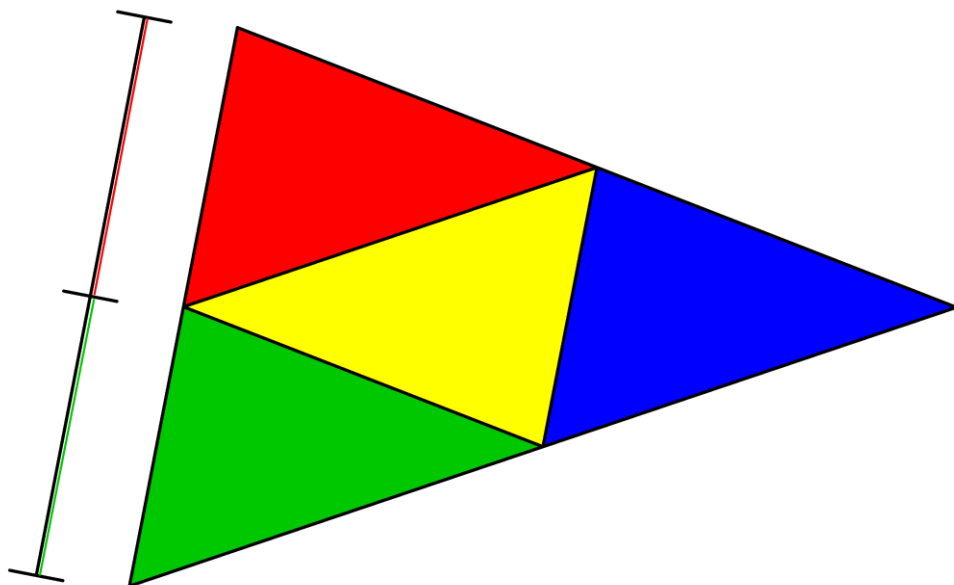


Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty

Soběpodobná množina

– množina \mathcal{M} , pro kterou existují podobnosti $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_n$ s koeficienty $k_1; k_2; \dots; k_n$; $k_i < 1$ tak, že

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(\mathcal{M})$$



Sierpiňského trojúhelník

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

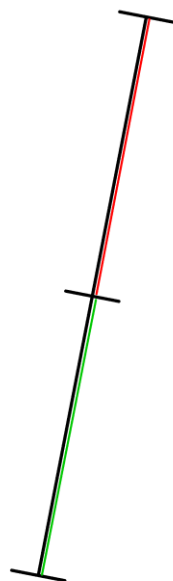
Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

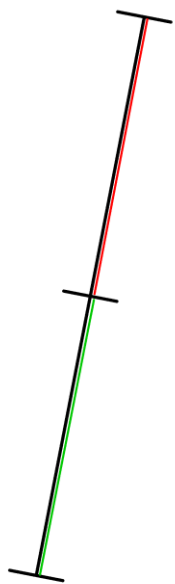


$$D = \frac{\ln 2}{\ln 2}$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

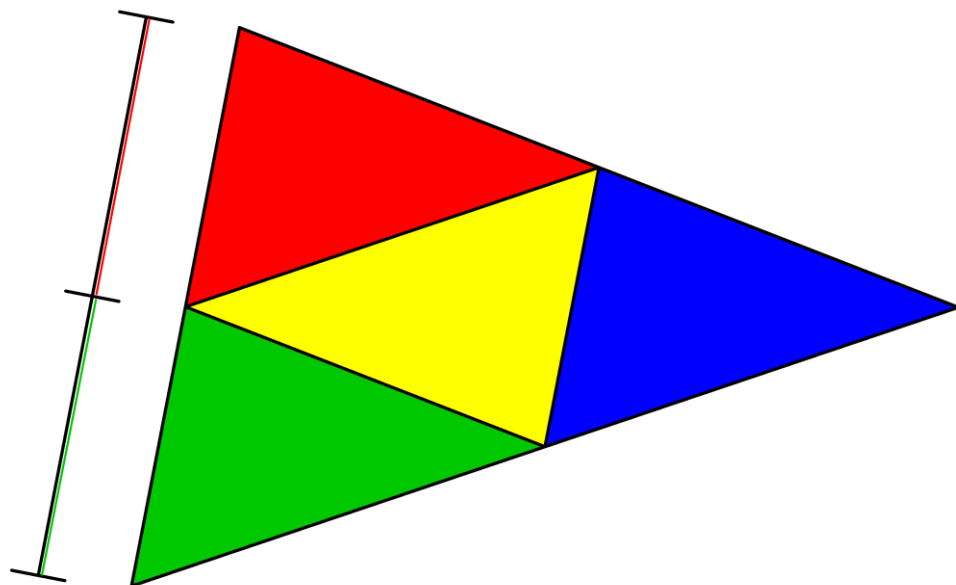


$$D = \frac{\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 4}{\ln 4} = \dots$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

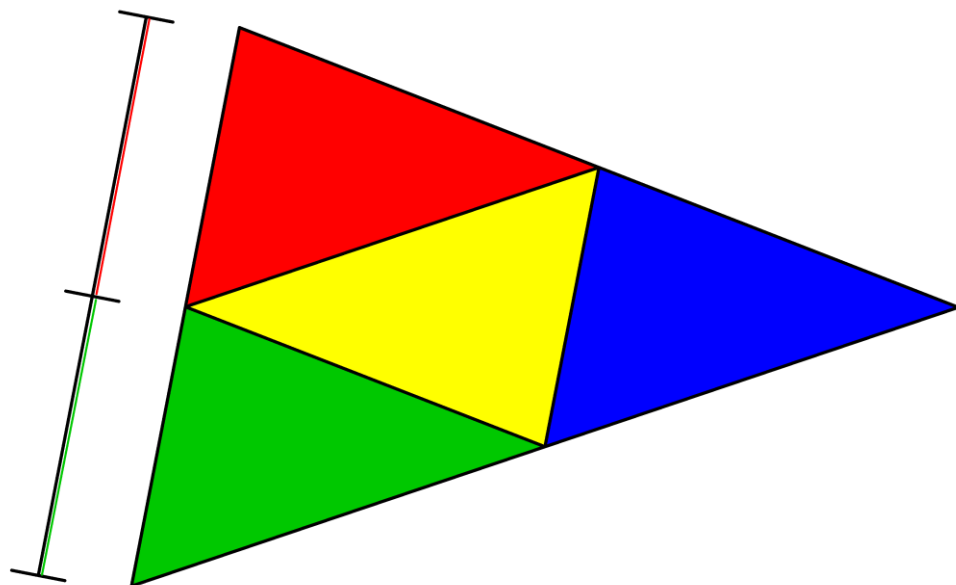


$$D = \frac{\ln 4}{\ln 2}$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

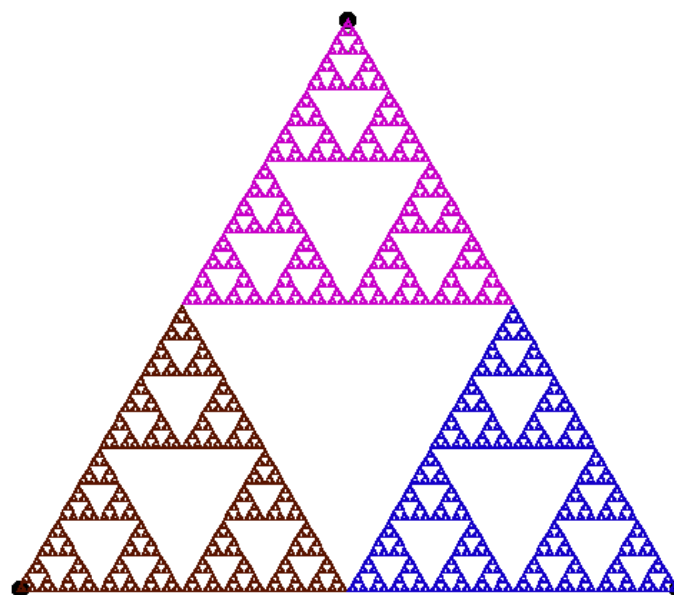
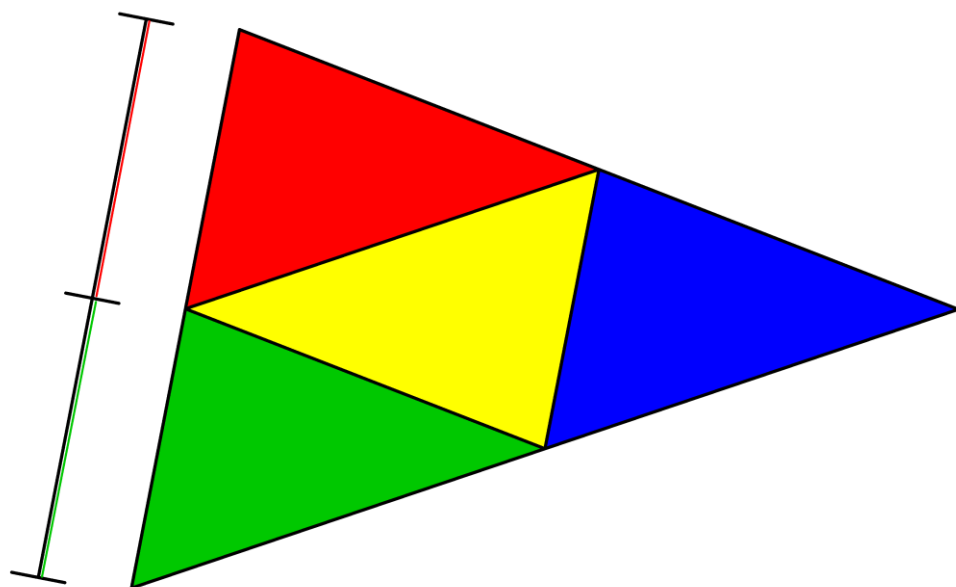


$$D = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 16}{\ln 4} = \dots$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

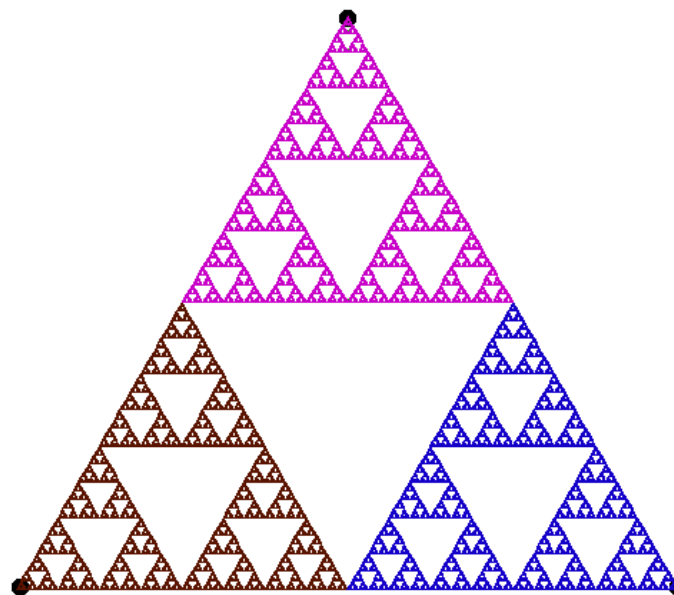
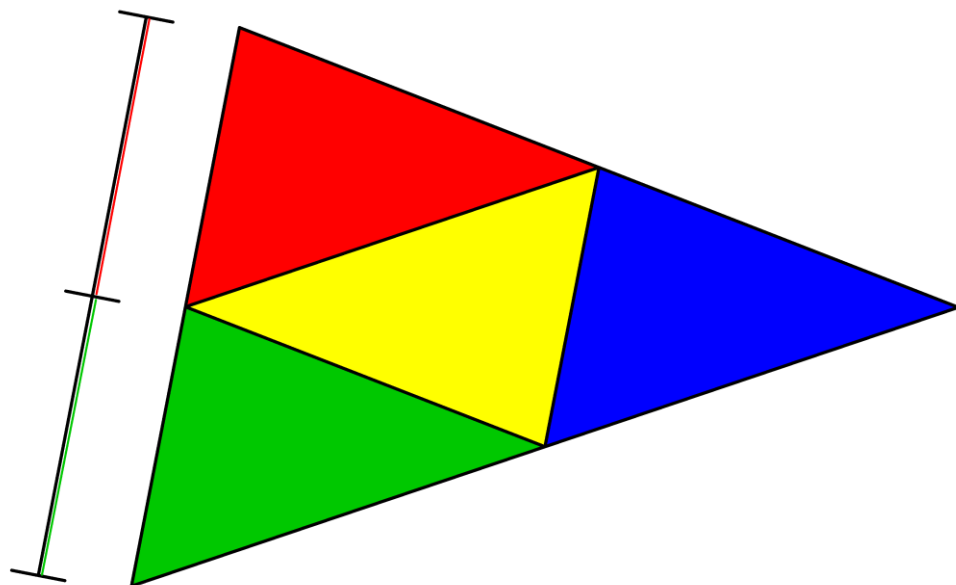


$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

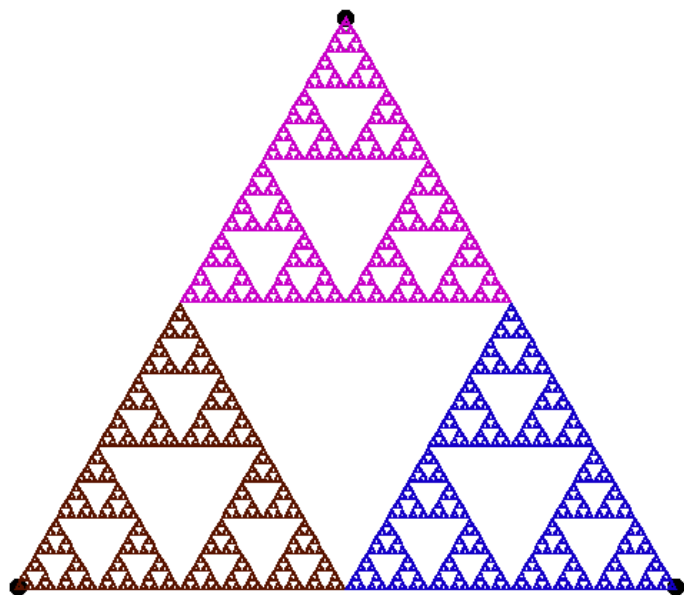


$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 4} = \dots = 1,5849 \dots$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

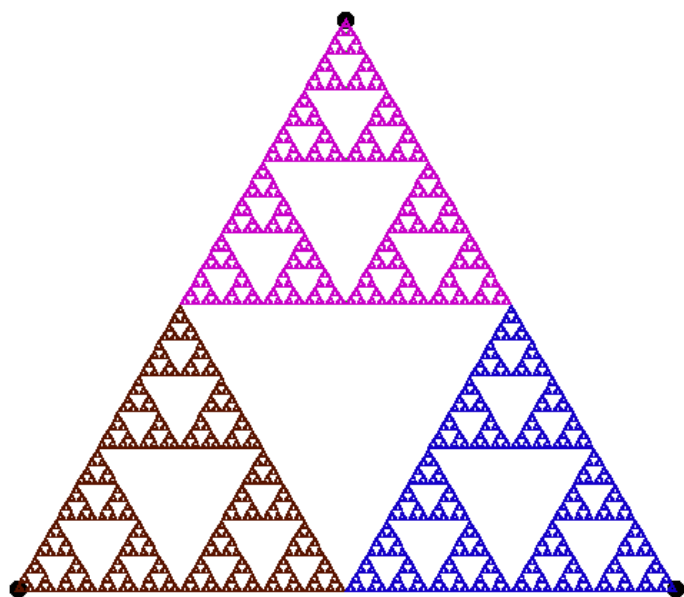


$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 4} = \dots = 1,584\ 9 \dots$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

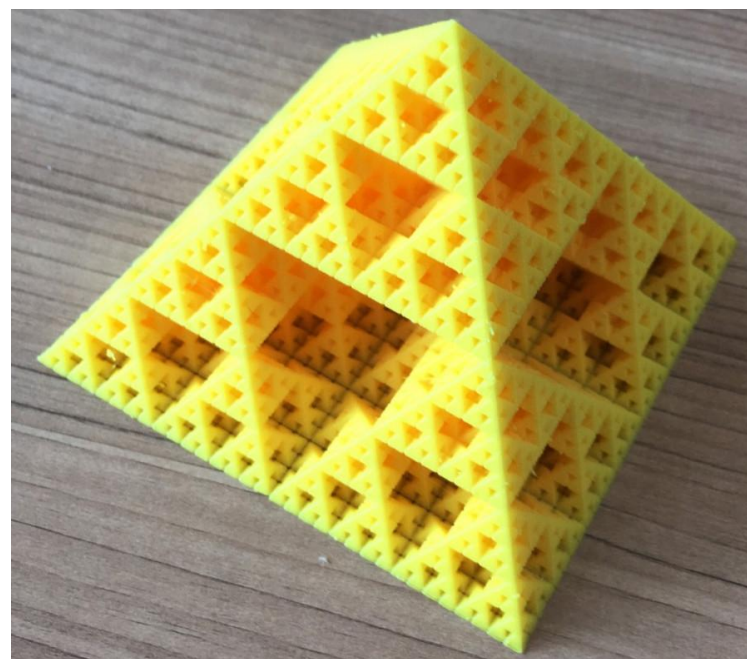
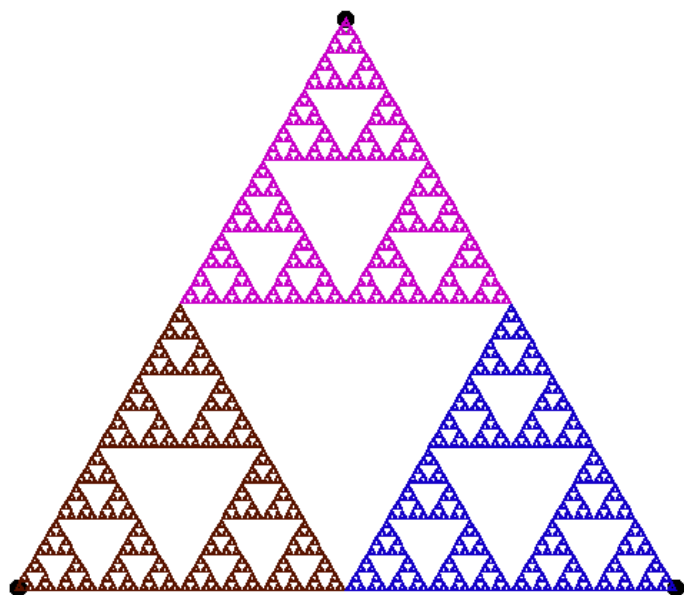


$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 4} = \dots = 1,584\ 9 \dots \Rightarrow 1 < D < 2 \text{ *fraktální křivka*}$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$

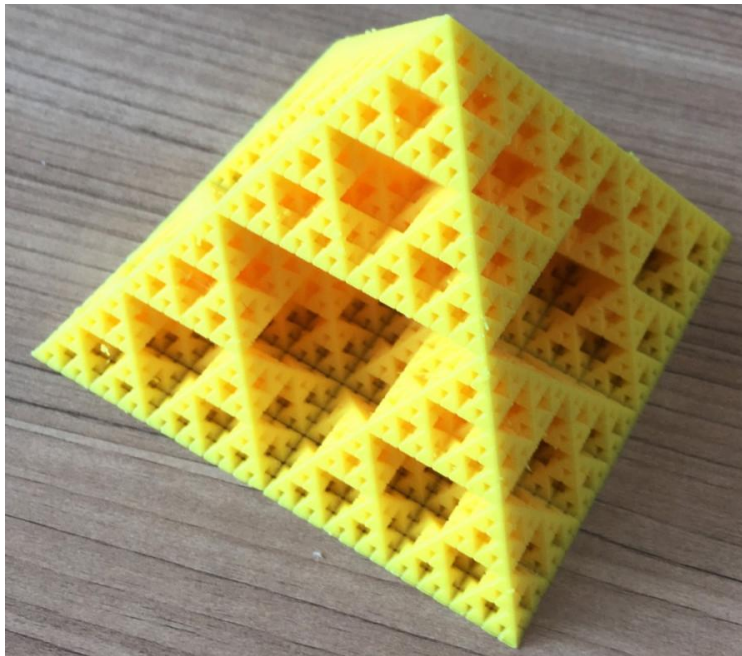


$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,584\ 9 \dots \text{ fraktální křivka} \quad D = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 2,584\ 9 \dots$$

Fraktální dimenze = dimenze, jejíž definice připouští neceločíselné hodnoty.

Soběpodobnostní dimenze v případě, že $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{k}}$$



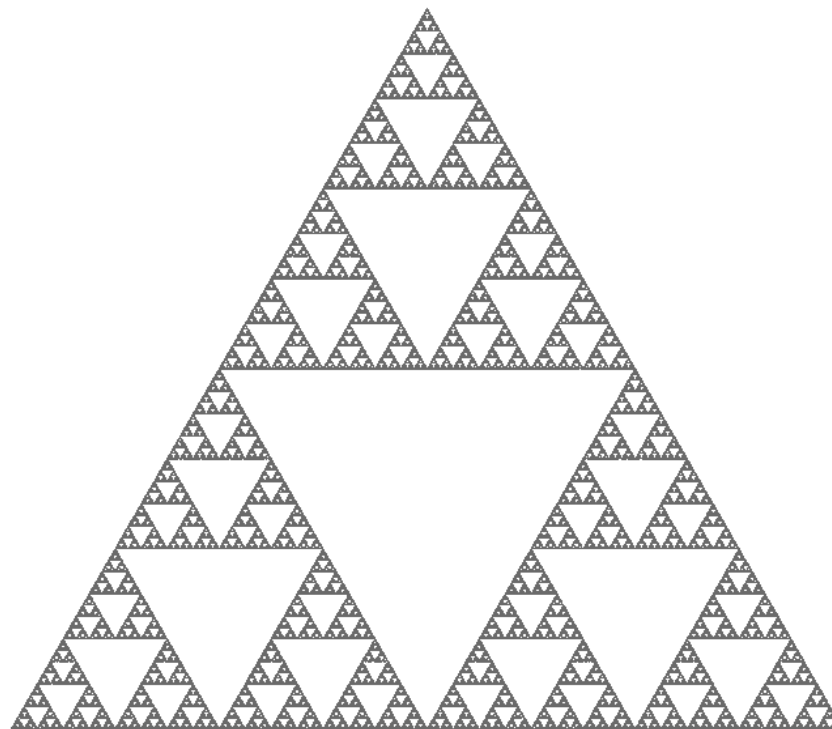
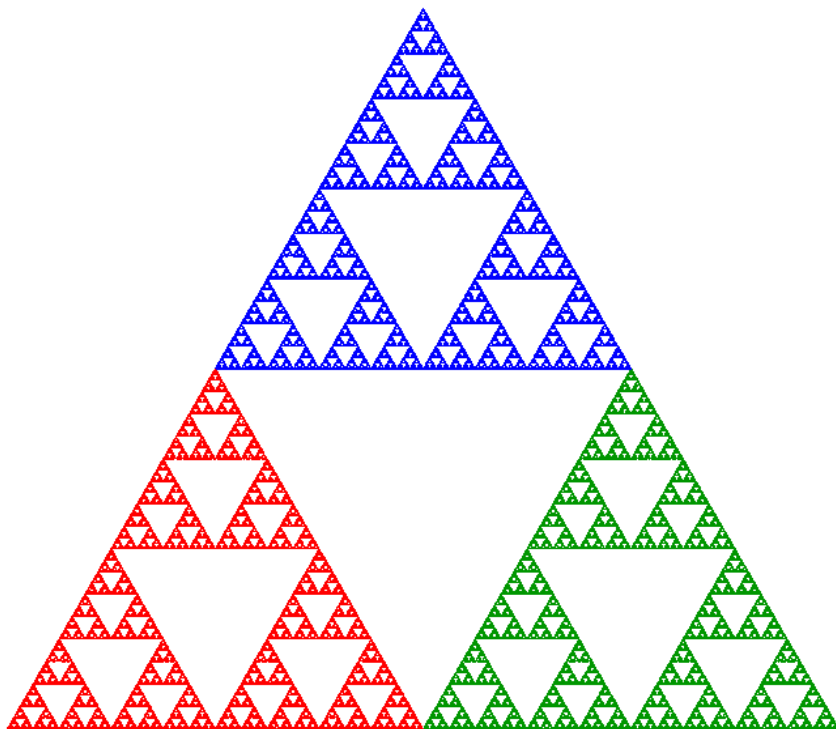
$$d = \infty; S = \infty; V = 0; D = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 2,584\ 9 \dots \quad 2 < D < 3 \quad \textit{fraktální plocha}$$

Něco tady nesedí

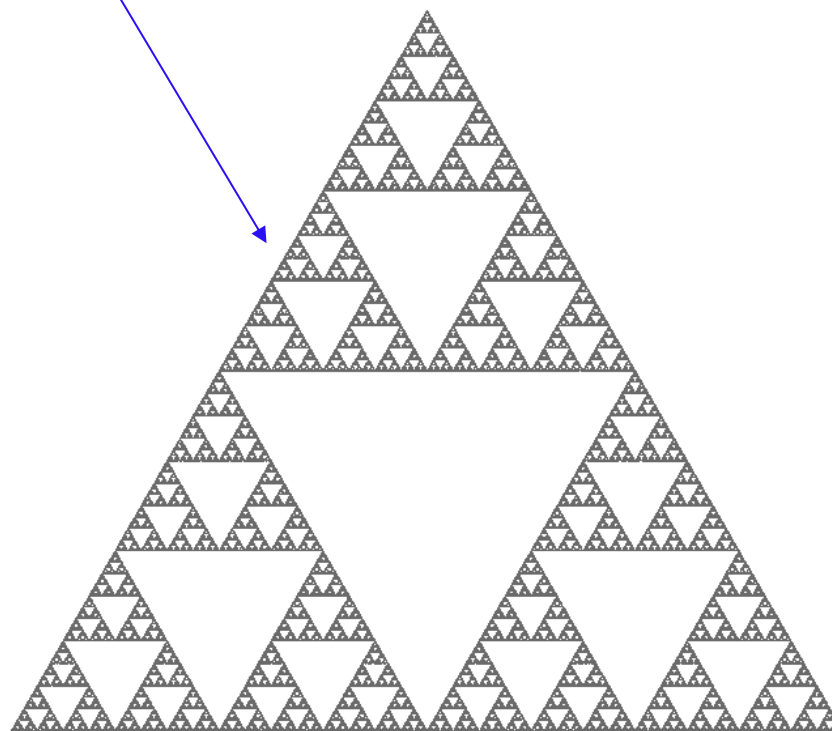
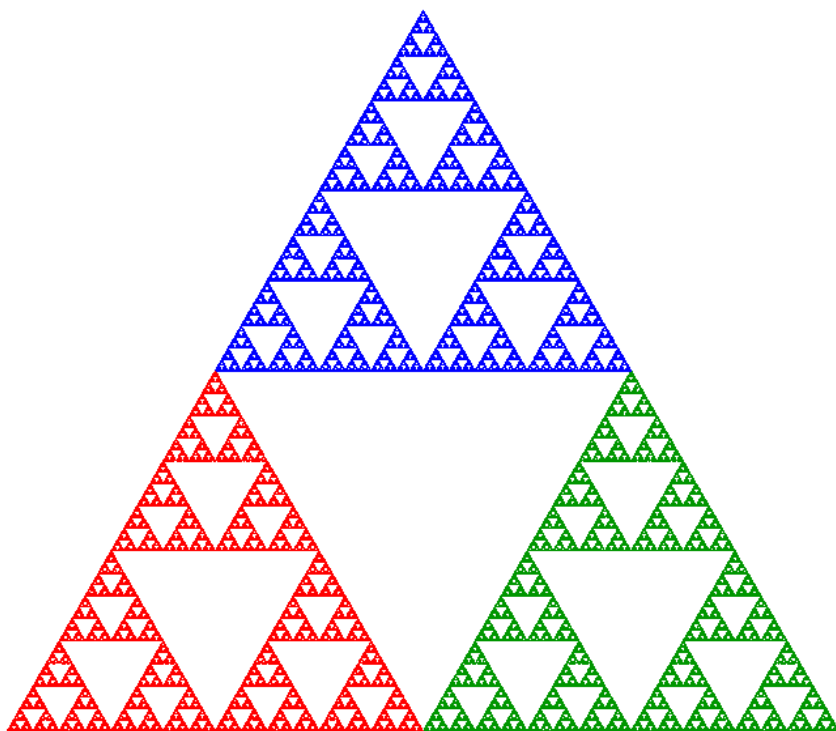
Něco tady nesedí

Sierpiňského trojúhelník

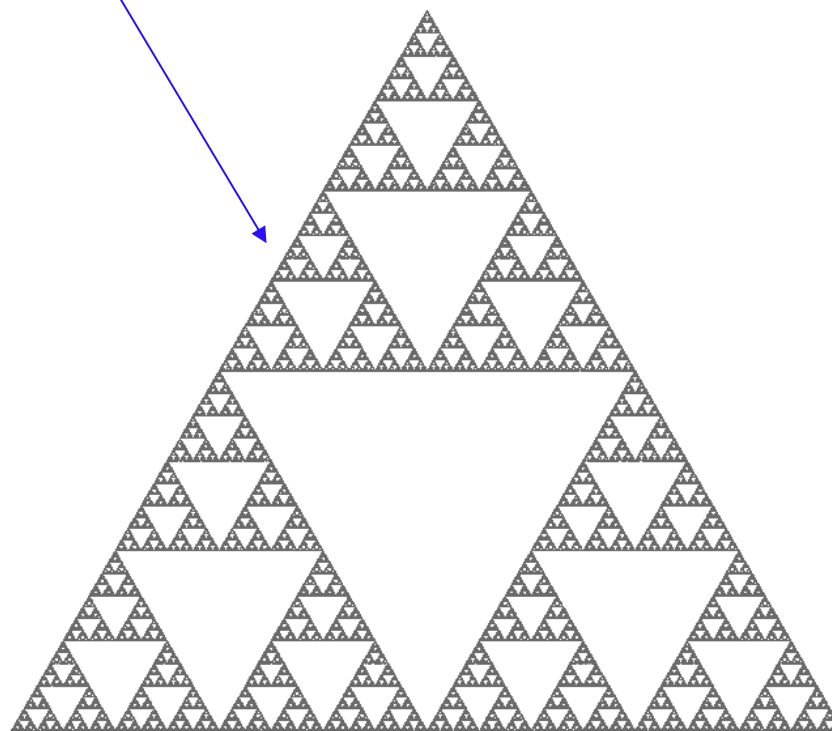
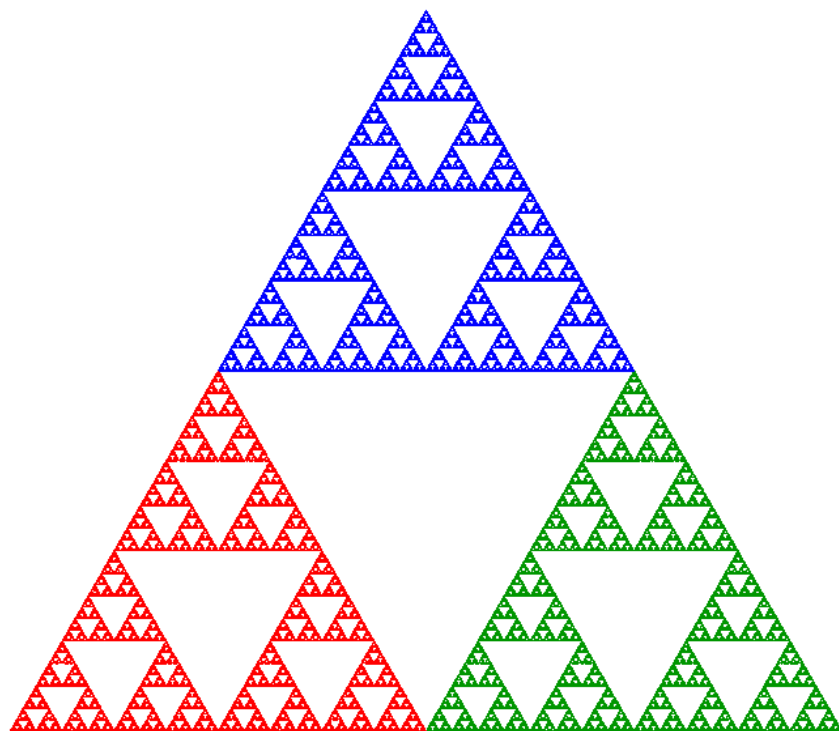
metoda náhodné procházky



Spočetný a současně soběpodobný?

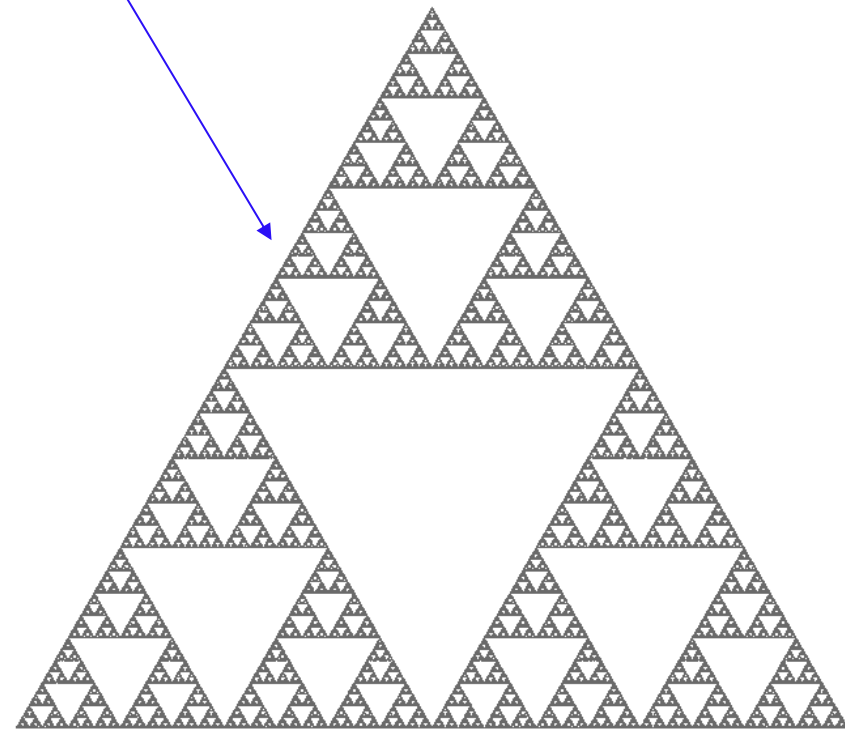
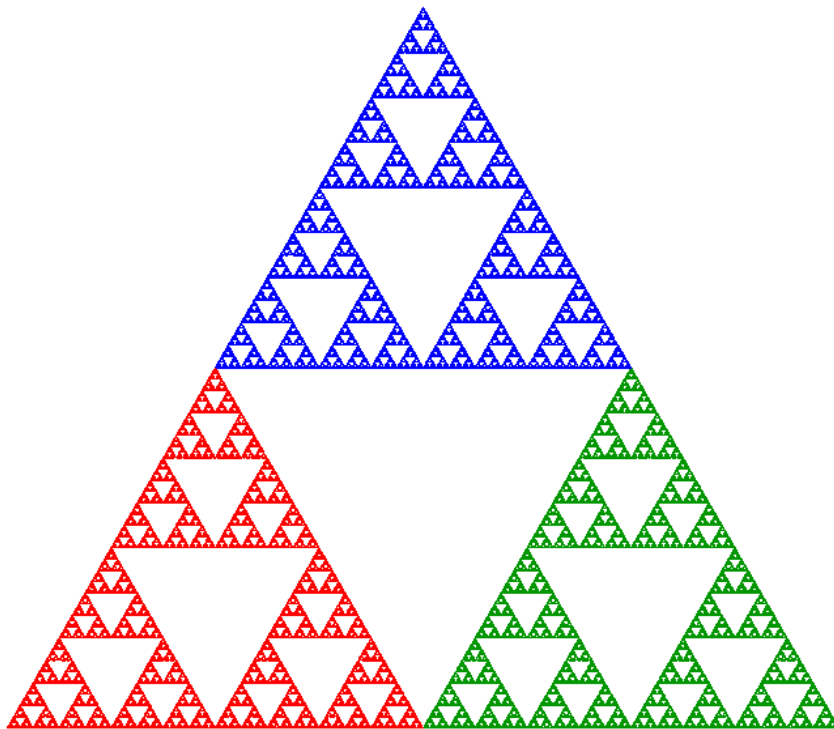


Spočetný a současně soběpodobný?



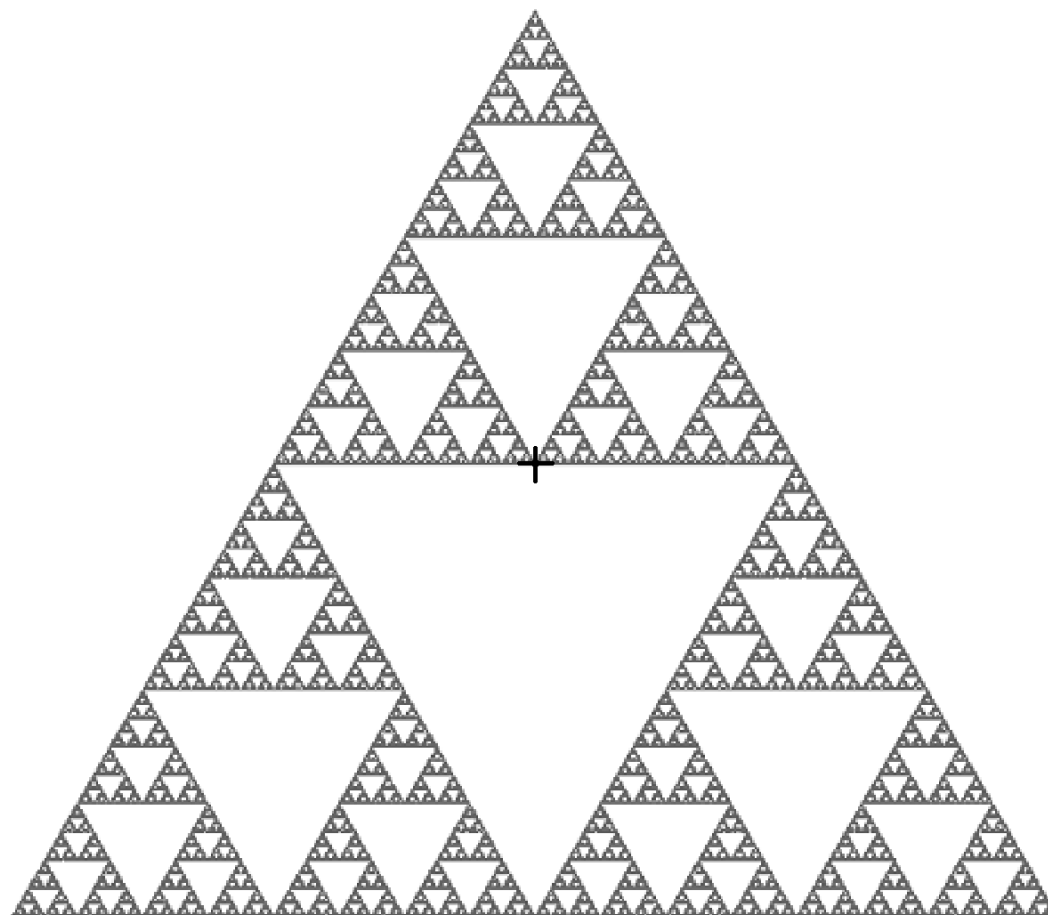
pokud ano $\Rightarrow D = \frac{\ln 3}{\ln 2} > 1$

Spočetný a současně soběpodobný?

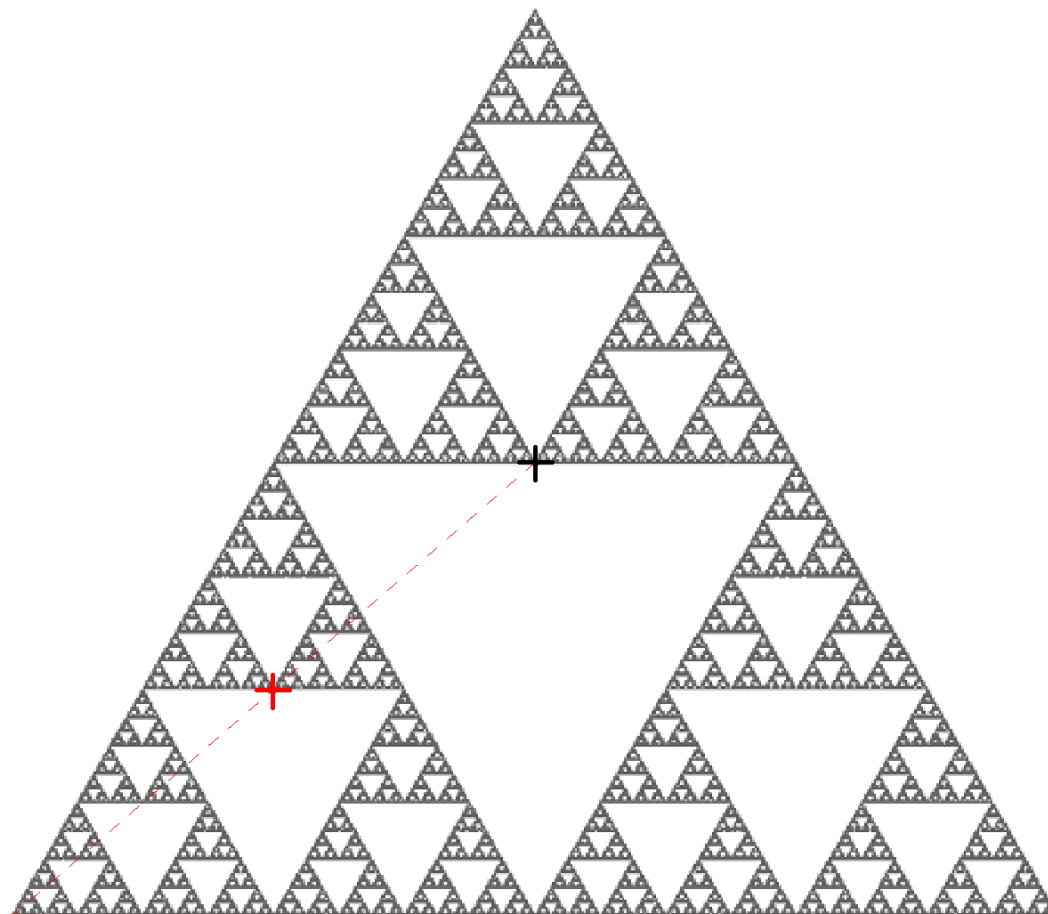


pokud ano $\Rightarrow D = \frac{\ln 3}{\ln 2} > 1 \Rightarrow$ větší než dimenze (nespočetné!!) úsečky

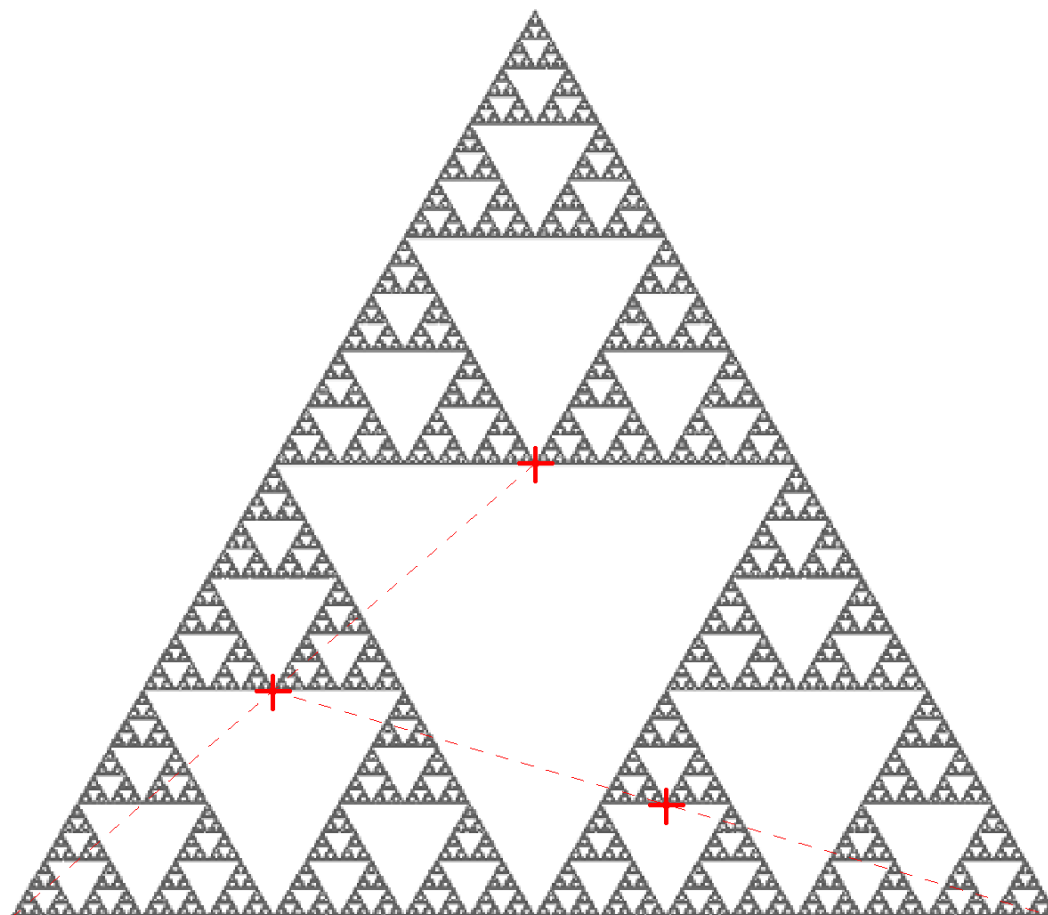
Spočetný a současně soběpodobný?



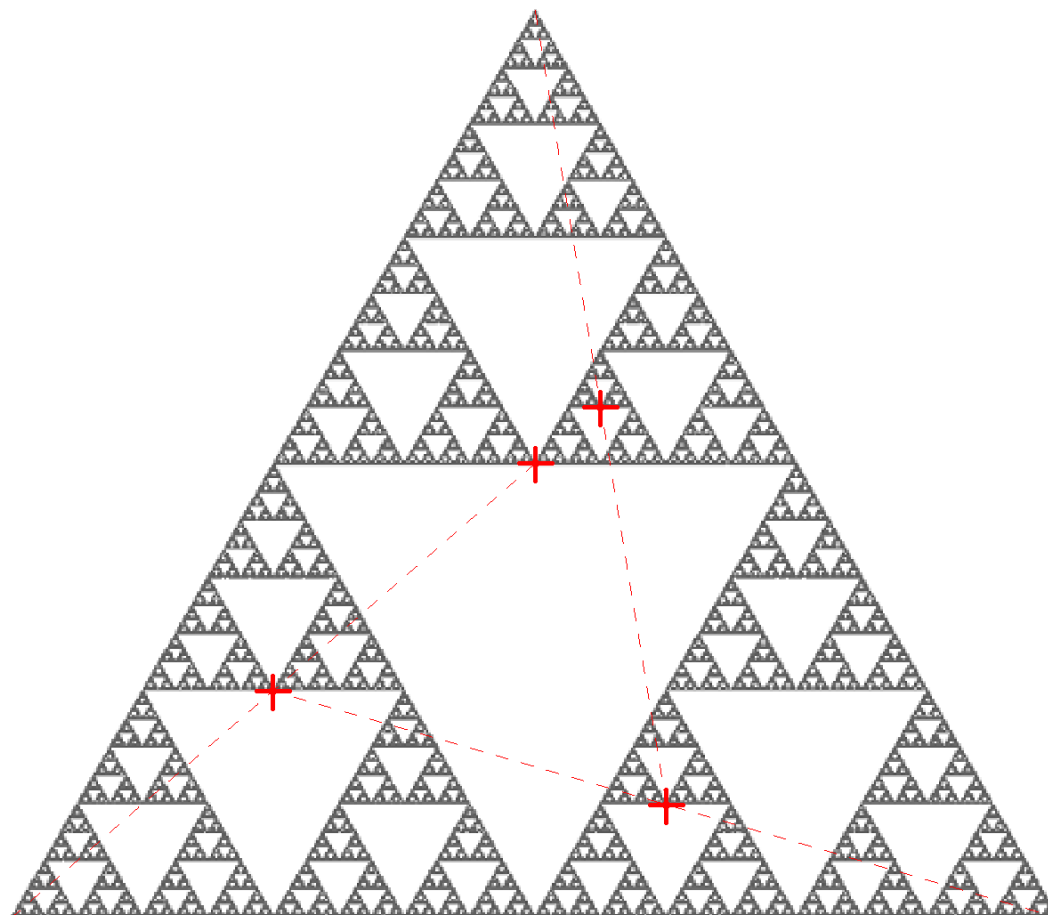
Spočetný a současně soběpodobný?



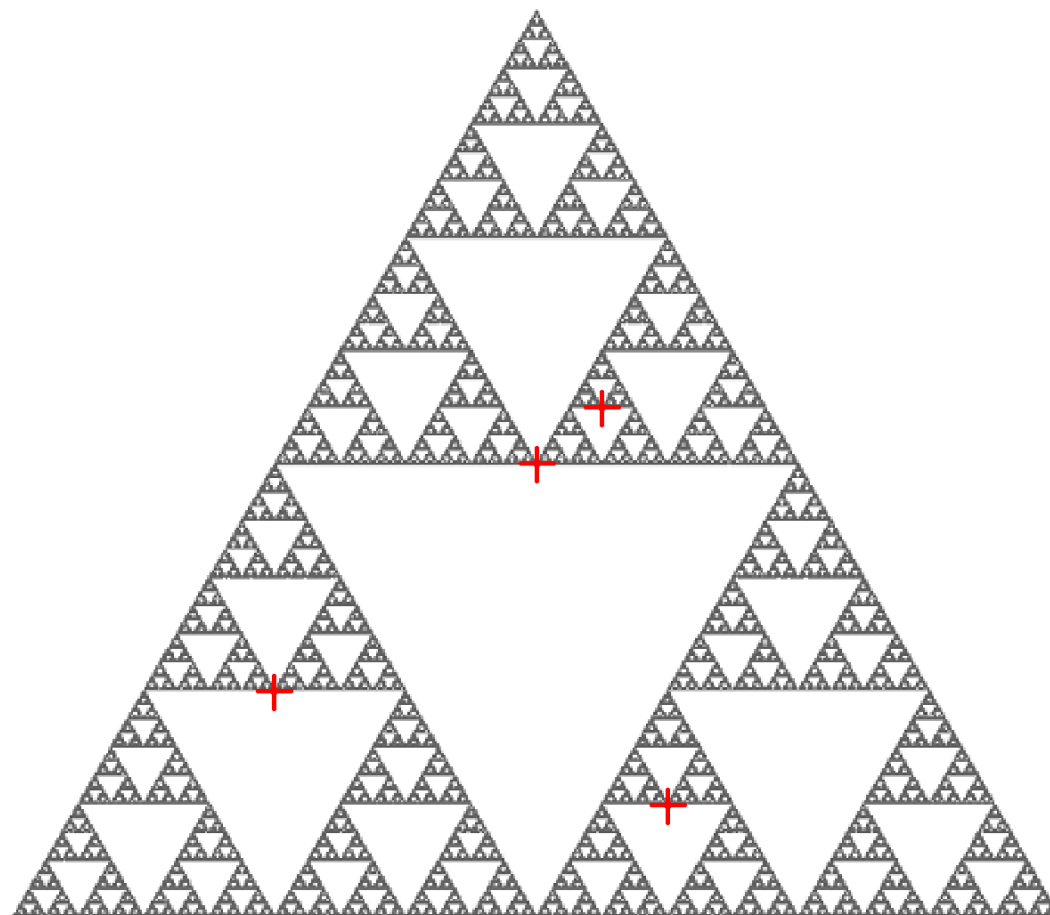
Spočetný a současně soběpodobný?



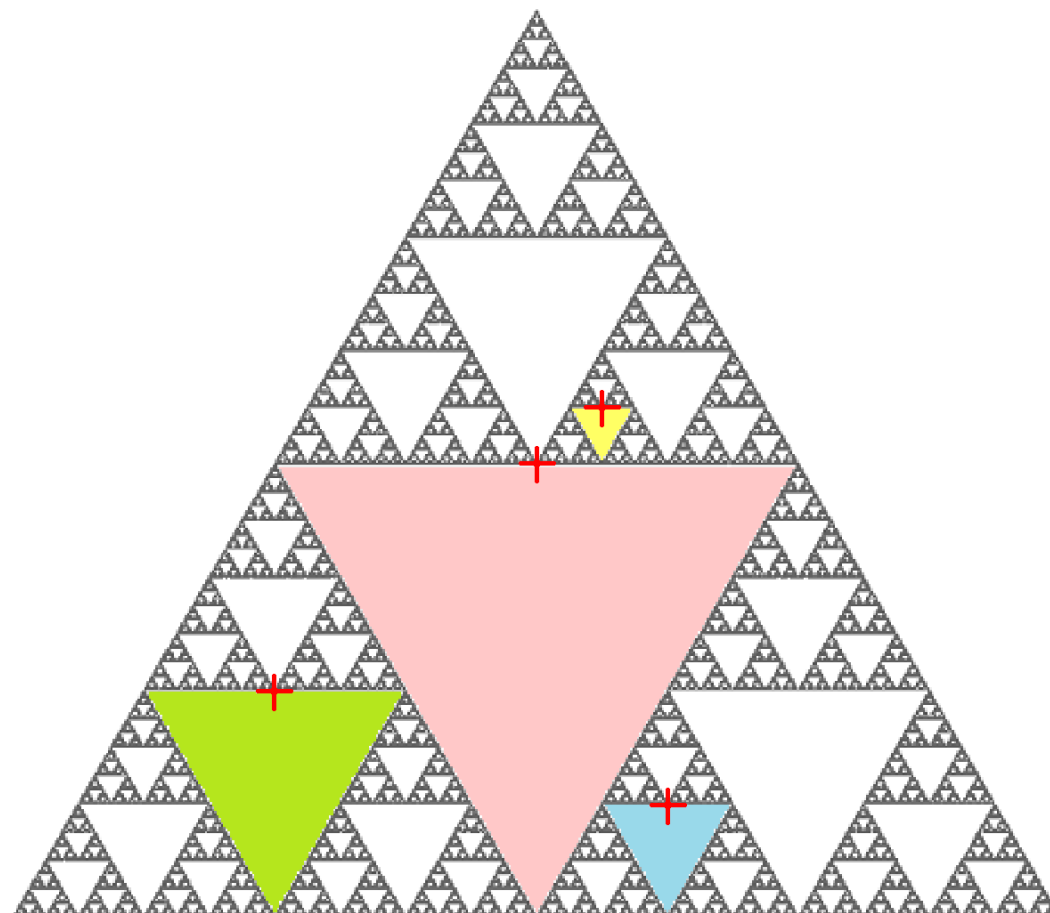
Spočetný a současně soběpodobný?



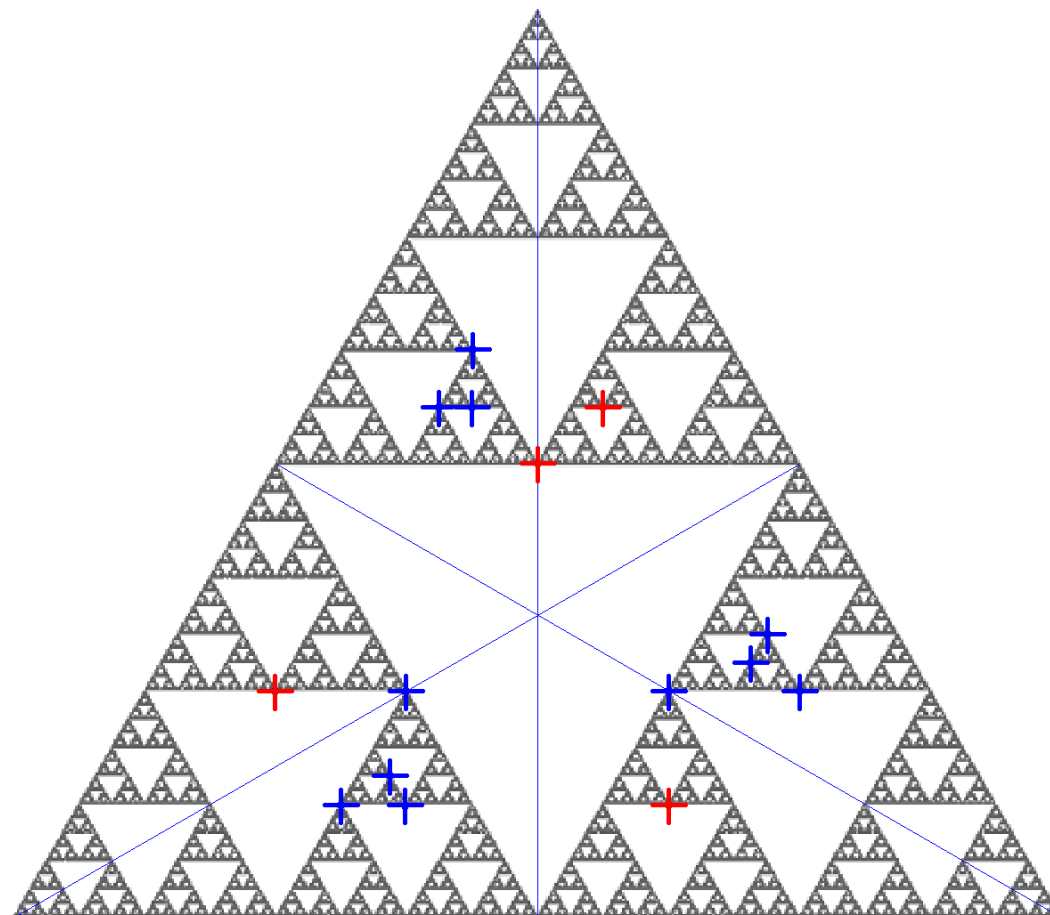
Spočetný a současně soběpodobný?



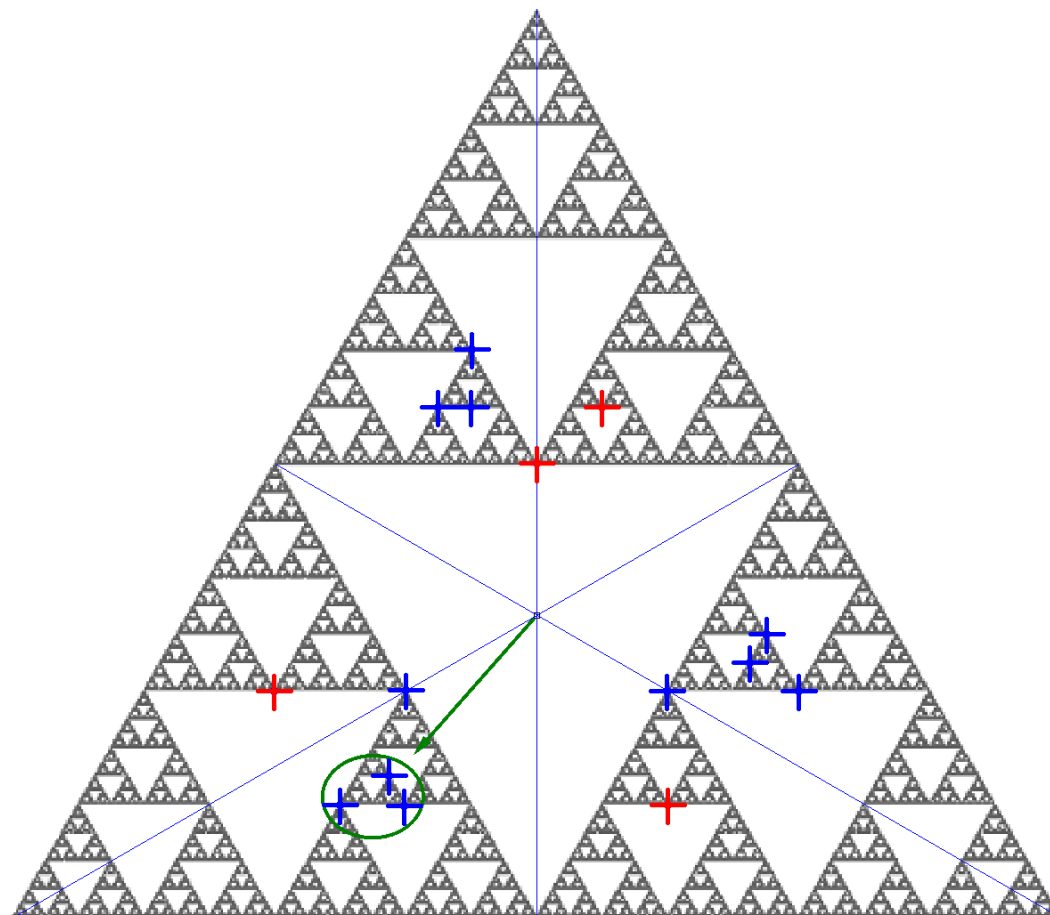
Spočetný a současně soběpodobný?



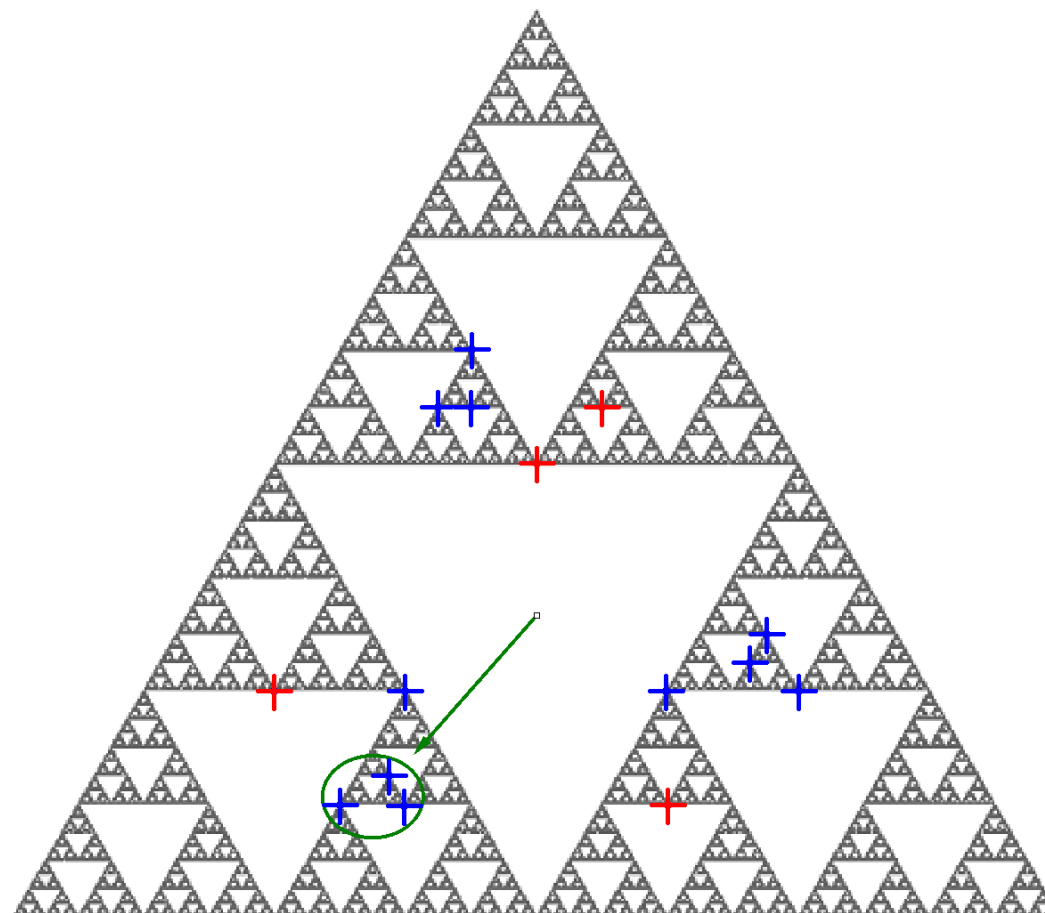
Spočetný a současně soběpodobný?



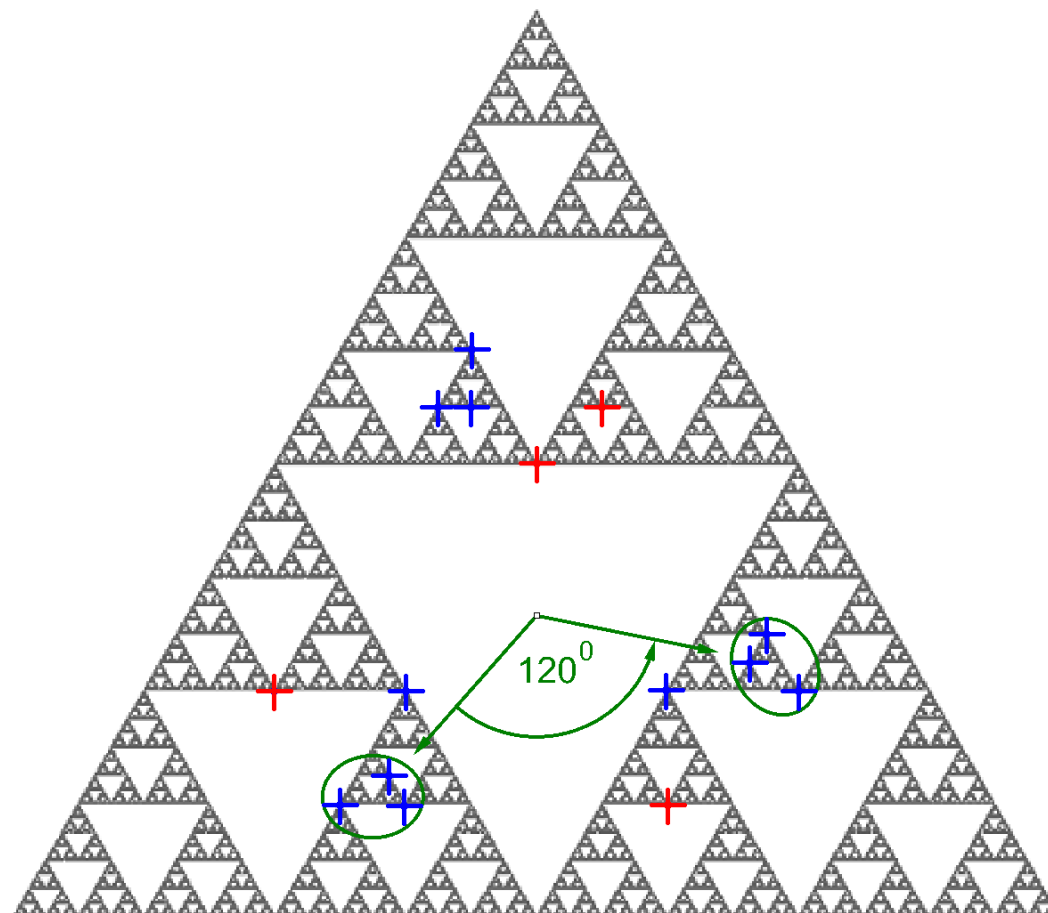
Spočetný a současně soběpodobný?



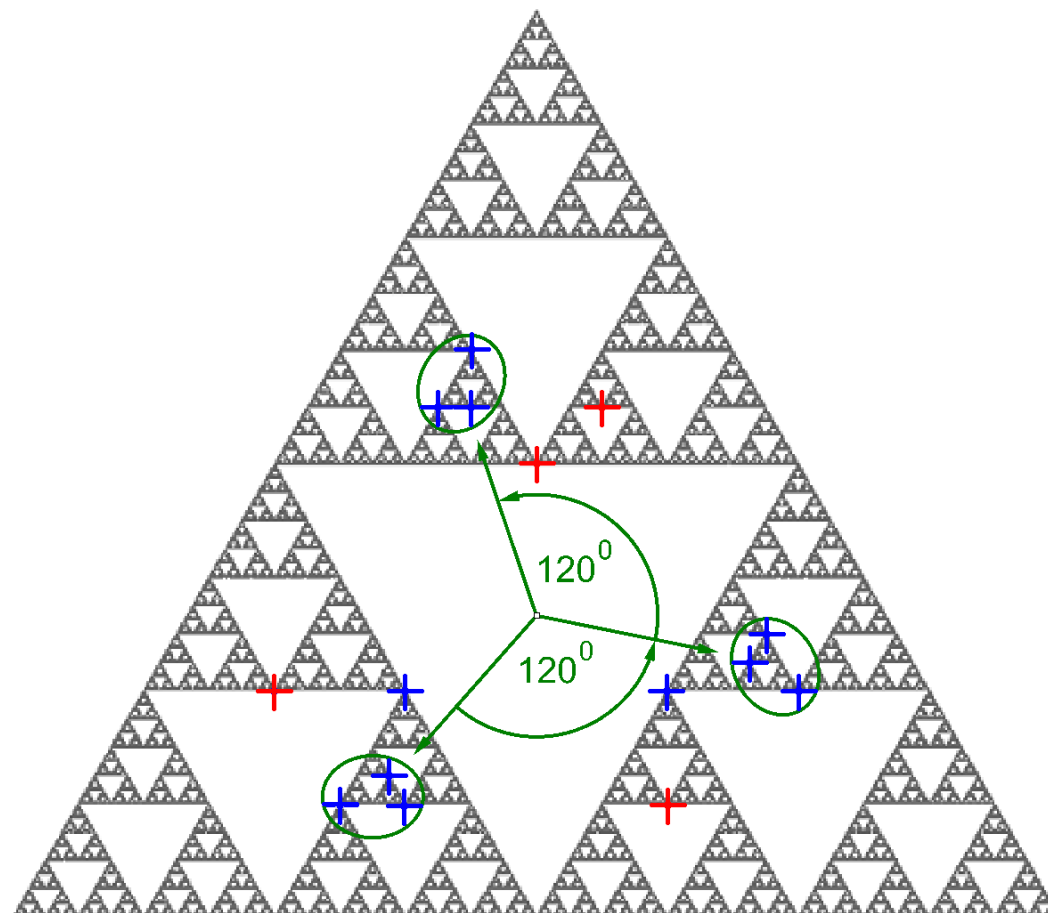
Spočetný a současně soběpodobný?



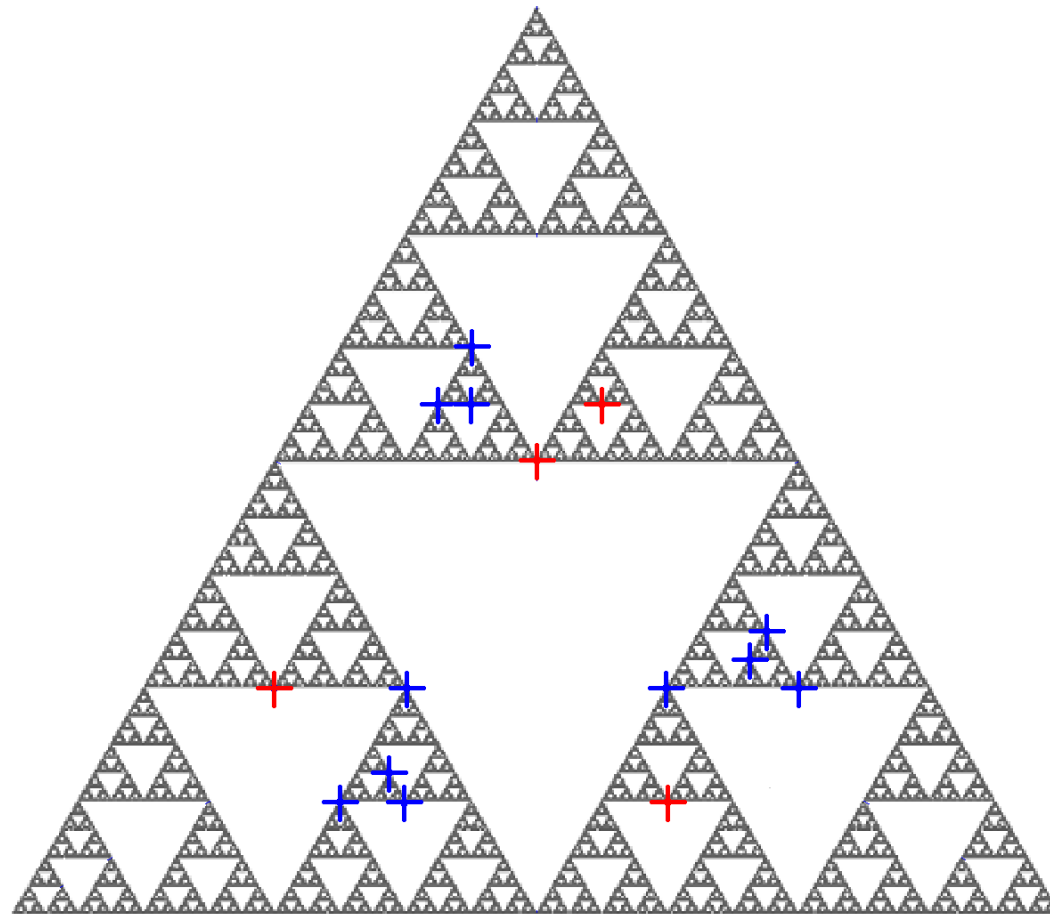
Spočetný a současně soběpodobný?



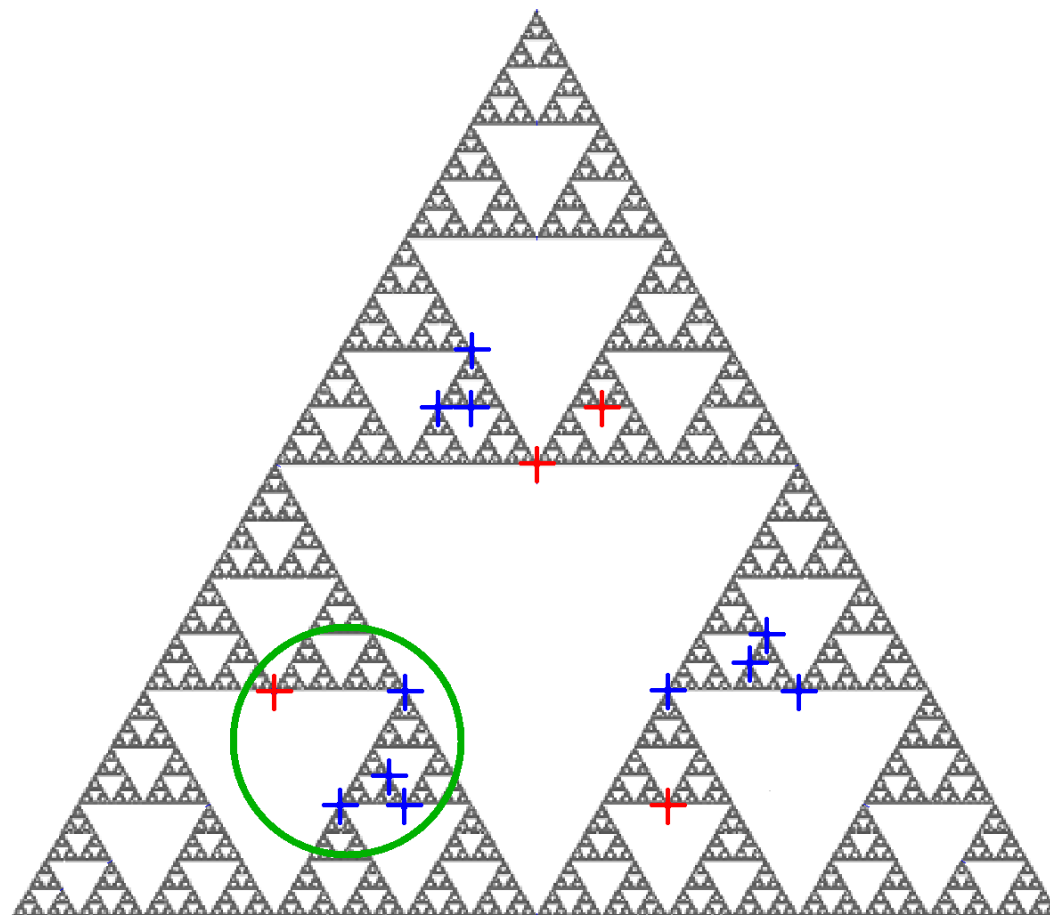
Spočetný a současně soběpodobný?



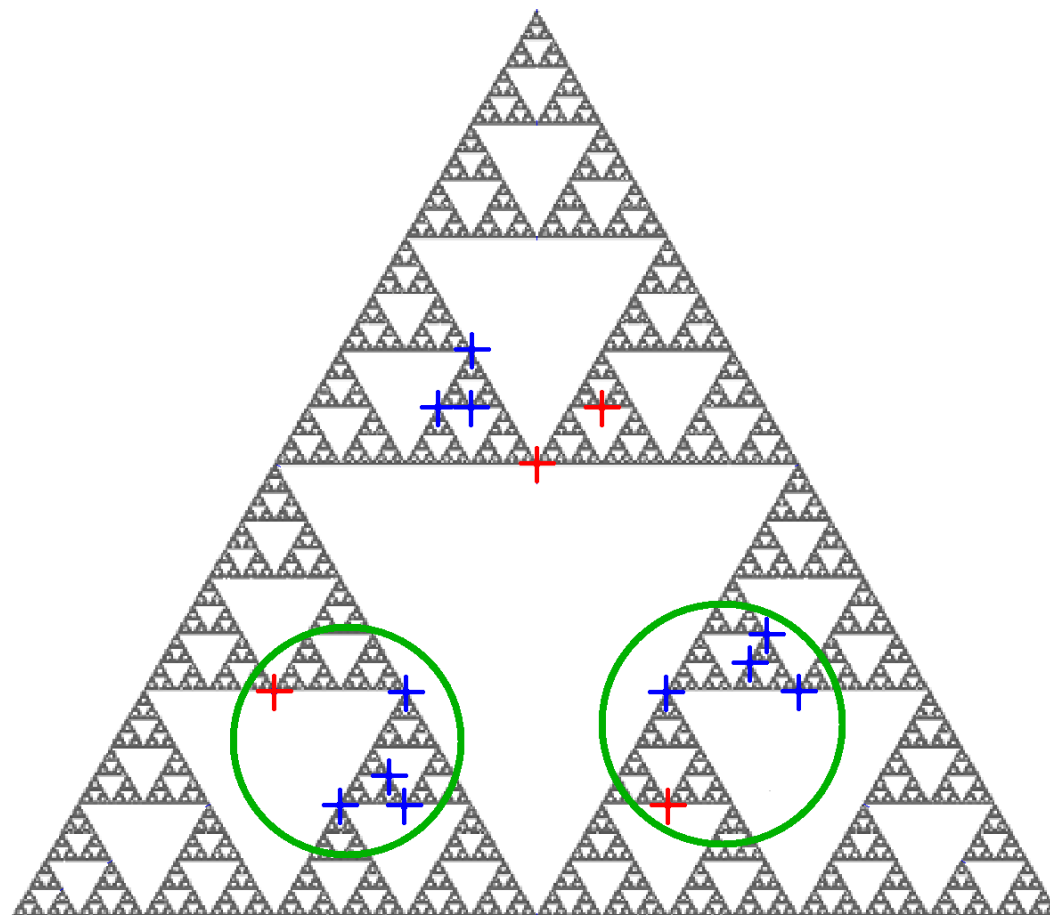
Spočetný a současně soběpodobný?



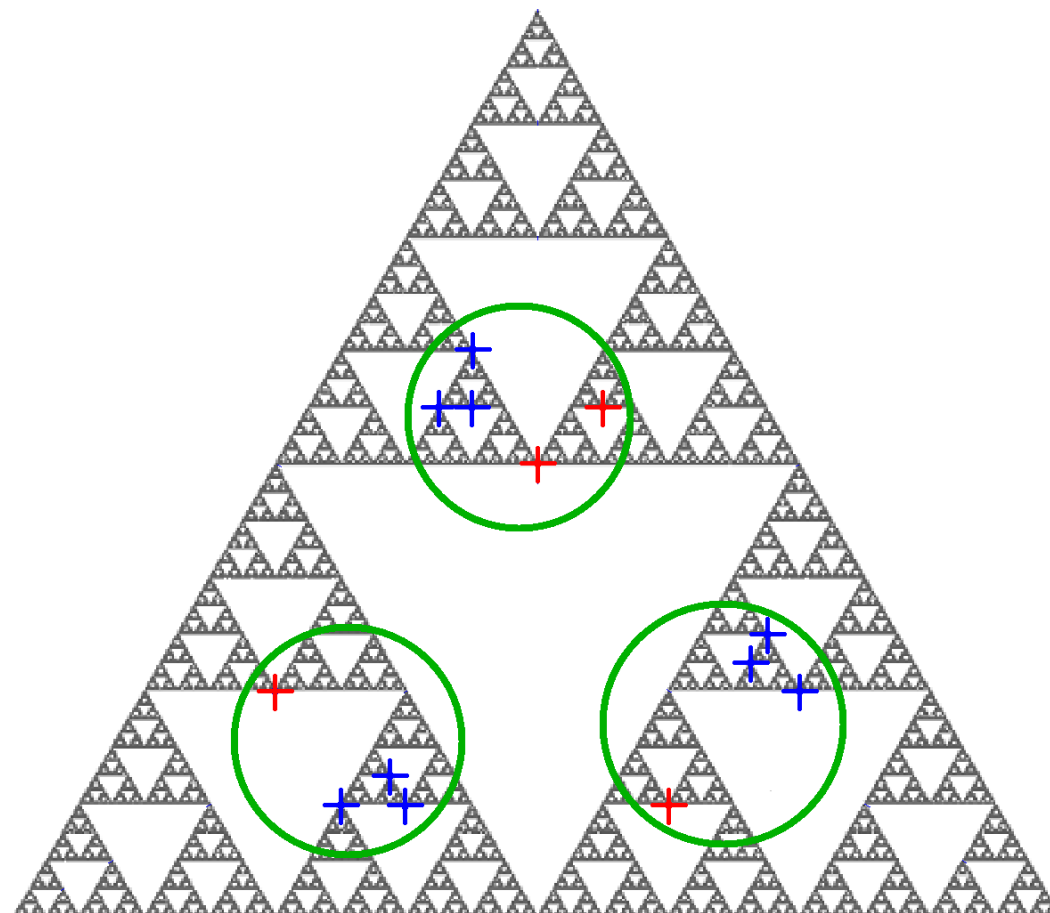
Spočetný a současně soběpodobný?



Spočetný a současně soběpodobný?



Spočetný ano, soběpodobný ne



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: $nábytek$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: $nábytek$
 $nábitek$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: $nábytek$

~~$nábitek$~~

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

$p; q; \wedge; \vee; \Rightarrow; \neg; (;)$

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: nábytek

~~nábitek~~

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: nábytek
 ~~$nábitek$~~

$p; q; \wedge; \vee; \Rightarrow; \neg; (;)$

$p \Rightarrow p;$

$p \vee \neg p$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: nábytek

~~*nábitek*~~

$p; q; \wedge; \vee; \Rightarrow; \neg; (;$

$p \Rightarrow p;$

$p \vee \neg p$

$(p \vee q) \Rightarrow (p \vee q) \quad (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: $nábytek$

~~$nábitek$~~

$p; q; \wedge; \vee; \Rightarrow; \neg; (;$

$p \Rightarrow p;$

$p \vee \neg p$

$(p \vee q) \Rightarrow (p \vee q) \quad (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$

$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda: a, b, c, \dots, x, y, z

Slovní základ: byt

Pravidla odvozování: nábytek

~~nábitek~~

$p; q; \wedge; \vee; \Rightarrow; \neg; (;$

$p \Rightarrow p;$

$p \vee \neg p$

$(p \vee q) \Rightarrow (p \vee q) \quad (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$

$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

F + –

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

Slovní základ:

$$\begin{array}{ccc} F & + & - \\ & F & \end{array}$$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F - -F + F$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F - -F + F$

1)

F

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F - -F + F$

1)

F

2)

$F + F - -F + F$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F -- F + F$

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} & F & & + & & F & & - & - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - & - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F -- F + F$

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} & F & & + & & F & & - & - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - & - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

Interpretace („želví grafika“):

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F -- F + F$

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} F & & + & & F & & - - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

Interpretace („želví grafika“): F *krok dopředu*

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F -- F + F$

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} F & & + & & F & & - - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

Interpretace („želví grafika“):

F *krok dopředu*

$+$ *otočení o úhel α v kladném smyslu*

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

Abeceda

$F \quad + \quad -$

Slovní základ:

F

Pravidla odvozování:

Každý znak F se přepíše posloupností $F + F -- F + F$

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} F & & + & & F & & - - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

Interpretace („želví grafika“):

F *krok dopředu*

$+$ *otočení o úhel α v kladném smyslu*

$-$ *otočení o úhel α v záporném smyslu*

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

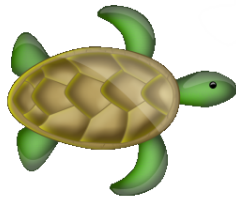
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $--$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

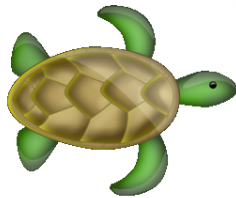
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\boxed{F} + F -- F + F$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

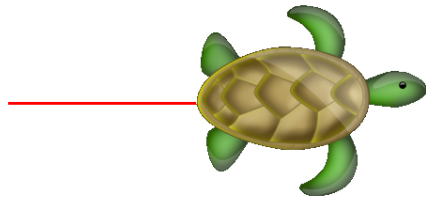
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{--}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\boxed{F} + F -- F + F$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

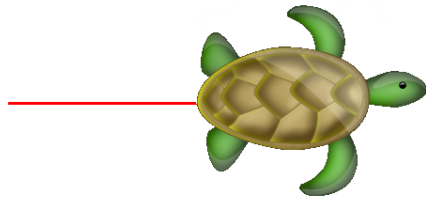
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} \boxed{+} \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

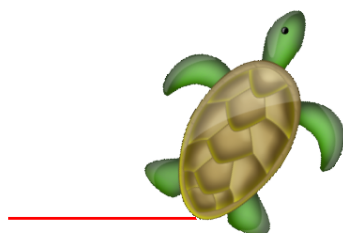
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} \boxed{+} \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

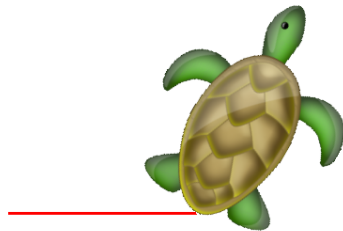
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \boxed{\overset{F}{F}} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

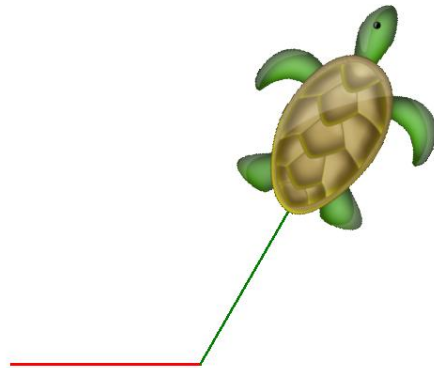
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



$\overset{F}{F} + \boxed{\overset{F}{F}} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

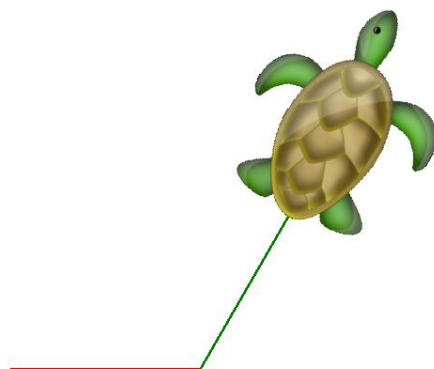
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $--$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} \boxed{-} - \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

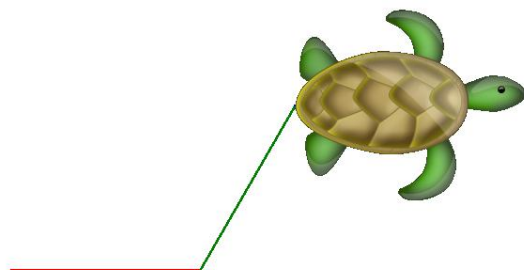
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} \boxed{-} - \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

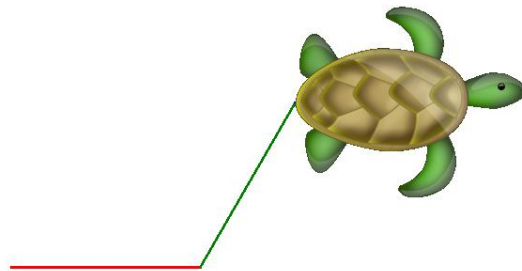
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \boxed{--} \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

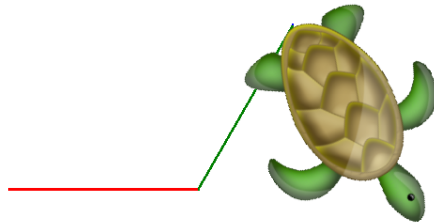
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \boxed{--} \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

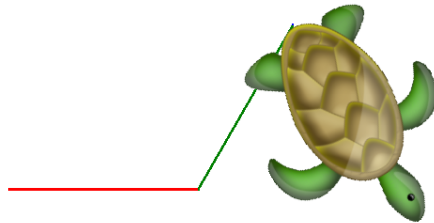
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- -- \boxed{\overset{F}{F}} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

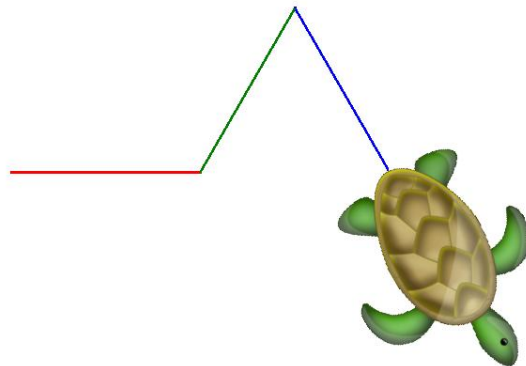
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $-- \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ \overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \boxed{\overset{F}{F}} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

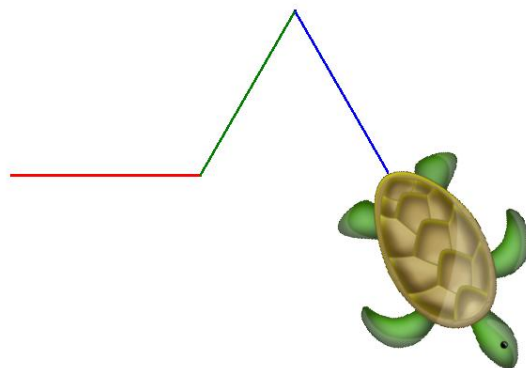
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} \boxed{+} \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

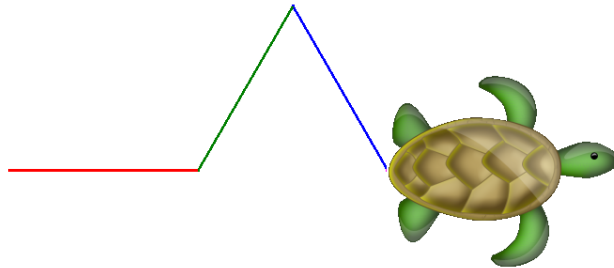
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ F + F -- F + F$
 $-- F + F + F + F -- F + F$
 $+ F + F -- F + F$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} \boxed{+} \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

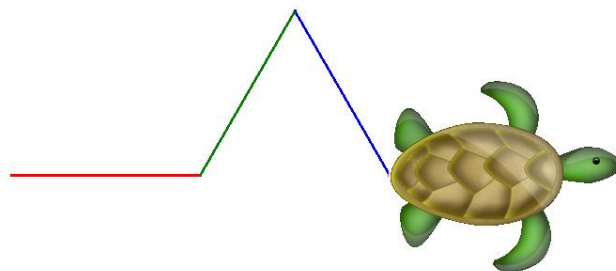
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $+$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $--$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $+$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \boxed{\overset{F}{F}}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

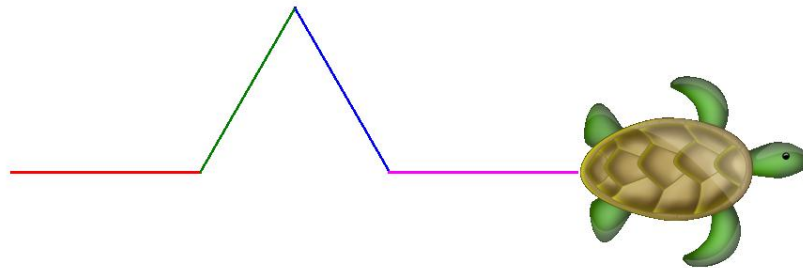
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $+ F + F -- F + F$
 $-- F + F -- F + F$
 $+ F + F -- F + F$

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \boxed{\overset{F}{F}}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\begin{array}{ccccccc} & F & & + & & F & & - - & & F & & + & & F \\ F + F -- F + F & + & F + F -- F + F & - - & F + F -- F + F & + & F + F -- F + F \end{array}$

$F + F -- F + F$

Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

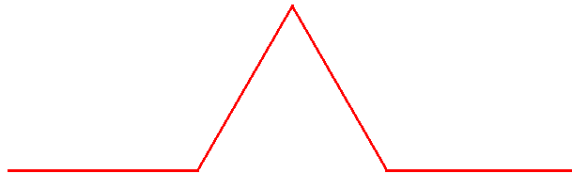
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$

$F + F -- F + F$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

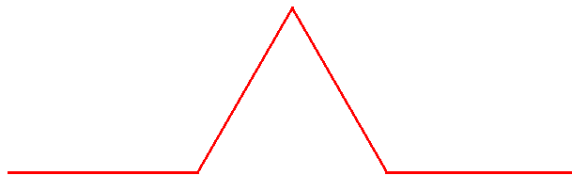
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$

$F + F -- F + F +$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

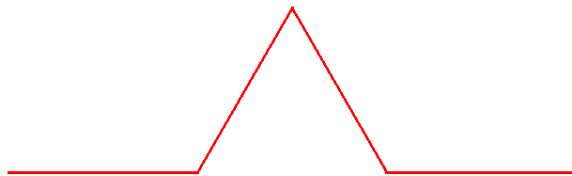
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$

$F + F -- F + F + F + F -- F + F$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

F

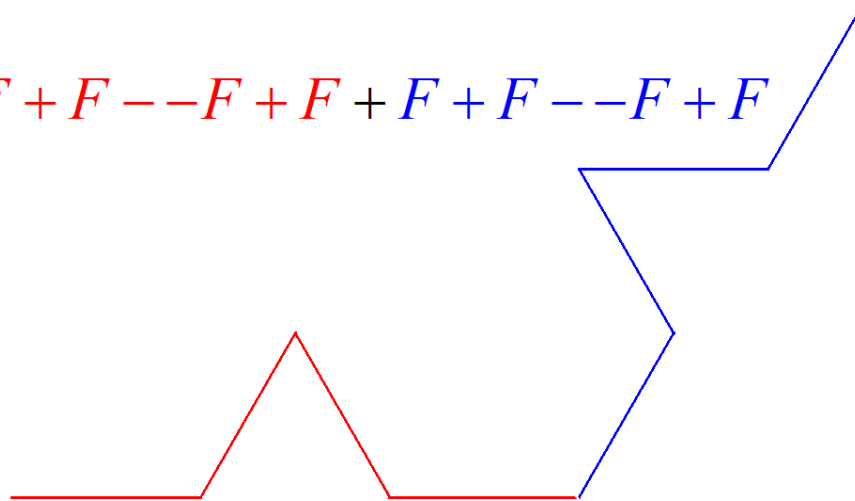
2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$

$F + F -- F + F + F + F -- F + F$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

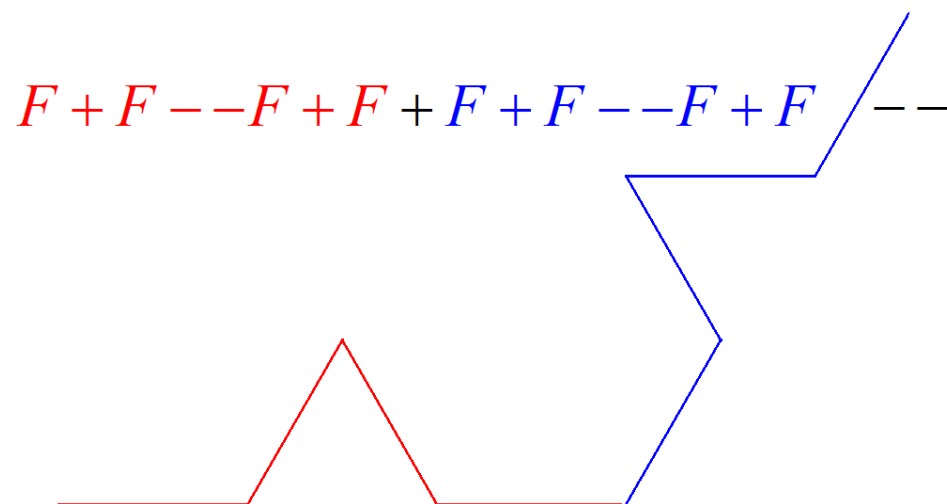
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F} + \overset{F}{F} -- \overset{F}{F} + \overset{F}{F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

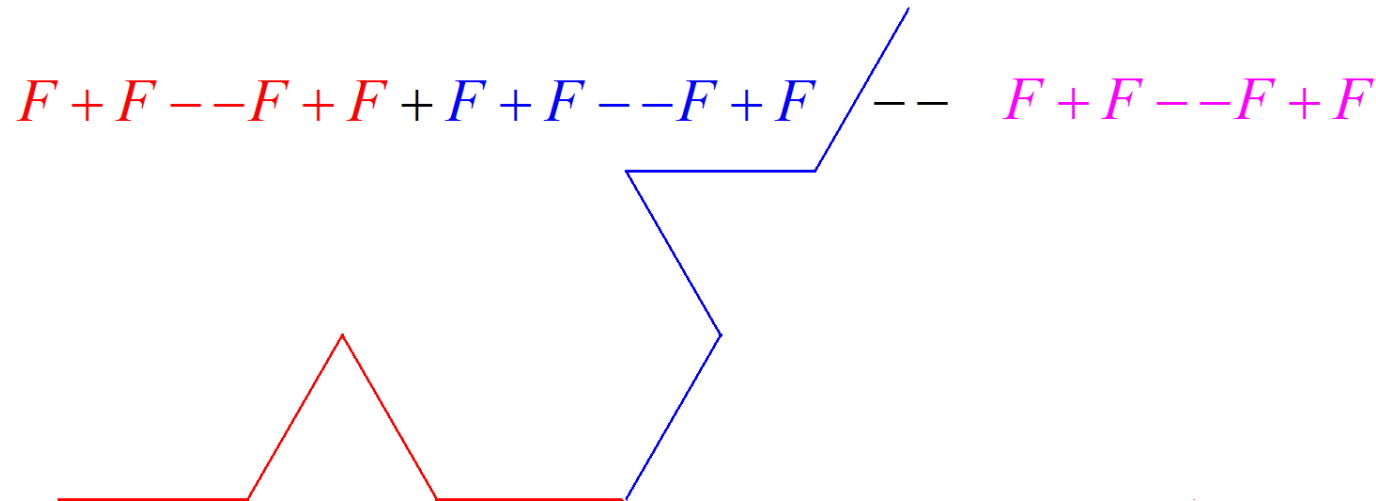
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{-}{-}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

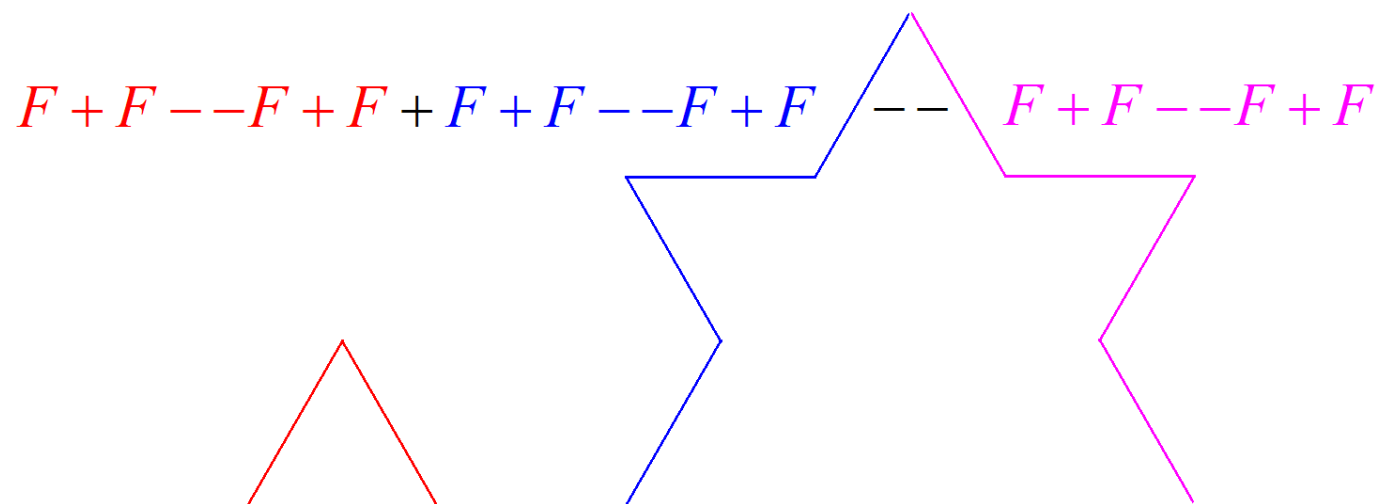
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{- -}{--}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

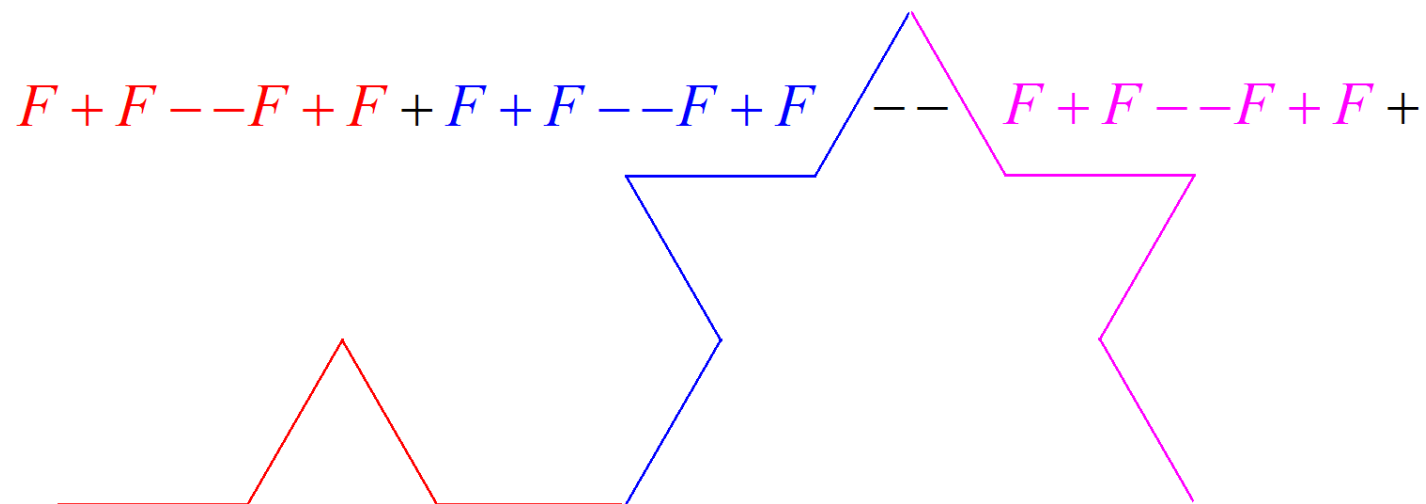
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{- -}{--}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

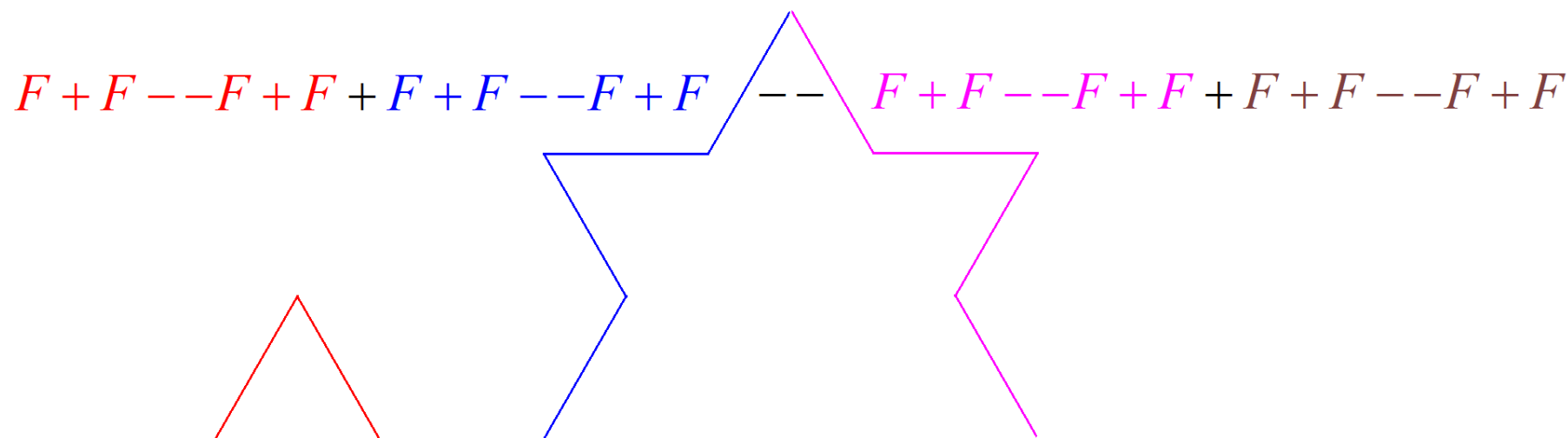
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{- -}{--}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$



Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) a jeho jazykový koutek

1)

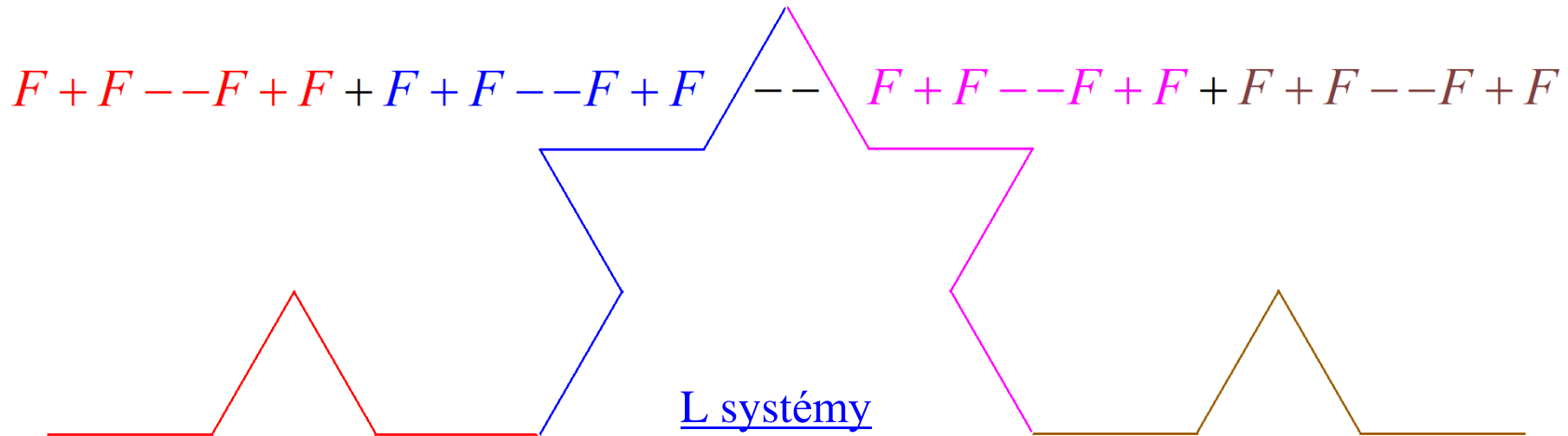
F

2)

$F + F -- F + F$

3)

$\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{- -}{--}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$
 $\overset{+}{+}$
 $\overset{F}{F + F -- F + F}$



**

Více o fraktálech:

<https://martisek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=675259>

<https://martisek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=675489>

<https://martisek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=676337>

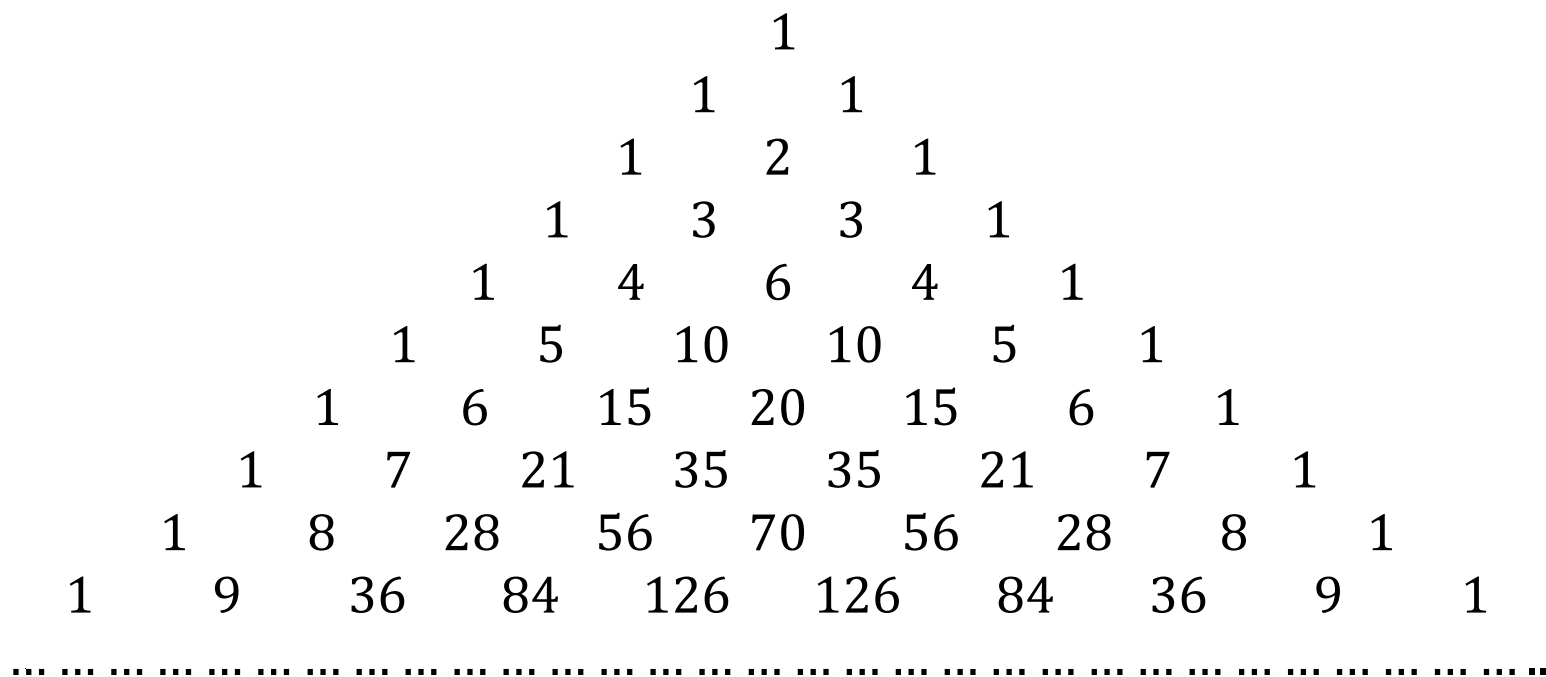
<https://martisek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=664252>

Blaise Pascal (1623–1662)

a jeho (?) trojúhelník

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \\(a + b)^0 &= 1 \\(a + b)^1 &= 1a + 1b \\(a + b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\(a + b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\(a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3b + 1b^3 \\..... &.....\end{aligned}$$





Sudá – lichá

											1																									
											1		1																							
											1		2		1																					
											1		3		3		1																			
											1		4		6		4		1																	
											1		5		10		10		5		1															
												1		6		15		20		15		6		1												
														1		7		21		35		35		21		7		1								
1		1		9		8		28		56		70		56		28		8		36		84		126		126		84		36		8		9		1

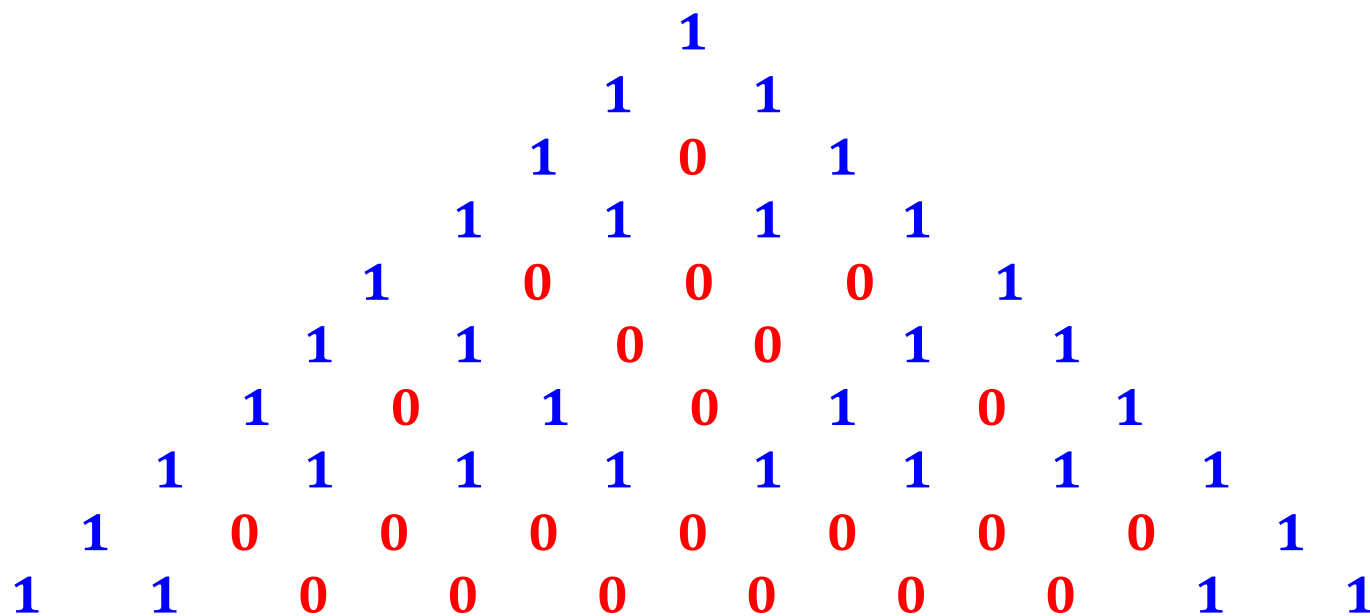
Sudá – lichá

.....

~~Sudá—lichá~~ zbytky po dělení dvěma

.....

Sudá—lichá zbytky po dělení dvěma



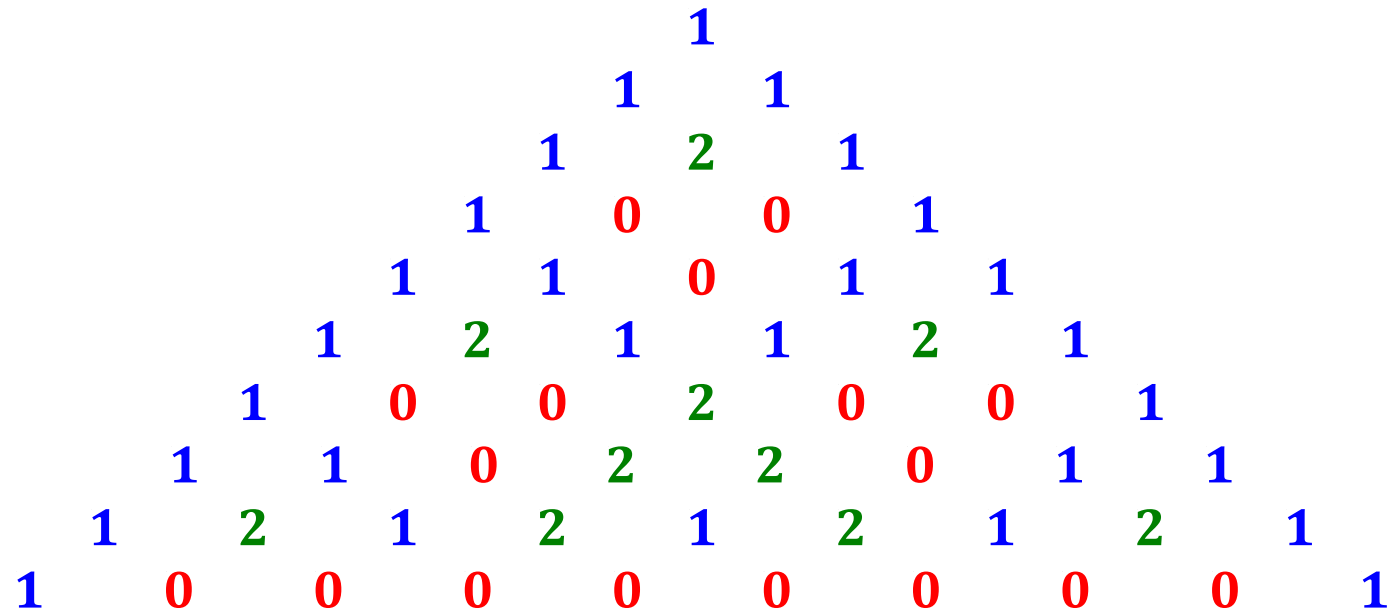
.....

Zbytky po dělení třemi

											1												
										1		1											
									1		2		1										
								1		3		3		1									
							1		4		6		4		1								
						1		5		10		10		5		1							
					1		6		15		20		15		6		1						
				1		7		21		35		35		21		7		1					
			1		8		28		56		70		56		28		8		1				
		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1			
		1																			1		

.....

Zbytky po dělení třemi



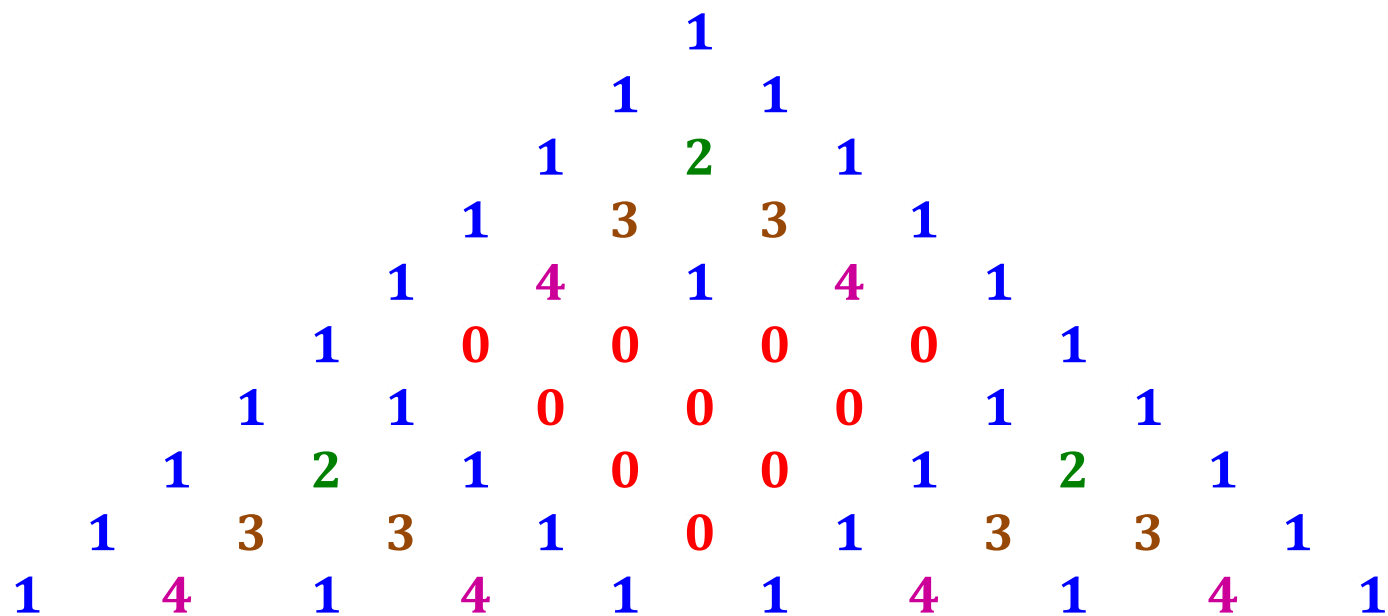
.....

Zbytky po dělení pěti

											1												
										1		1											
									1		2		1										
								1		3		3		1									
							1		4		6		4		1								
						1		5		10		10		5		1							
					1		6		15		20		15		6		1						
				1		7		21		35		35		21		7		1					
			1		8		28		56		70		56		28		8		1				
		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1			
		1																			1		

.....

Zbytky po dělení pěti



Vítejte na konci času

** 21.12. 3114 př. n. l † 21. 12. 2012 n. l.*





SOUDNÝ DEN TOP 09: KNÍŽE KONČÍ

Schwarzenberga střídá v čele strany Kalousek strana 1

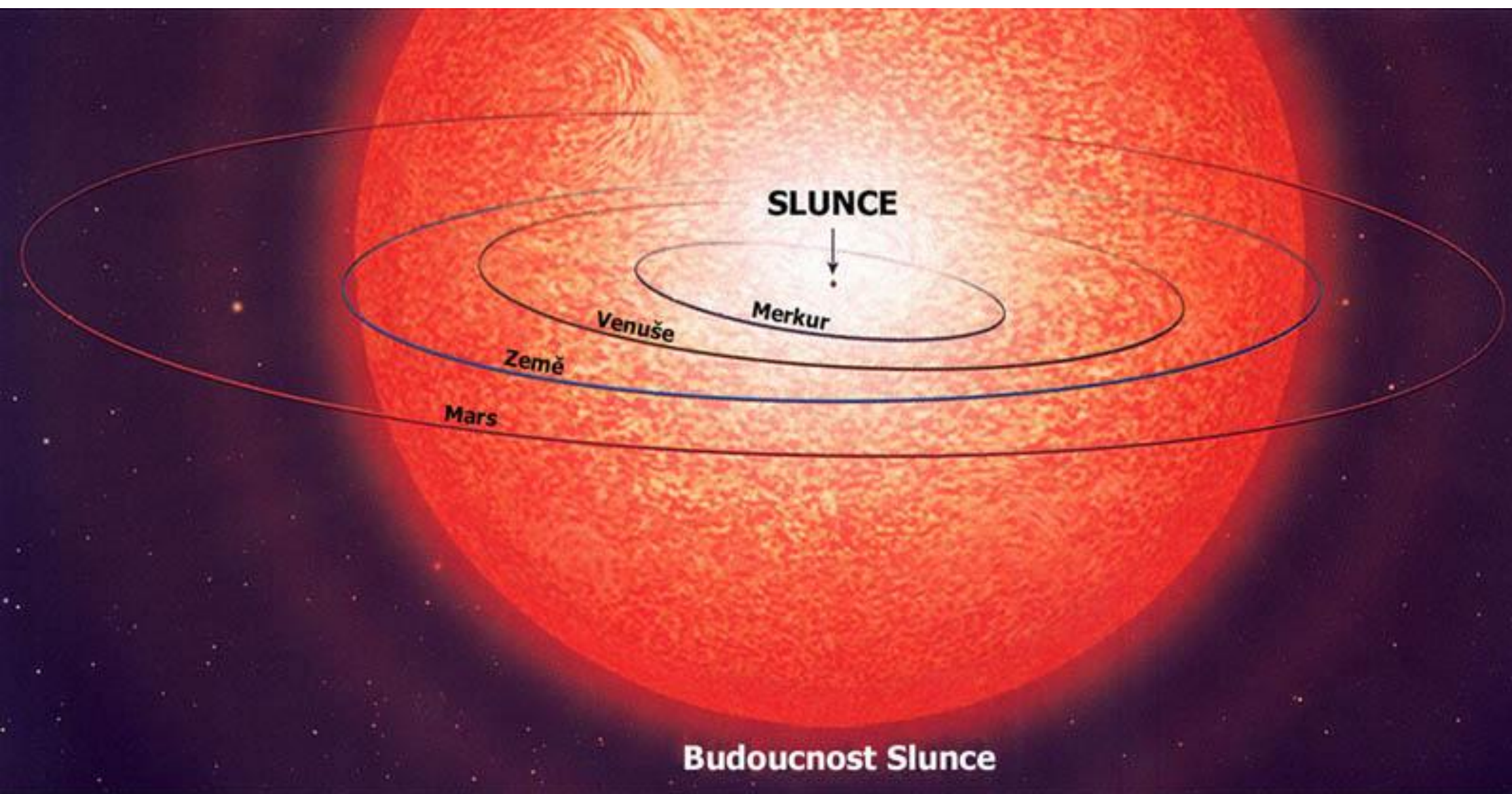
ITA

úterý 6. 10. 2015

DNES

říká
Rozho











AFAS

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR
L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fondée en 1872, reconnue d'utilité publique

[L'AFAS](#)[Agenda](#)[Articles](#)[Notes de lecture](#)[Lettre d'information](#)[Fil d'actualités](#)[Expos à voir](#)[Soutenir l'AFAS](#)

L'AFAS : promouvoir les sciences et les techniques auprès du public



Francouzské sdružení pro pokrok v přírodních vědách

AFAS

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR
L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fondée en 1872, reconnue d'utilité publique

[L'AFAS](#)[Agenda](#)[Articles](#)[Notes de lecture](#)[Lettre d'information](#)[Fil d'actualités](#)[Expos à voir](#)[Soutenir l'AFAS](#)

L'AFAS : promouvoir les sciences et les techniques auprès du public



Slavnostní zasedání v r. 1891



***věž
zrození***

***věž
zkázy***

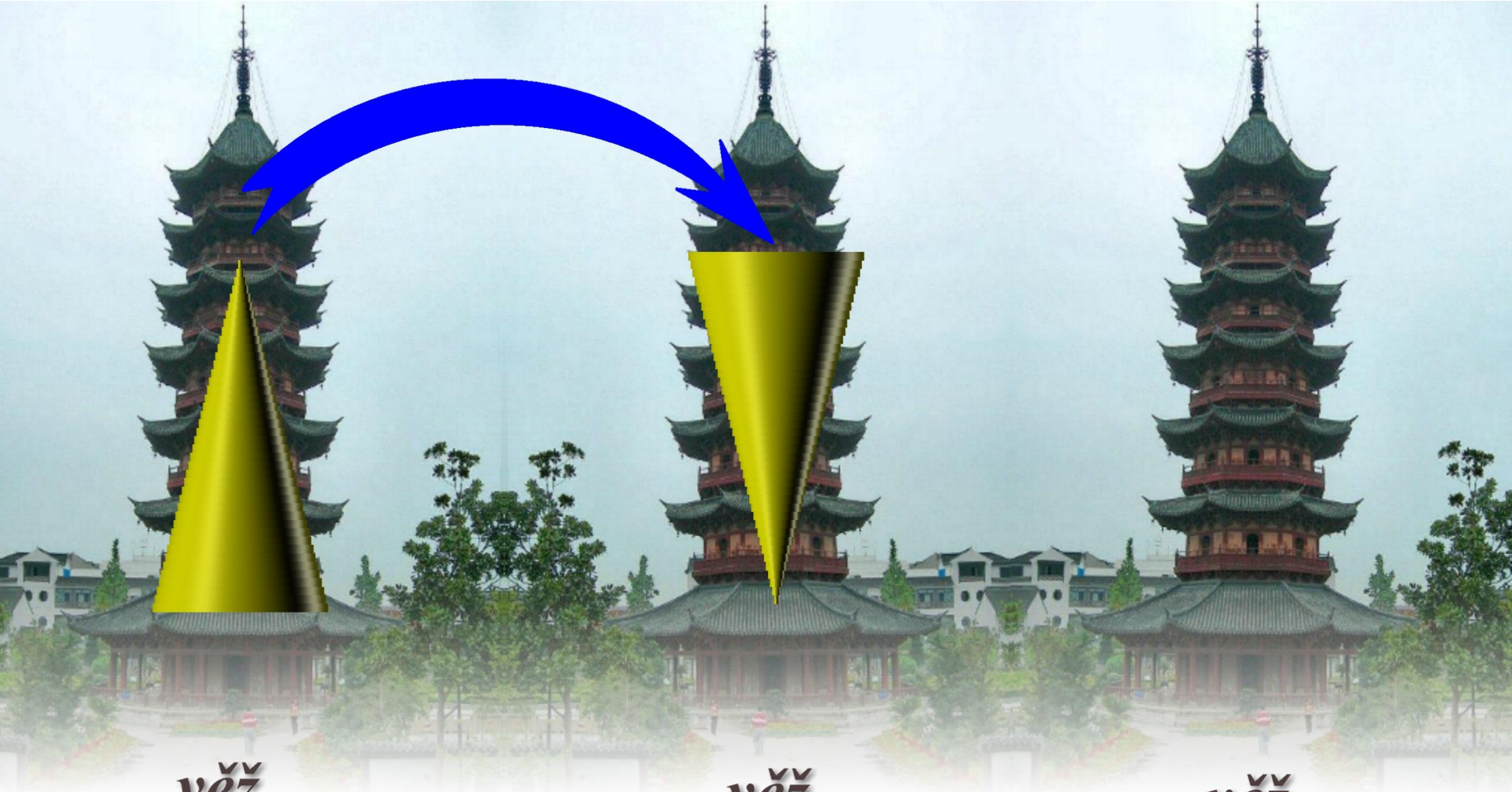
***věž
života***



***věž
zrození***

***věž
zkázy***

***věž
života***



***věž
zrození***

***věž
zkázy***

***věž
života***



***věž
zrození***

***věž
zkázy***

***věž
života***

Édouard Lucas (4. 4. 1842 – 3. 10. 1891)



Édouard Lucas (4. 4. 1842 – 3. 10. 1891)

Záhadná smrt – viz např. [zde](#)



[Hanojské věže I](#)

[Hanojské věže II](#)



Kdy nastane konec světa?

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

Nejmenší kotouč se přesune buď

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava

anebo z pravé věže na levou

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava

anebo z pravé věže na levou

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý:

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
 anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ:

věž zrození je vlevo

věž života je uprostřed

věž zkázy je vpravo:

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ: věž zrození je vlevo věž života je uprostřed věž zkázy je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak než v předchozím případě

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ:

věž zrození je vlevo

věž života je uprostřed

věž zkázy je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak než v předchozím případě

Případ

věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

věž života je vpravo:

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ:

věž zrození je vlevo

věž života je uprostřed

věž zkázy je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak než v předchozím případě

Případ

věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

věž života je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje jinak než v předchozích případech

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ:

věž zrození je vlevo

věž života je uprostřed

věž zkázy je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak než v předchozím případě

Případ

věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

věž života je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje jinak než v předchozích případech

Případ

věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

věž života je vpravo:

Kdy nastane konec světa?

Návod na řešení pro případ, že

věž zkázy je vlevo

věž života je uprostřed

věž zrození je vpravo

Počet kotoučů je lichý:

Střídavě se přesunuje kotouč nejmenší a jiný

*Nejmenší kotouč se přesune buď o jednu věž doprava
anebo z pravé věže na levou*

Jiný kotouč než nejmenší lze přesunout vždy jediným způsobem

Počet kotoučů je sudý: Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak

Případ:

věž zrození je vlevo

věž života je uprostřed

věž zkázy je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje přesně naopak než v předchozím případě

Případ

věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

věž života je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje jinak než v předchozích případech

Případ

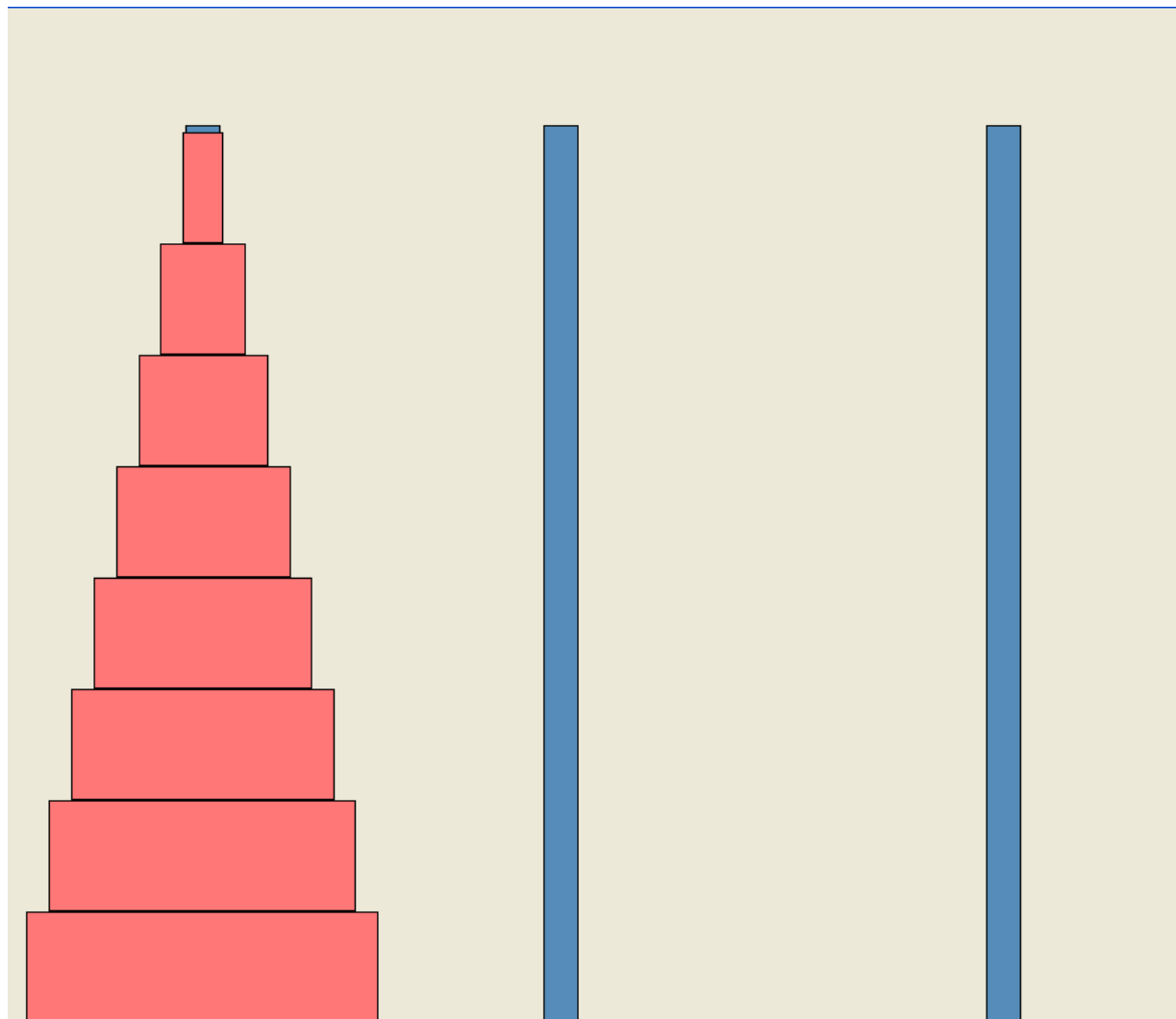
věž zrození je vlevo

věž zkázy je uprostřed

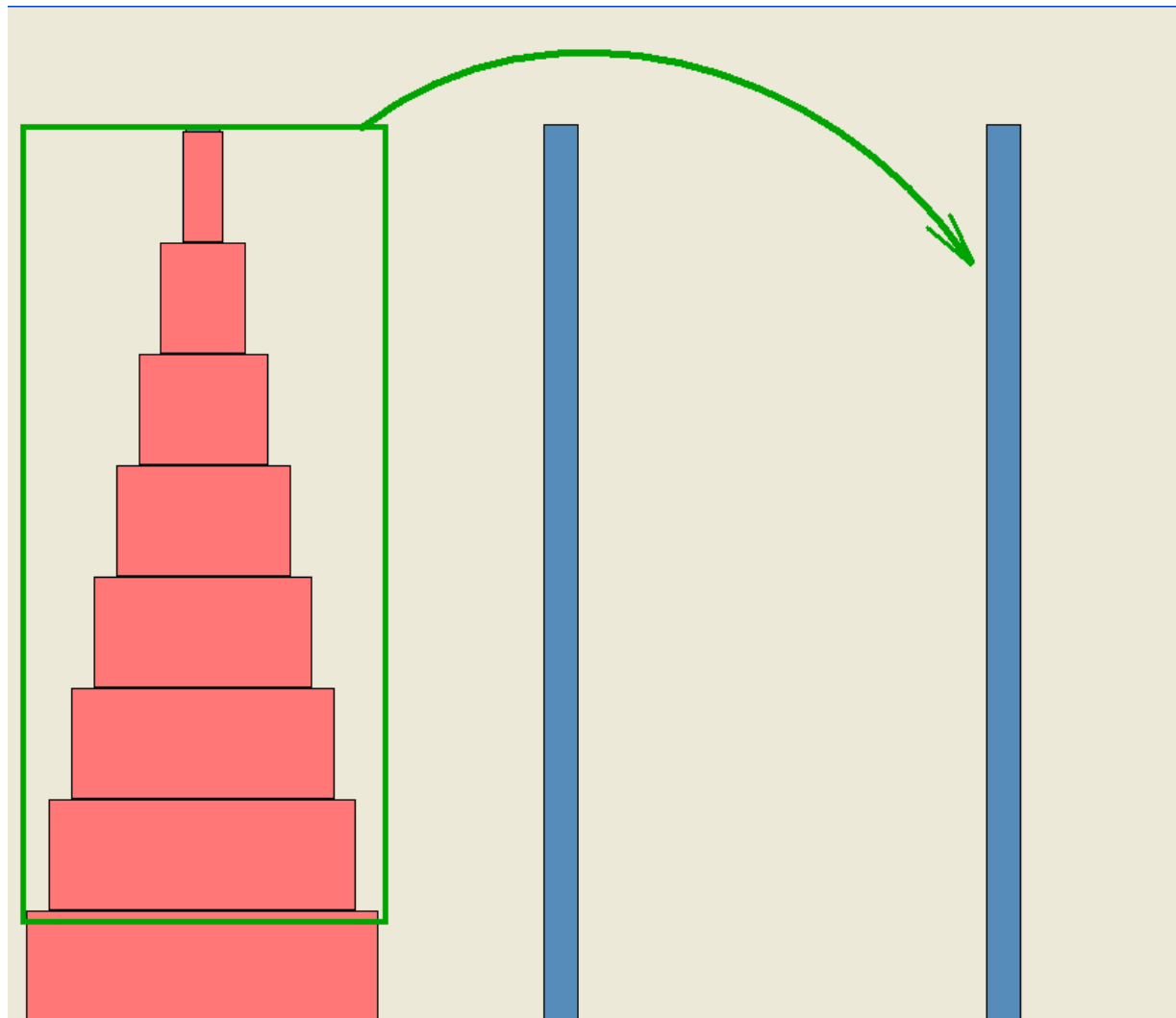
věž života je vpravo:

Nejmenší kotouč se přesunuje úplně jinak než ve všech předchozích případech

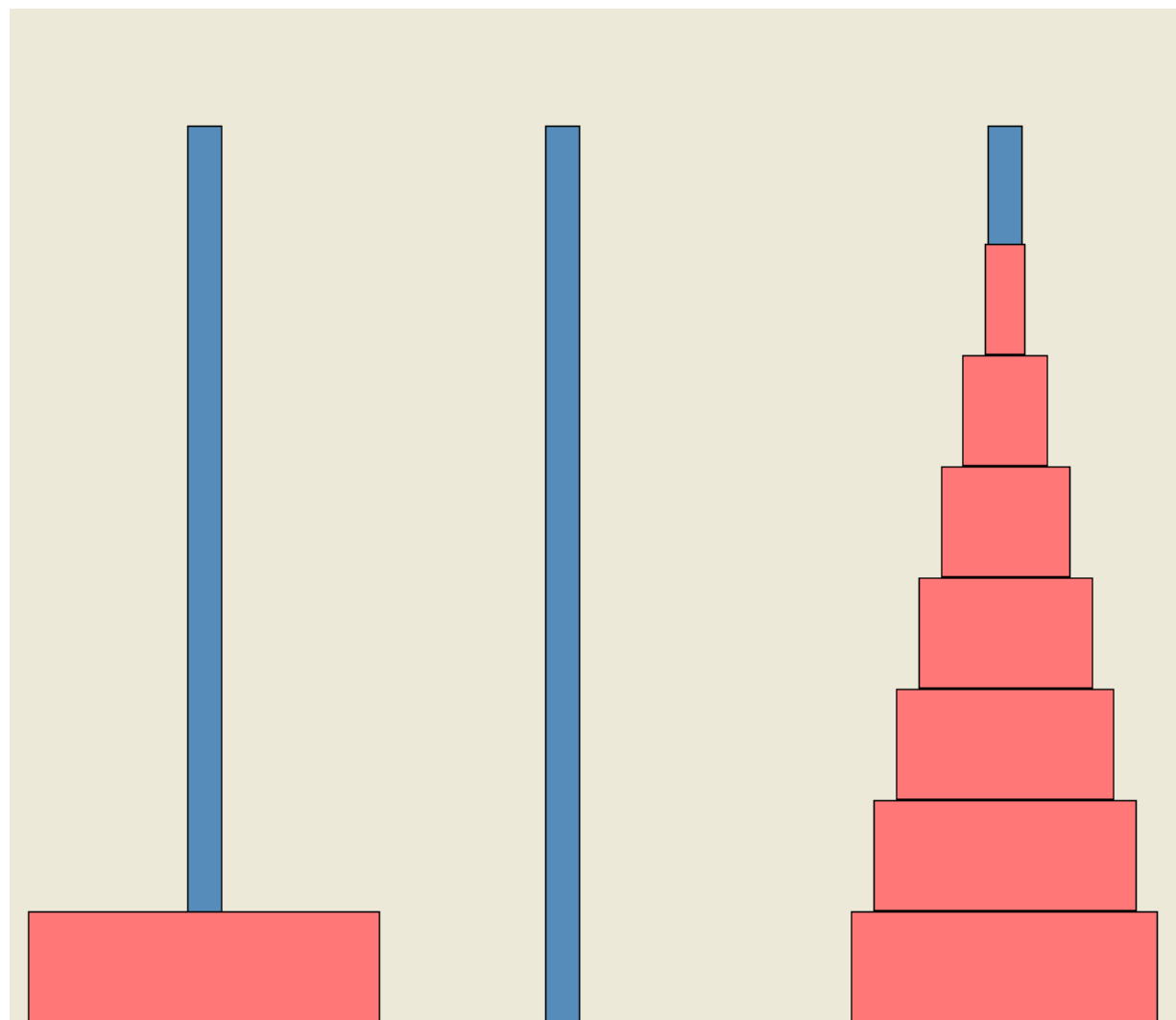
Kdy nastane konec světa?



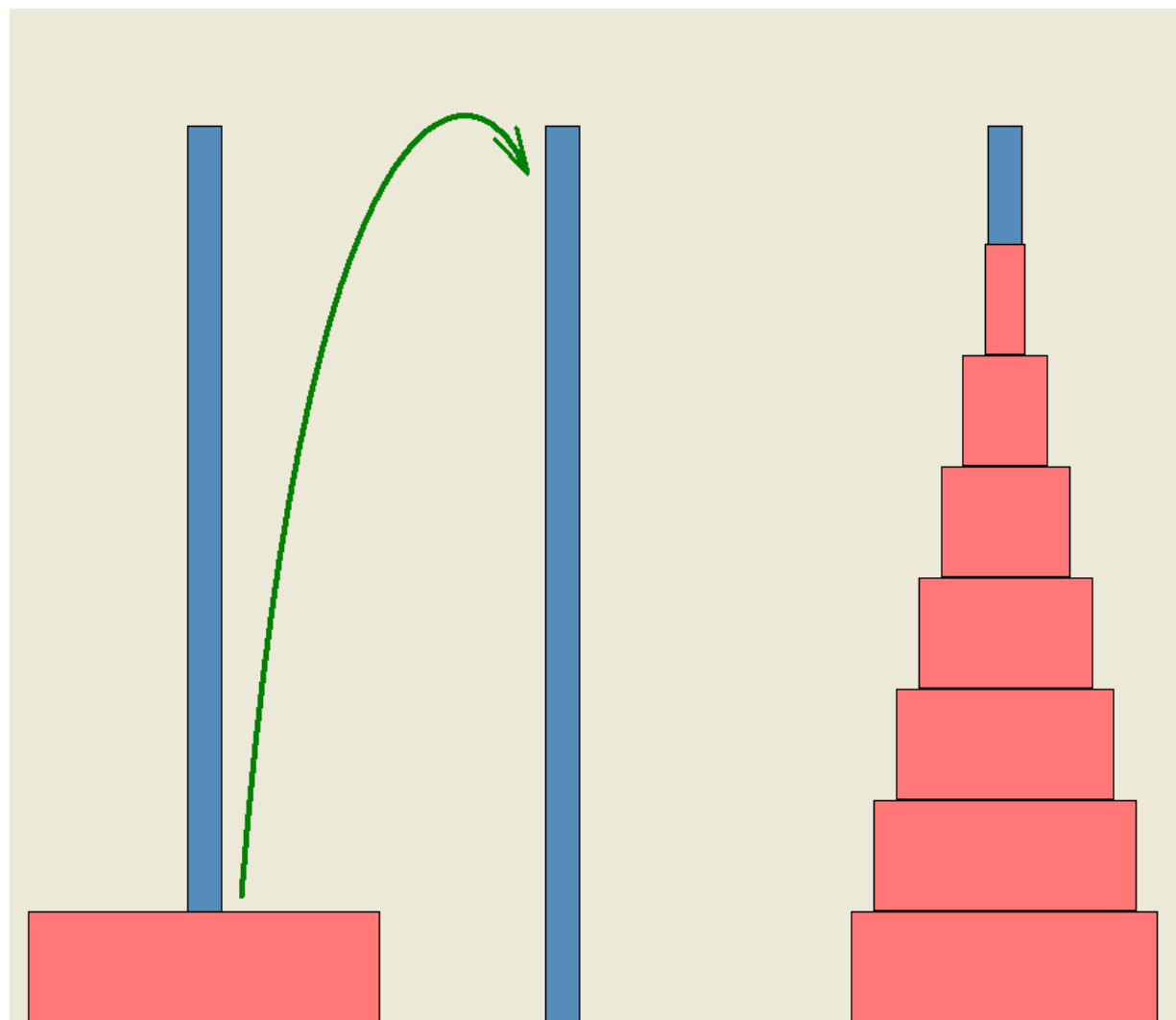
Kdy nastane konec světa?



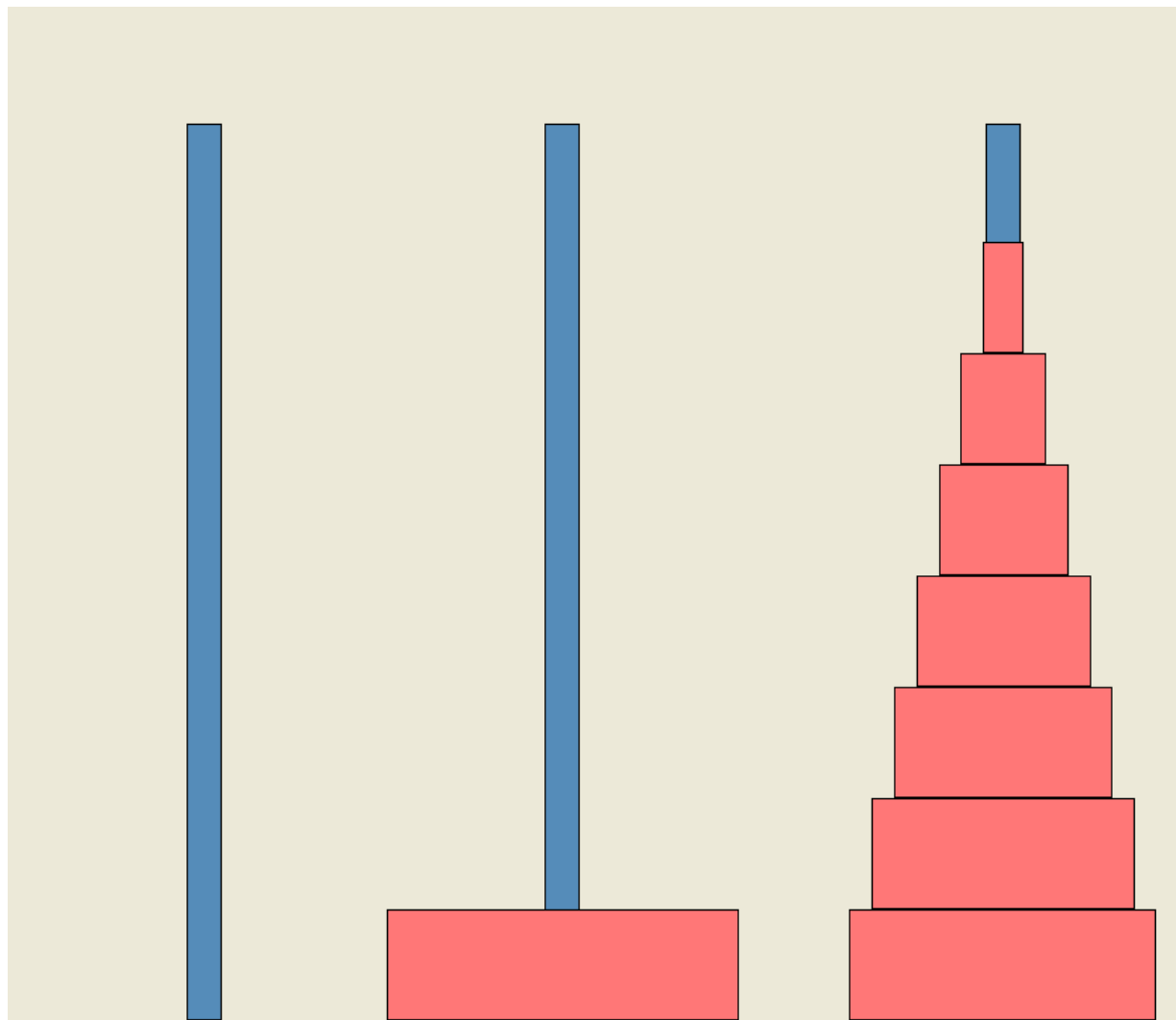
Kdy nastane konec světa?



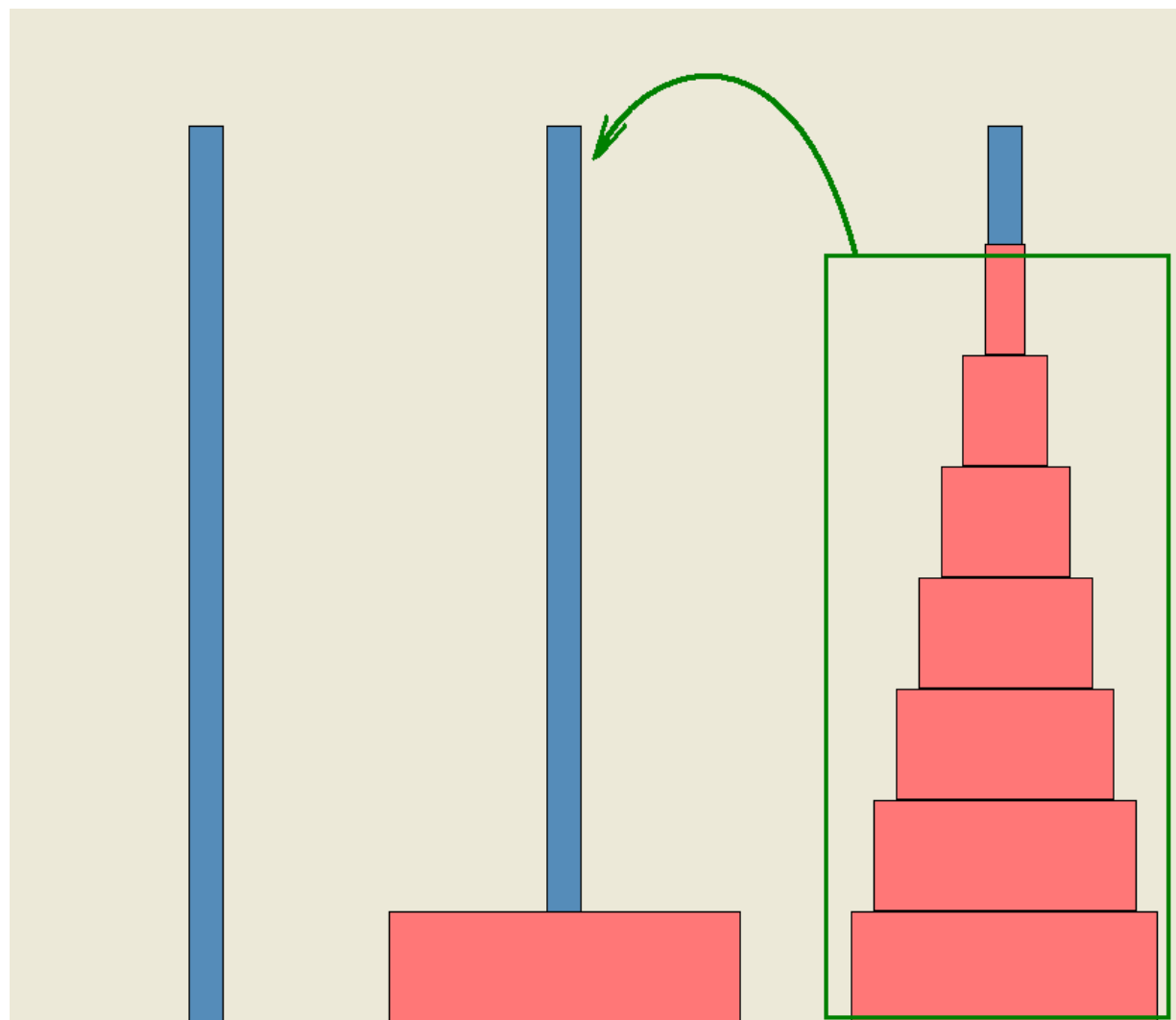
Kdy nastane konec světa?



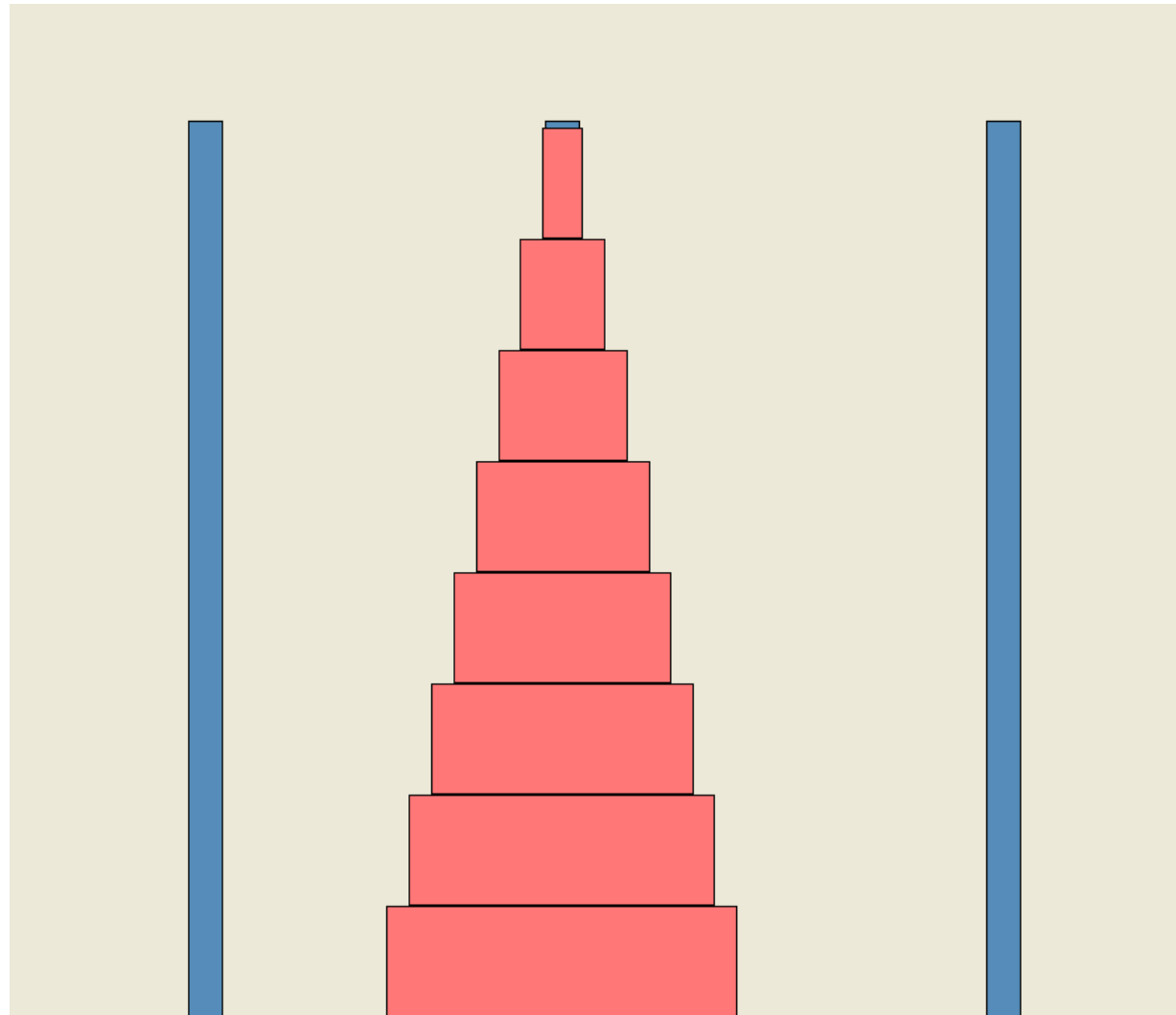
Kdy nastane konec světa?



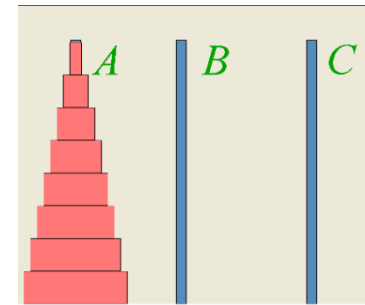
Kdy nastane konec světa?



Kdy nastane konec světa?

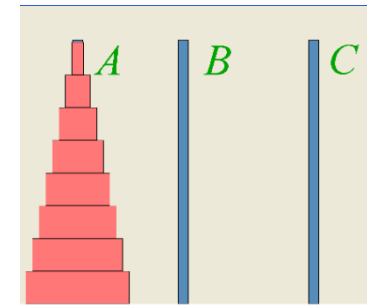


Kdy nastane konec světa?



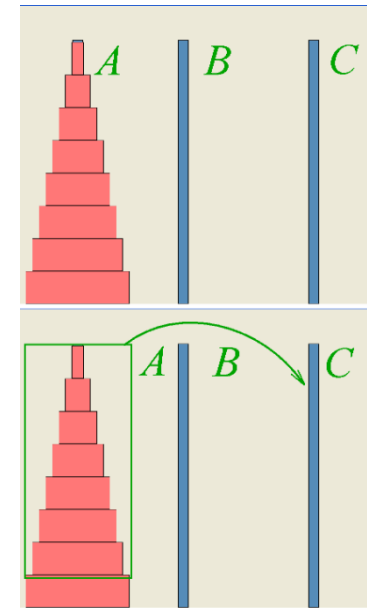
Kdy nastane konec světa?

Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);



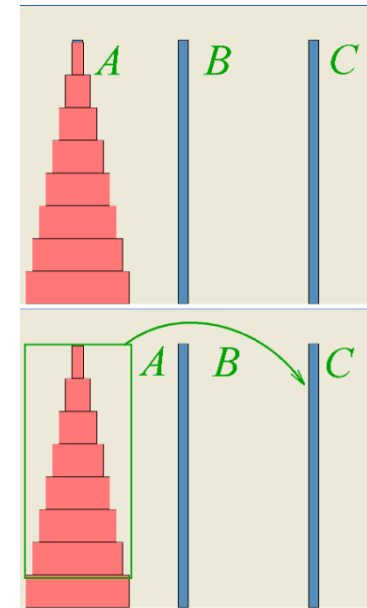
Kdy nastane konec světa?

Procedure Presun (n,A,B,C:Integer) ;



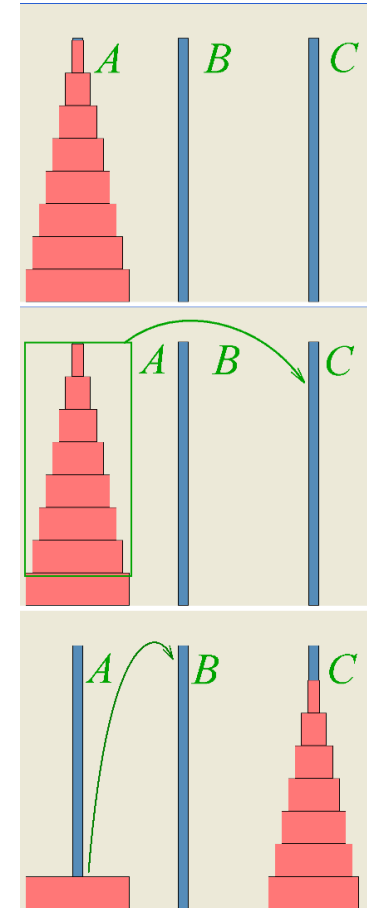
Kdy nastane konec světa?

```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin  
  if n>0 then  
    begin  
      Presun (n-1,A,C,B);
```



Kdy nastane konec světa?

```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin  
  if n>0 then  
    begin  
      Presun (n-1,A,C,B);
```



Kdy nastane konec světa?

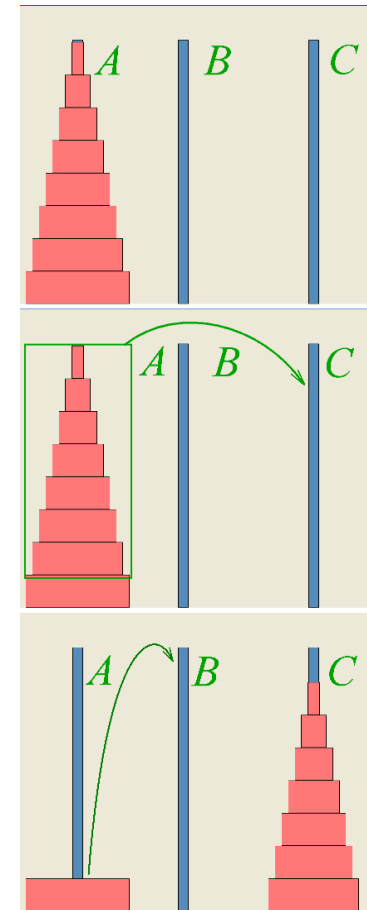
```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin
```

```
  if n>0 then
```

```
    begin
```

```
      Presun (n-1,A,C,B);
```

```
    Napiš('Přenes kotouč z '+A+'na '+B);
```



Kdy nastane konec světa?

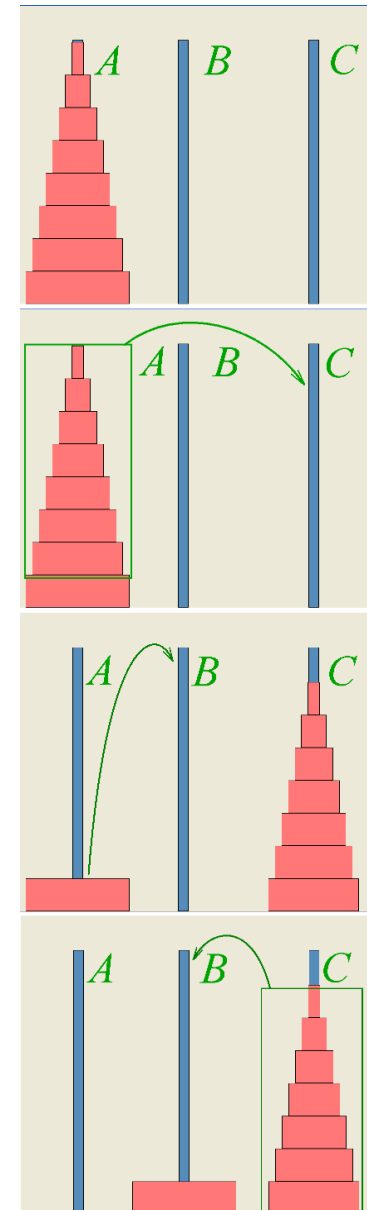
```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin
```

```
  if n>0 then
```

```
    begin
```

```
      Presun (n-1,A,C,B);
```

```
    Napiš('Přenes kotouč z '+A+'na '+B);
```



Kdy nastane konec světa?

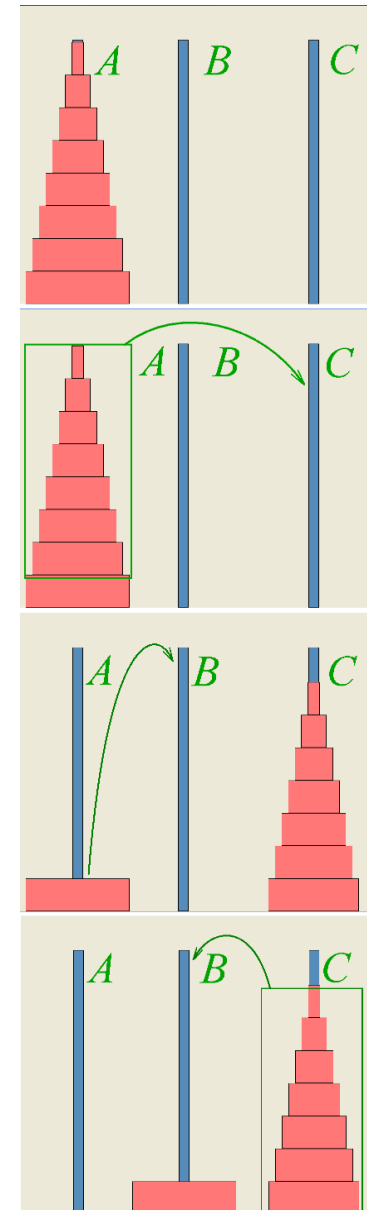
```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin
```

```
  if n>0 then  
    begin  
      Presun (n-1,A,C,B);
```

```
    Napiš('Přenes kotouč z '+A+'na '+B);
```

```
      Presun(n-1,C,B,A);  
    end;
```

```
end;
```



Kdy nastane konec světa?

```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin
```

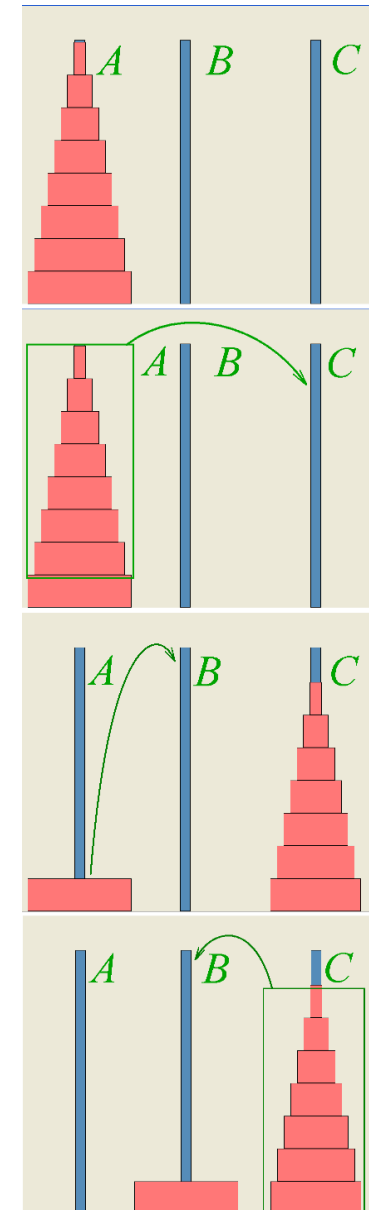
```
  if n>0 then  
    begin  
      Presun (n-1,A,C,B);
```

```
      Napiš('Přenes kotouč z '+A+'na '+B);
```

```
      Presun(n-1,C,B,A);  
    end;
```

```
end;
```

```
Presun(64,1,2,3)
```



Kdy nastane konec světa?

```
Procedure Presun (n,A,B,C:Integer);  
begin
```

```
  if n>0 then  
    begin  
      Presun (n-1,A,C,B);
```

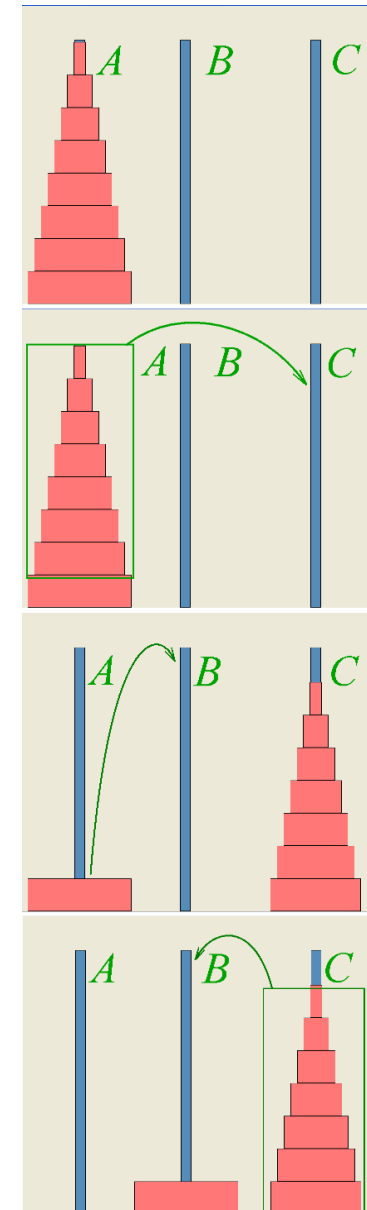
```
    Napiš('Přenes kotouč z '+A+'na '+B);
```

```
      Presun(n-1,C,B,A);  
    end;
```

```
end;
```

```
Presun(64,1,2,3)
```

Program pro n kotoučů



Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

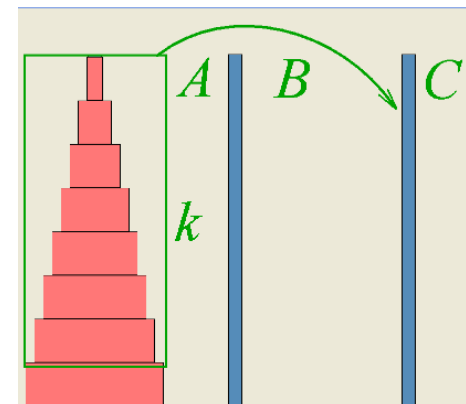
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k +$$



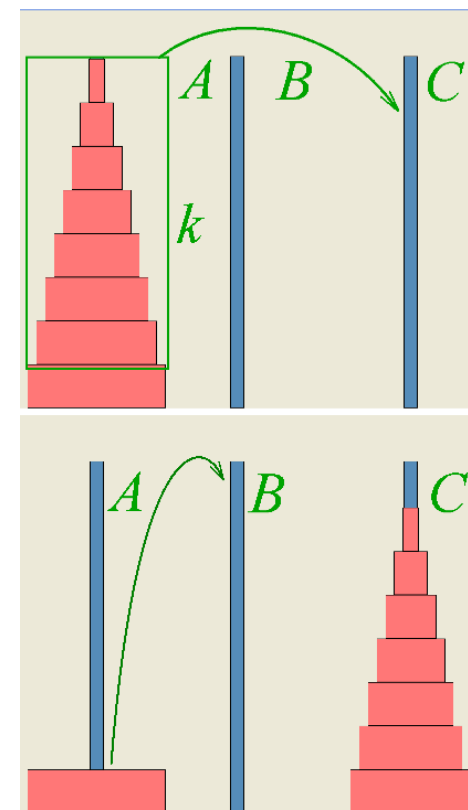
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k +$$



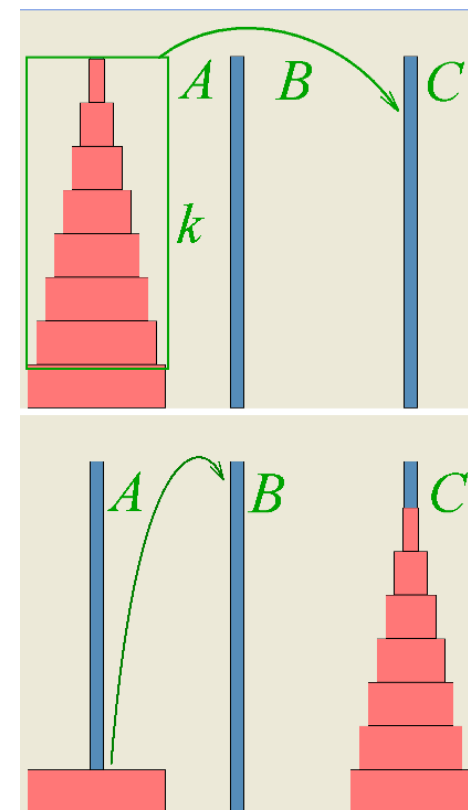
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k + 1 +$$



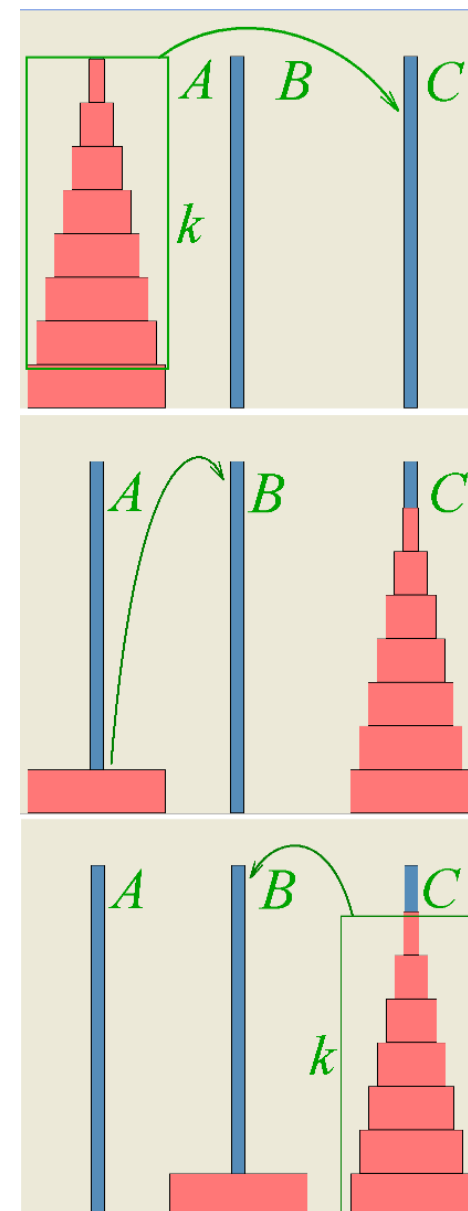
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k + 1 +$$



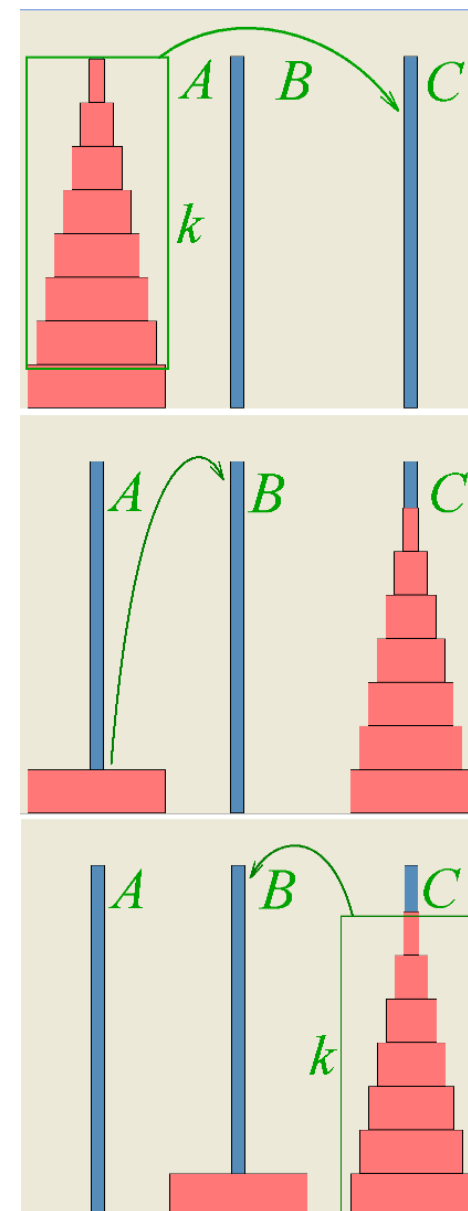
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k + 1 + p_k$$



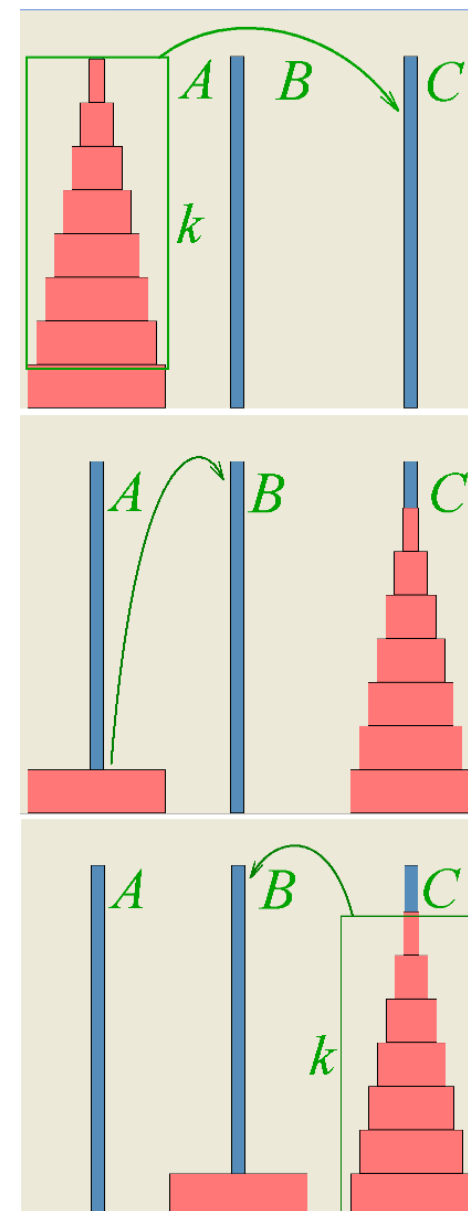
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k + 1 + p_k = 2p_k + 1$$



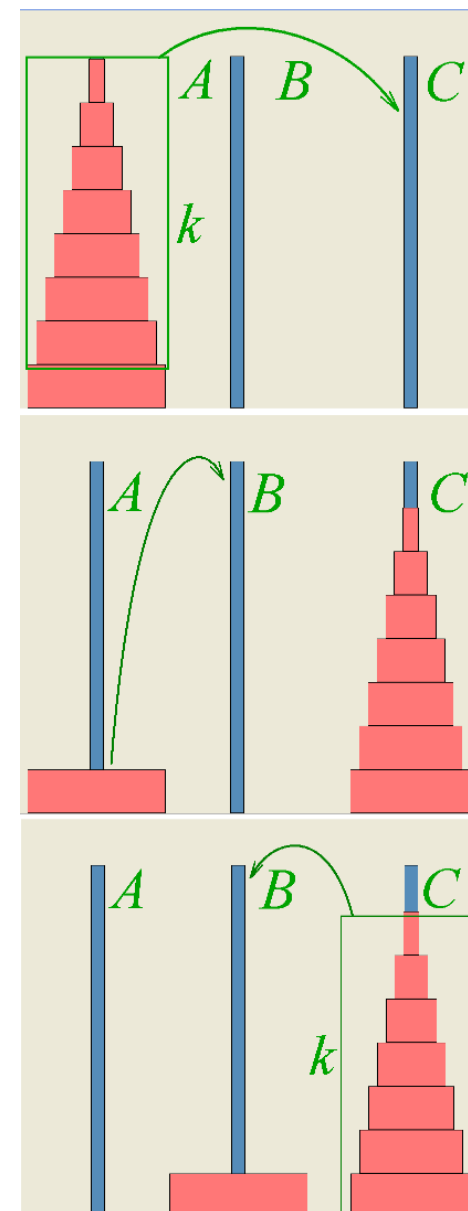
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

$$p_{k+1} = p_k + 1 + p_k = 2p_k + 1 \stackrel{IP}{=} 2 \cdot (2^k - 1) + 1$$



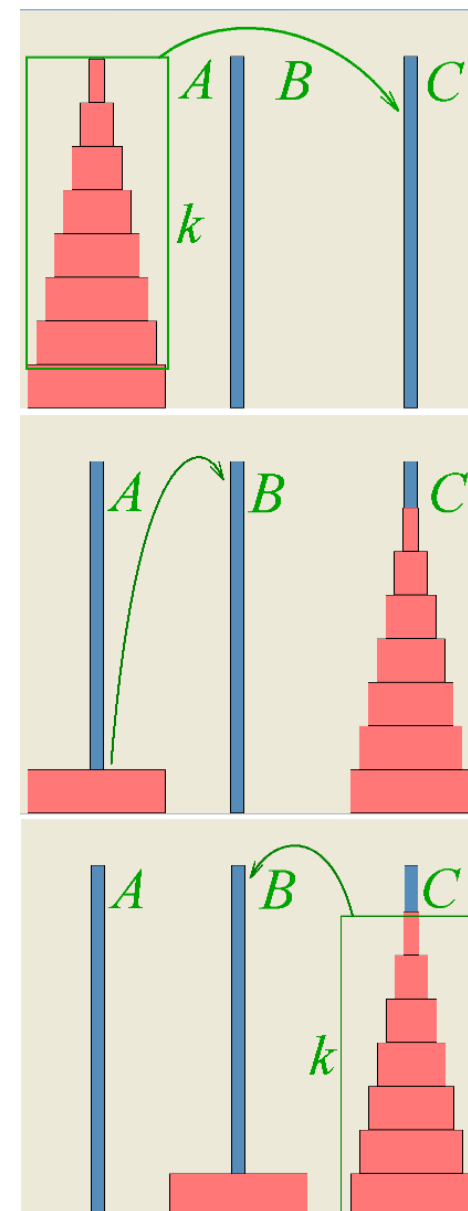
Kdy nastane konec světa?

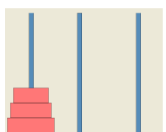
Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$

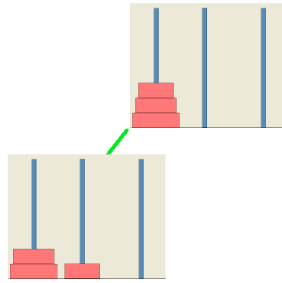
Důkaz: $n = 1 \Rightarrow p_1 = 2^1 - 1 = 1$

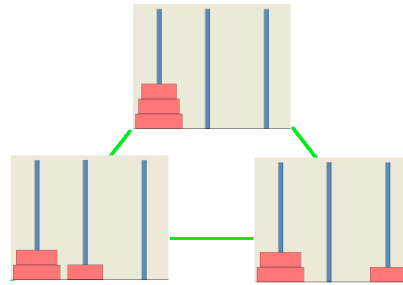
Indukční předpoklad: $p_k = 2^k - 1$

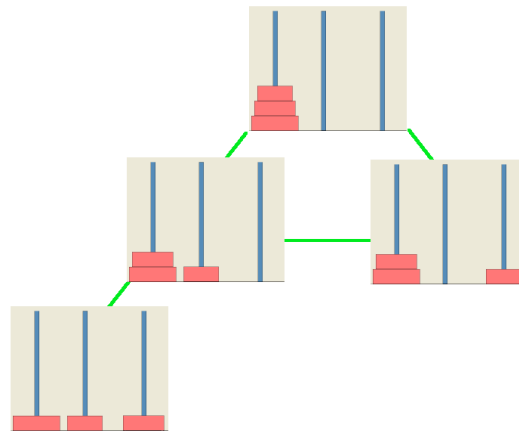
$$p_{k+1} = p_k + 1 + p_k = 2p_k + 1 \stackrel{IP}{=} 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

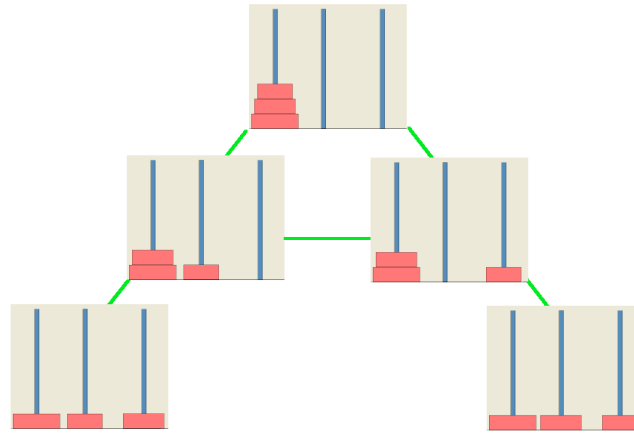


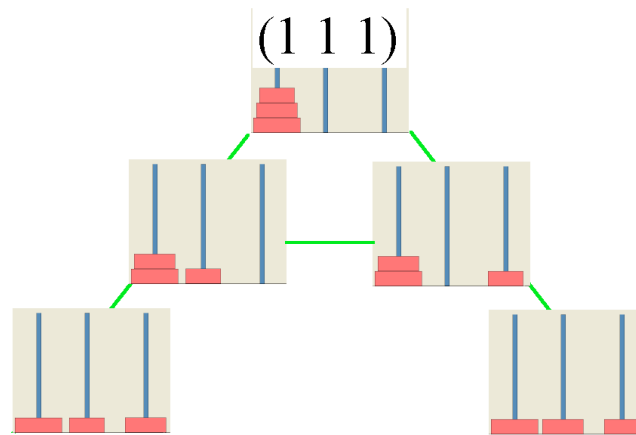


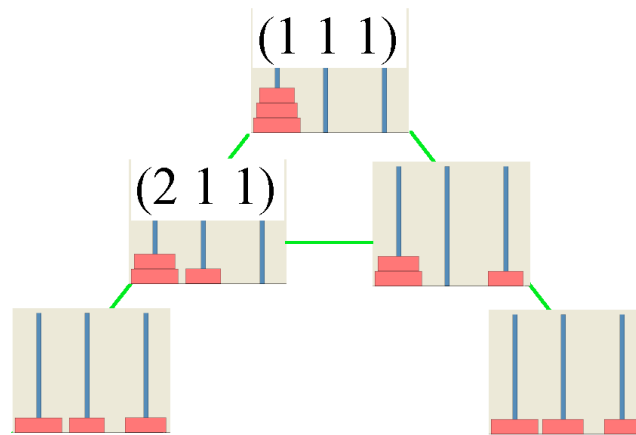


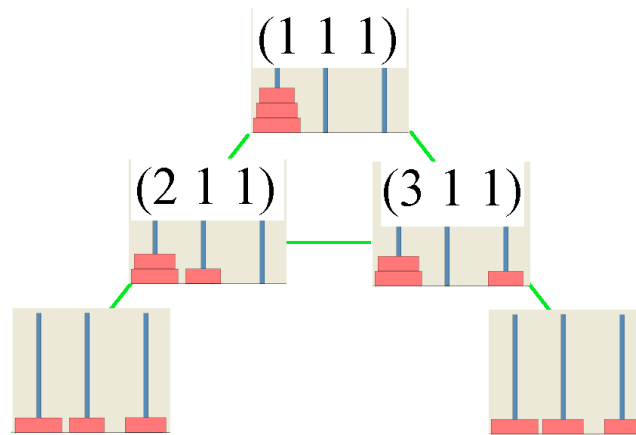


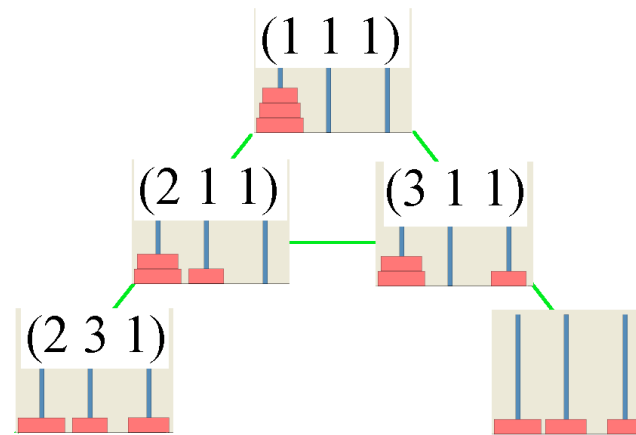


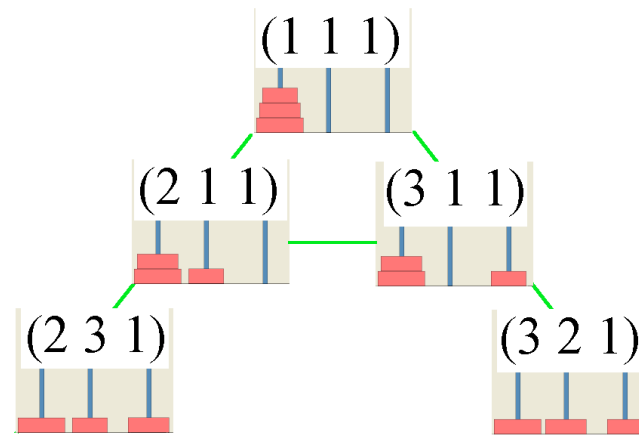


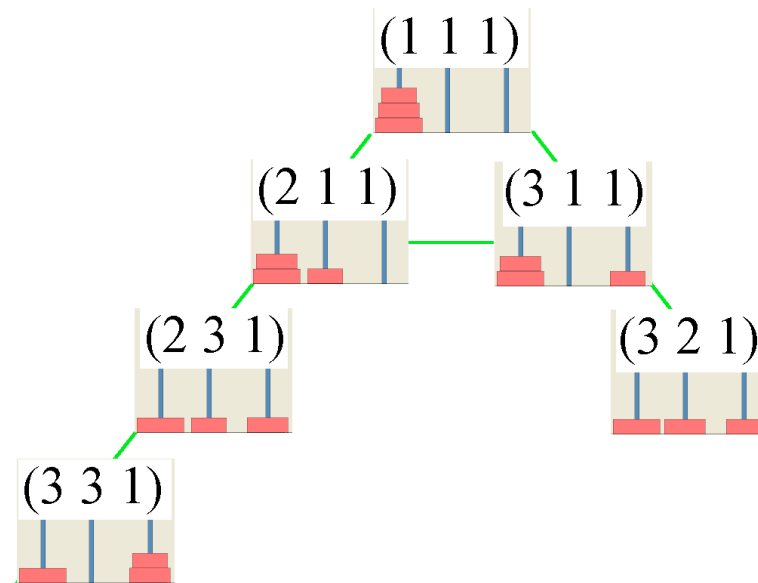


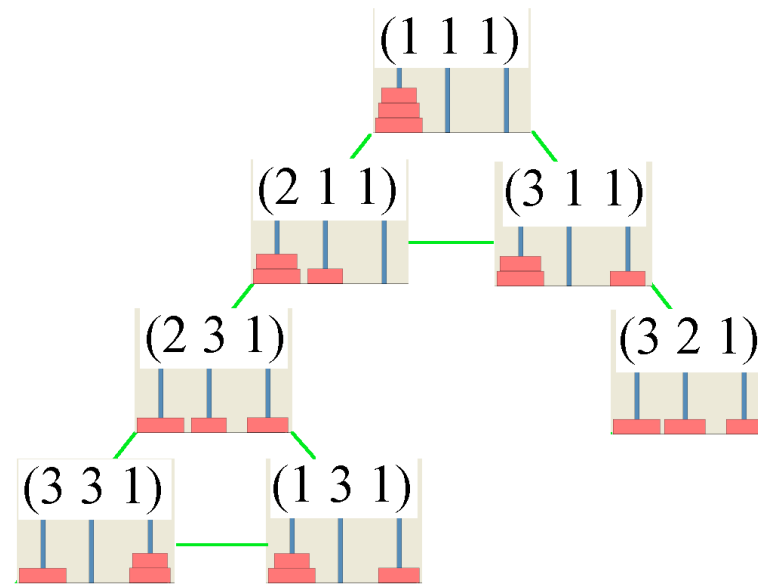


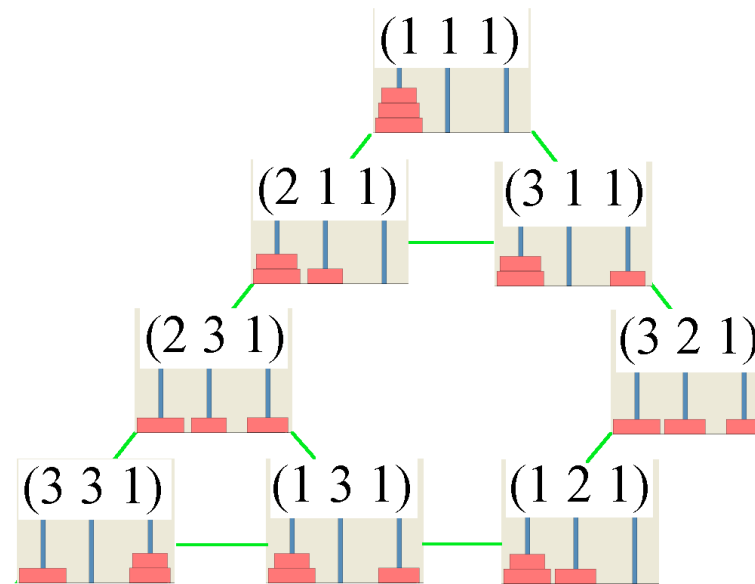


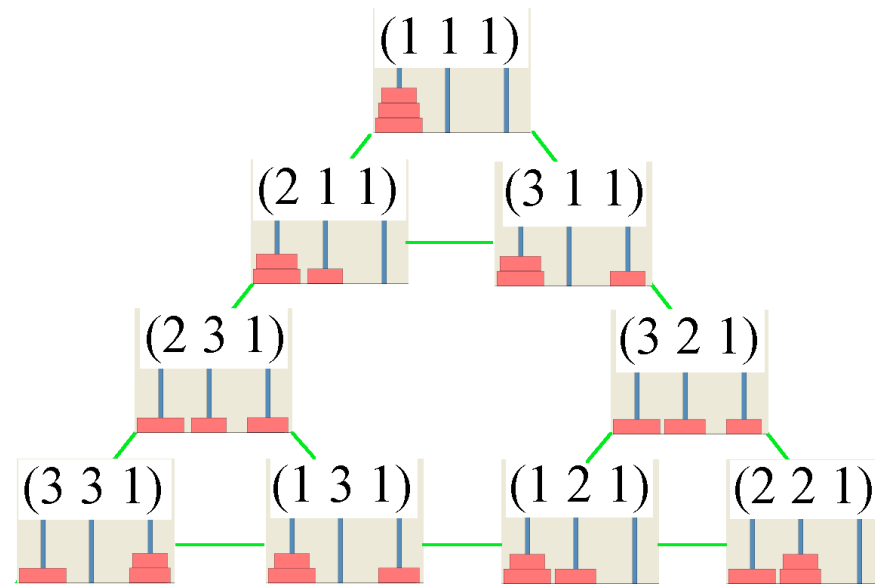


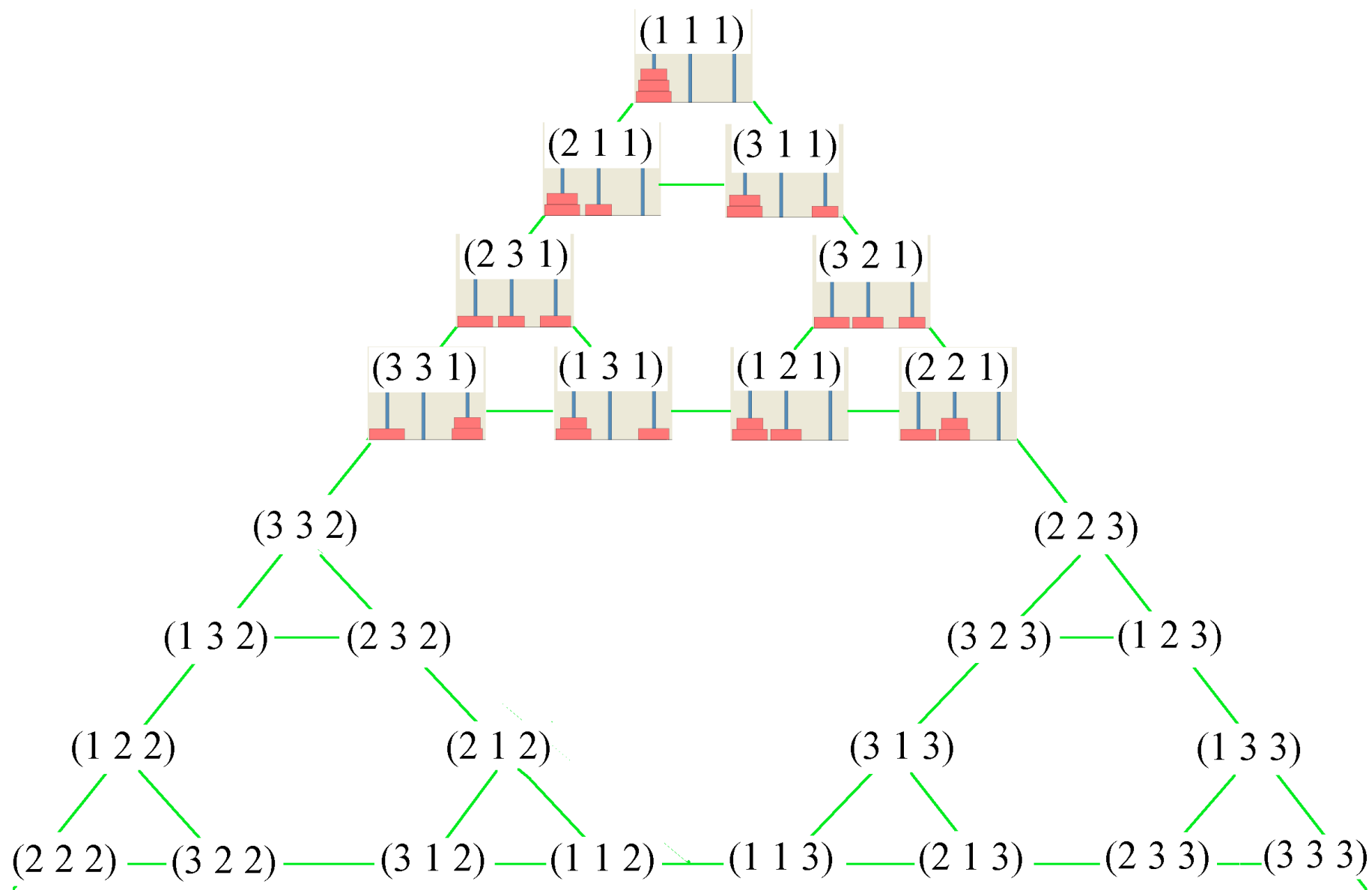




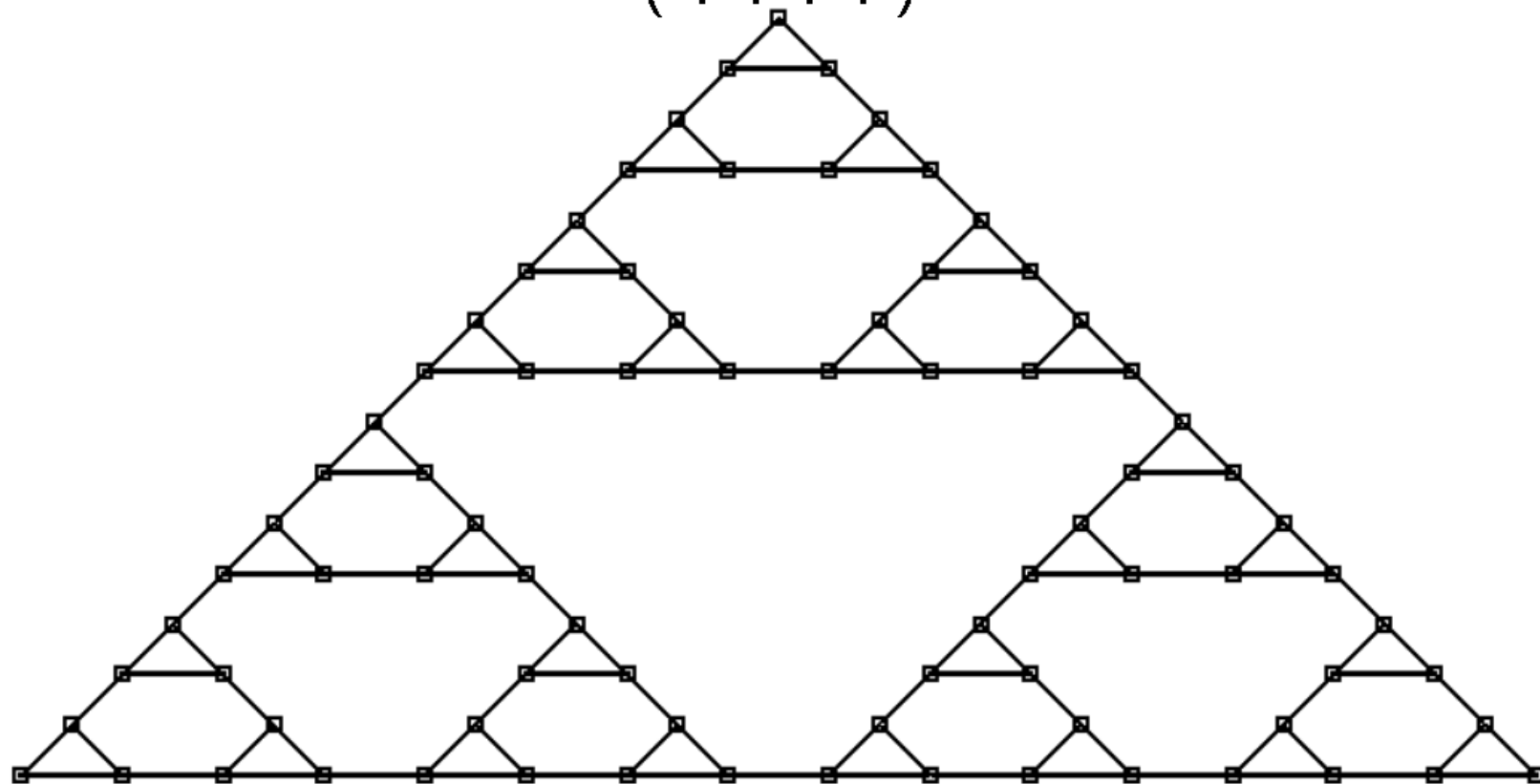








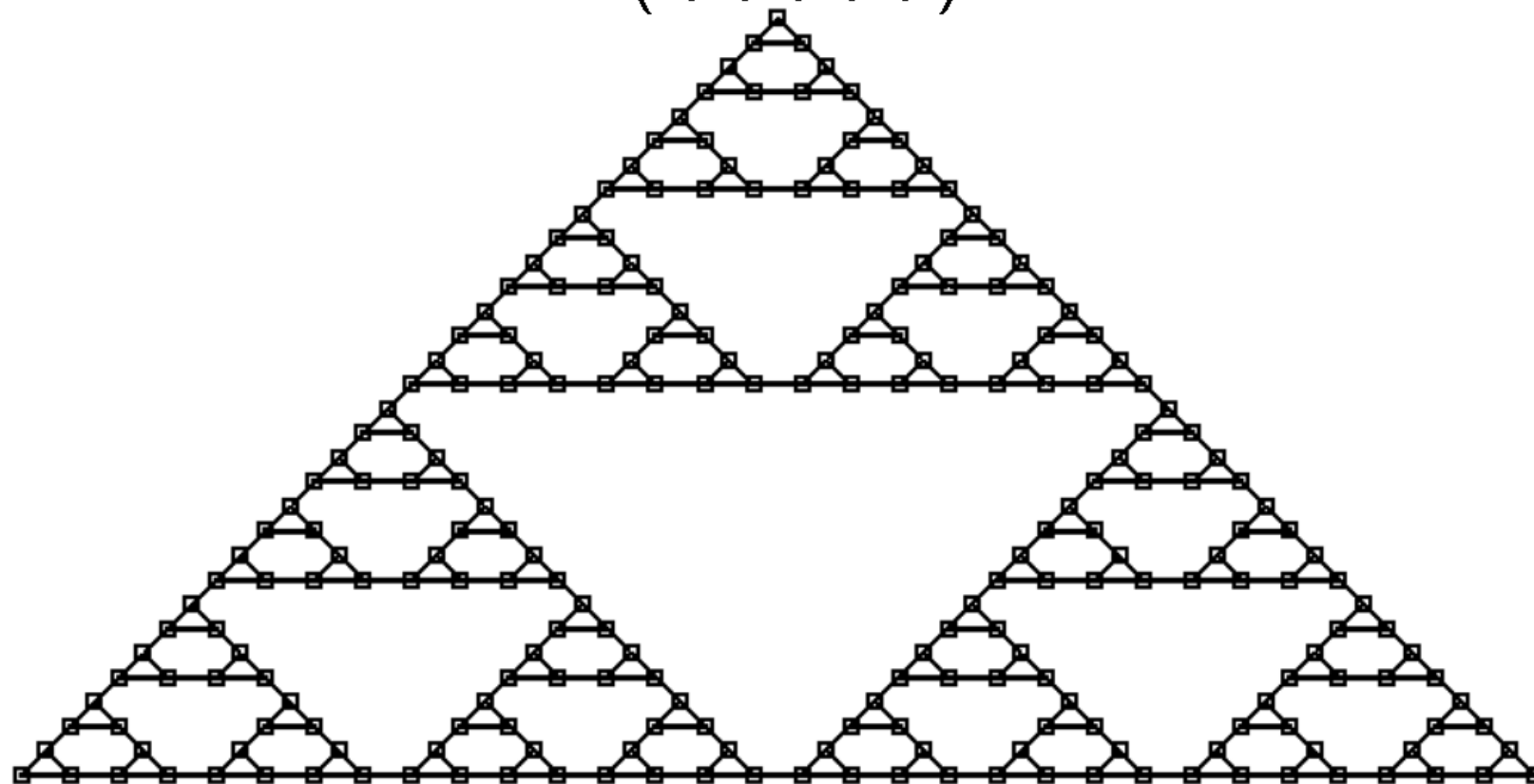
$(1\ 1\ 1\ 1)$



$(2\ 2\ 2\ 2)$

$(3\ 3\ 3\ 3)$

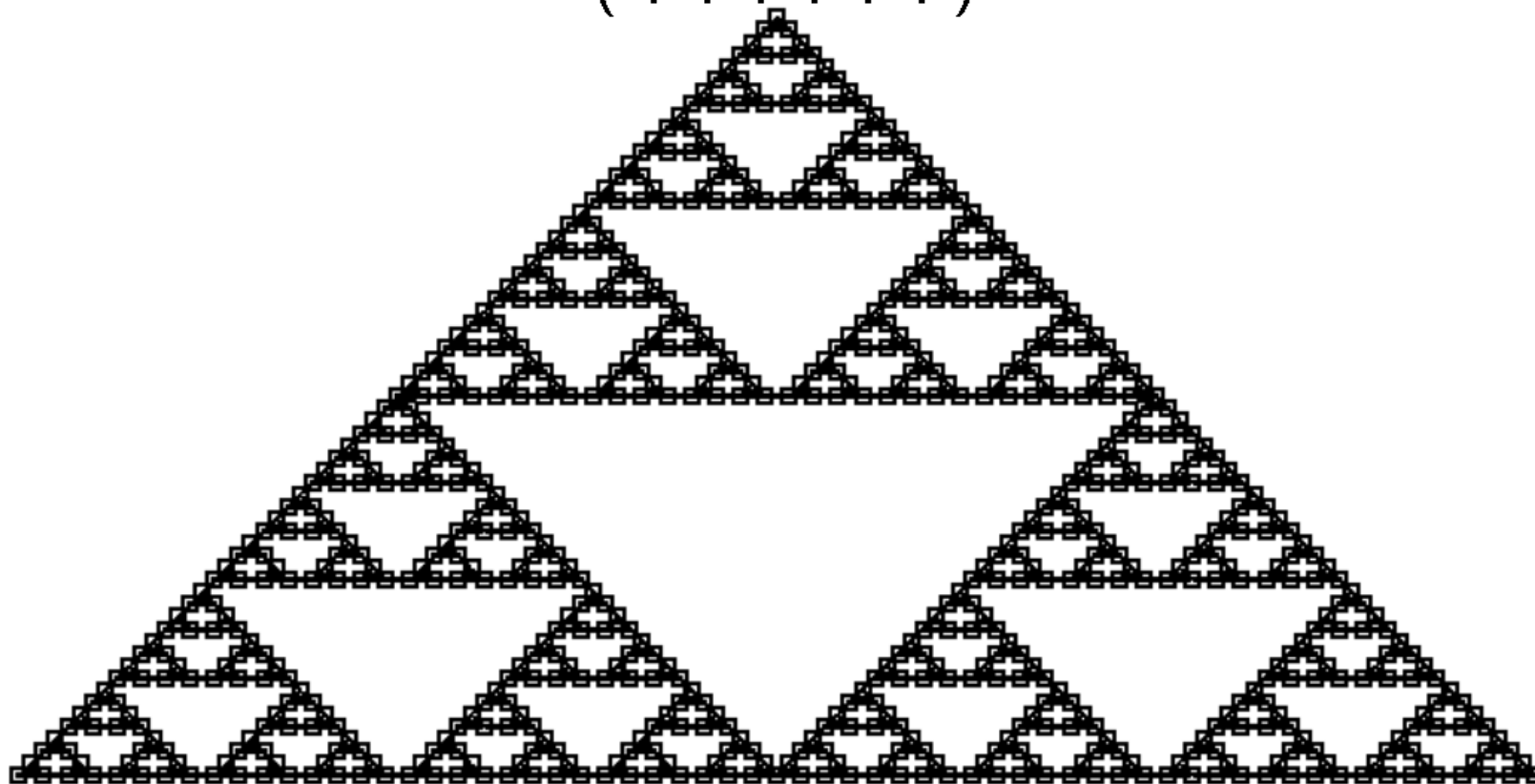
(1 1 1 1 1)



(2 2 2 2 2)

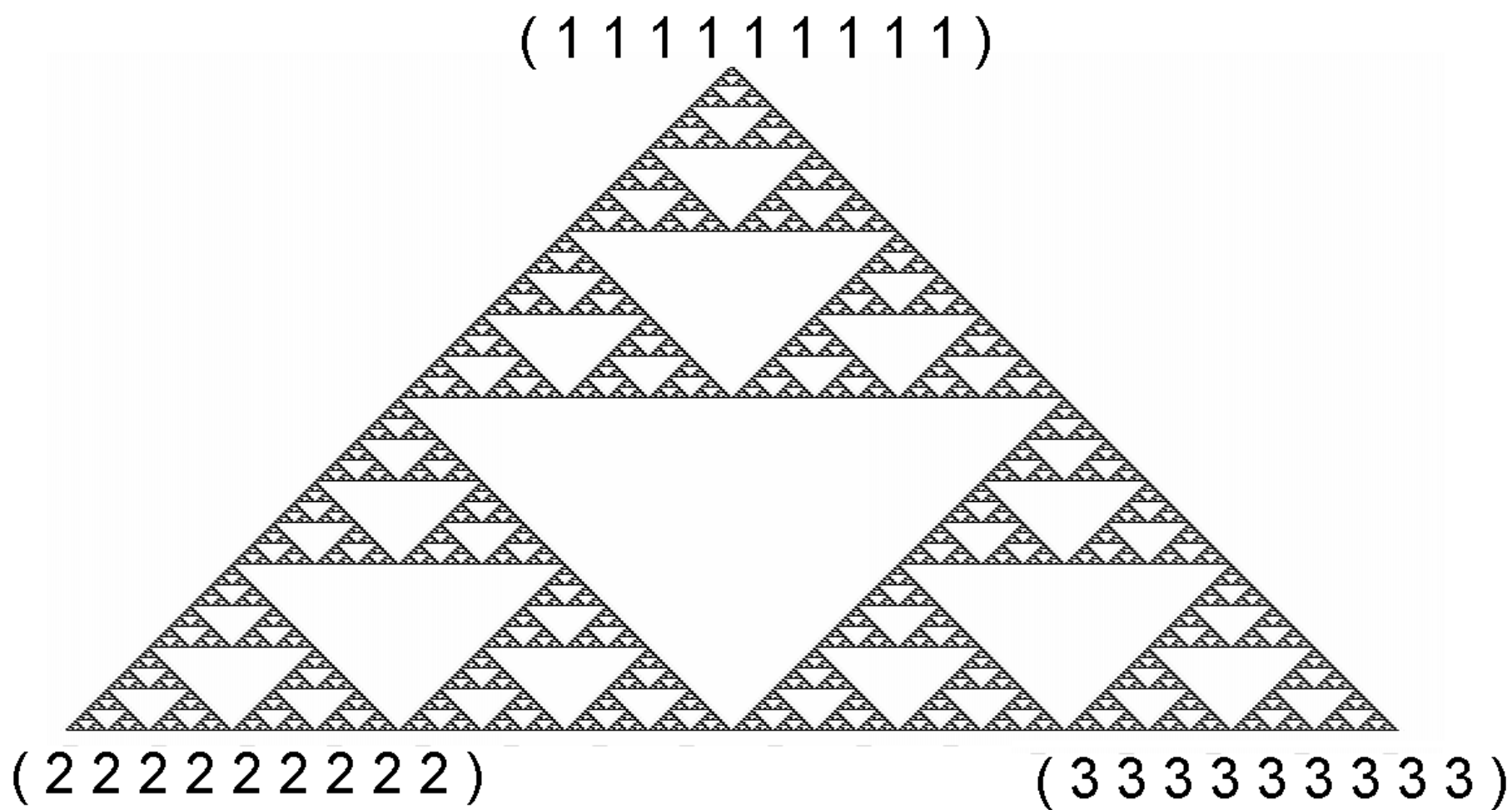
(3 3 3 3 3)

(1 1 1 1 1 1)



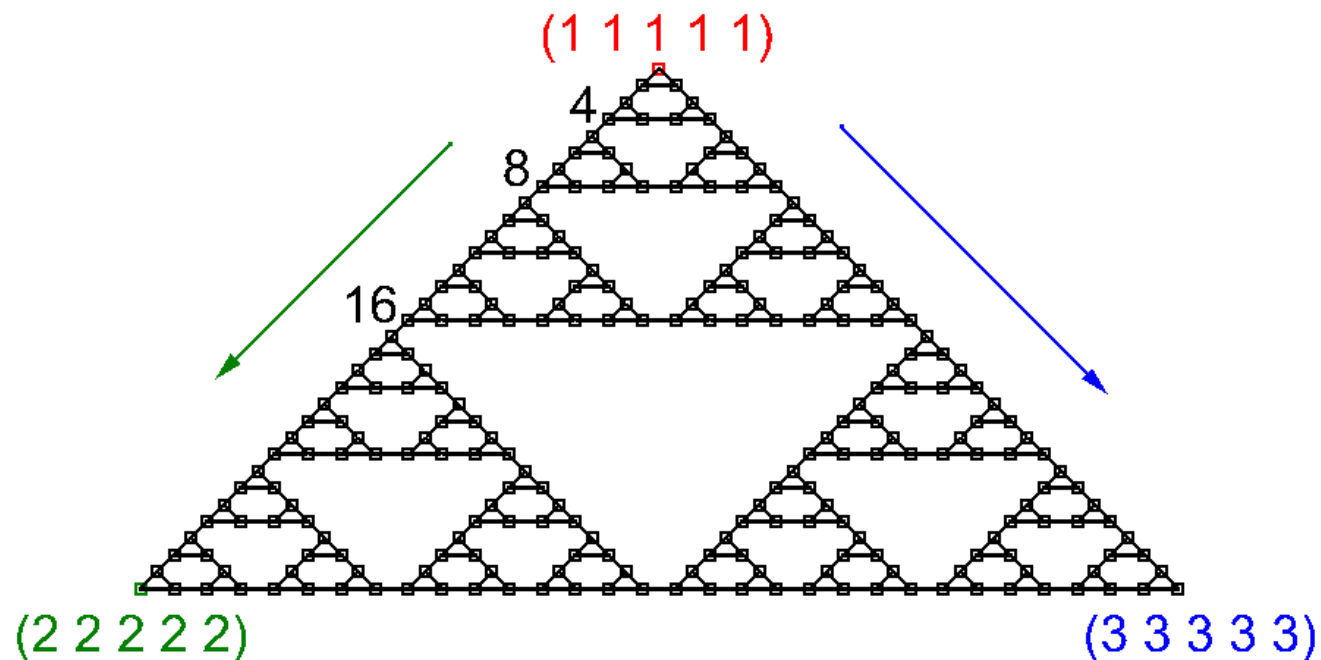
(2 2 2 2 2 2)

(3 3 3 3 3 3)



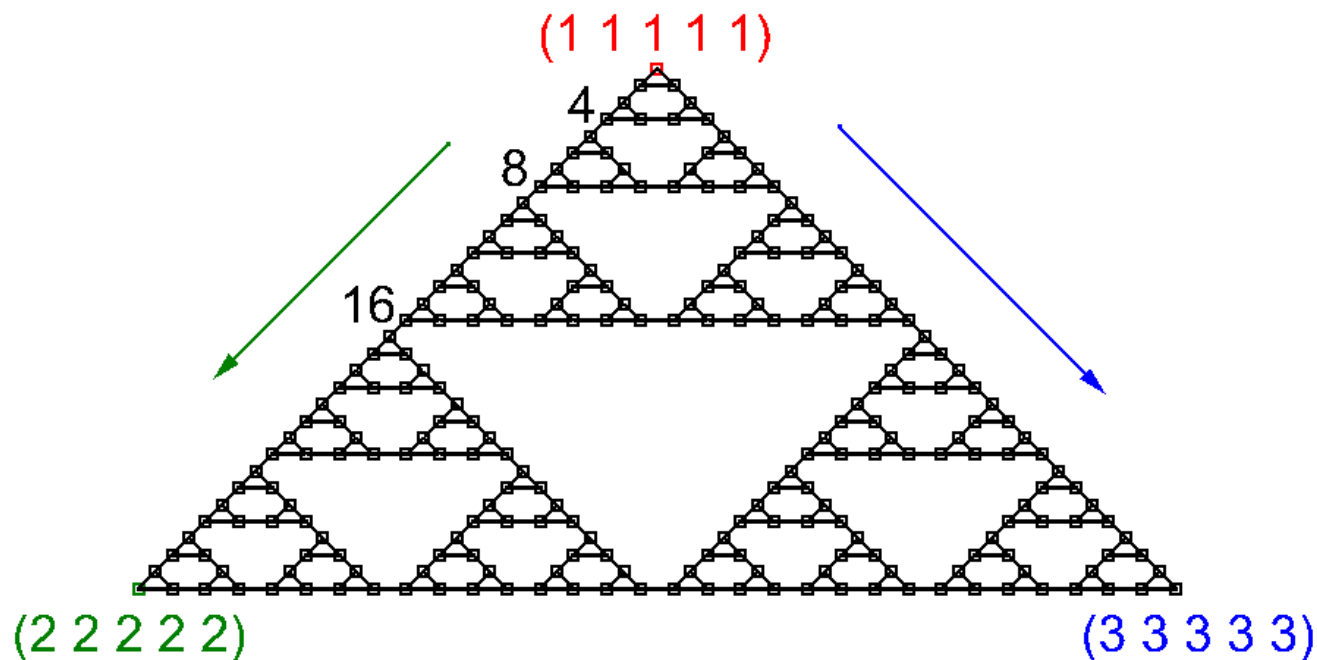
Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$



Kdy nastane konec světa?

Věta: minimální počet p_n přenesení n kotoučů je $p_n = 2^n - 1$



$$p_{64} = 2^{64} - 1$$

Kdy nastane konec světa?

Délka existence světa

$$p_{64} = 2^{64} - 1 \quad \text{dní}$$

Kdy nastane konec světa?

Délka existence světa

$$p_{64} = 2^{64} - 1 \quad \text{dní}$$



Kdy nastane konec světa?

Délka existence světa

$$p_{64} = 2^{64} - 1 \quad \text{dní}$$



Odměna mudrce Sissa ibn Dahira za vynález šachové hry

Kdy nastane konec světa?

Délka existence světa

$$p_{64} = 2^{64} - 1 \quad \text{dní}$$



Odměna mudrce Sissa ibn Dahira za vynález šachové hry

$$p_{64} = 2^{64} - 1 \quad \text{zrn pšenice}$$

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědno“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědono“ na čas:

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisícem

„převědono“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědono“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisícem

„převědono“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědono“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ hodin
 $5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ dní

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědno“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědno“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

$5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ *dní*

$213\,503\,982\,334\,601 : 365 \approx 584\,942\,417\,355$ *let*

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědono“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědono“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

$5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ *dní*

$213\,503\,982\,334\,601 : 365 \approx 584\,942\,417\,355$ *let*

$584\,942\,417\,355 : (13,8 \cdot 10^9) \approx 42$

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převeďeno“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převeďeno“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

$5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ *dní*

$213\,503\,982\,334\,601 : 365 \approx 584\,942\,417\,355$ *let*

$584\,942\,417\,355 : (13,8 \cdot 10^9) \approx 42$ *„dosavadních existencí vesmíru“*

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědno“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědno“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

$5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ *dní*

$213\,503\,982\,334\,601 : 365 \approx 584\,942\,417\,355$ *let*

$584\,942\,417\,355 : (13,8 \cdot 10^9) \approx 42$ *„dosavadních existencí vesmíru“*

Kdy nastane konec světa podle tajných buddhistických nauk?

Kdy nastane konec světa?

Číslo $p_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

„převědno“ na zrna pšenice:

současná roční celosvětová produkce pšenice znásobena tisíci

„převědno“ na čas:

Jak dlouho poběží program?

Předpokládejme jeden kotouč za sekundu:

$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 : 3600 \approx 5\,124\,095\,576\,030\,431$ *hodin*

$5\,124\,095\,576\,030\,431 : 24 \approx 213\,503\,982\,334\,601$ *dní*

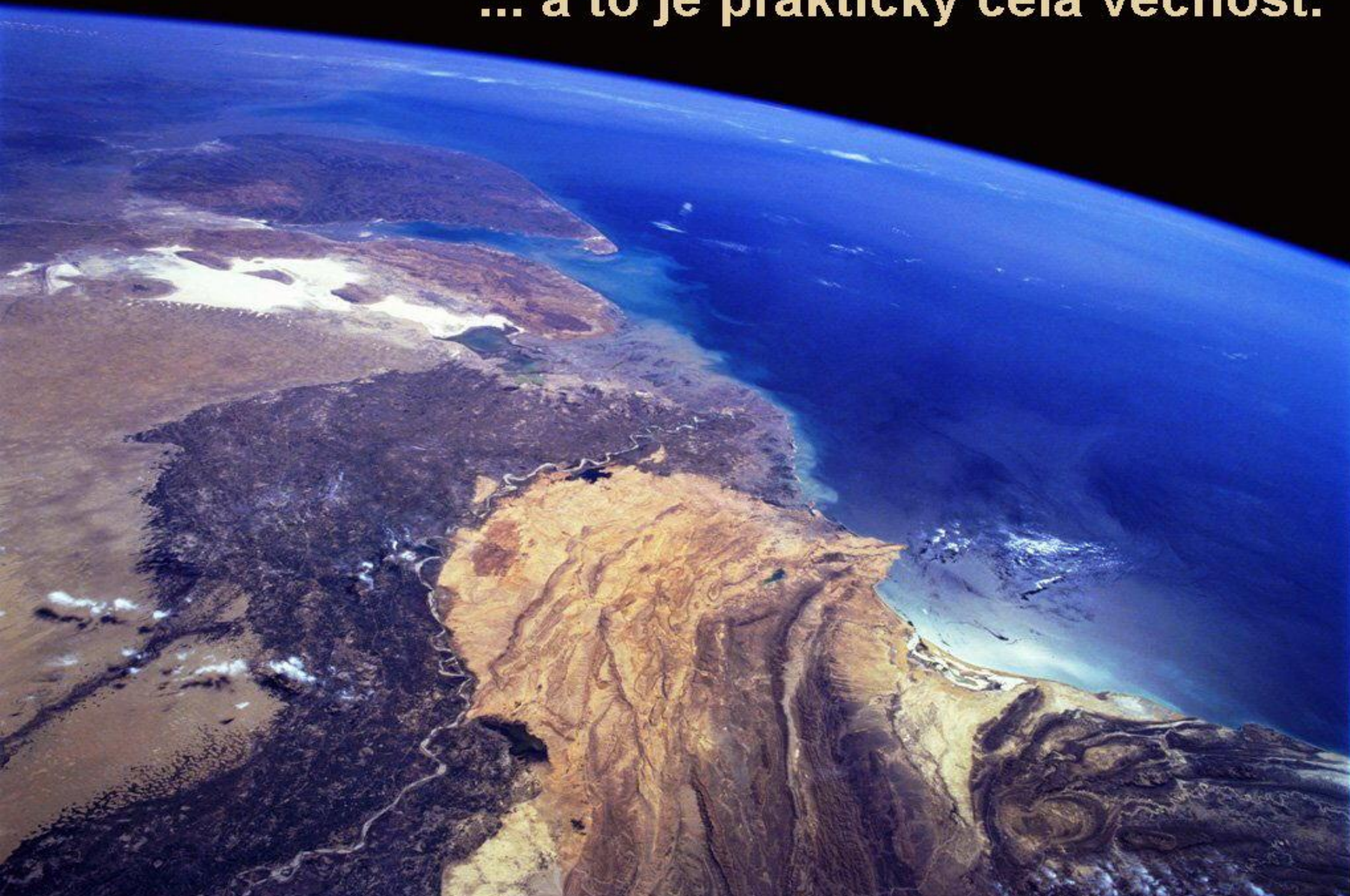
$213\,503\,982\,334\,601 : 365 \approx 584\,942\,417\,355$ *let*

$584\,942\,417\,355 : (13,8 \cdot 10^9) \approx 42$ *„dosavadních existencí vesmíru“*

Kdy nastane konec světa podle tajných buddhistických nauk?

$\approx 42 \cdot 3600 \cdot 24 = 3\,628\,800$ *„dosavadních existencí vesmíru“*

... a to je prakticky celá věčnost.



Děkuji za pozornost.

