Několik pohledů do lineární algebry

Jindřich Bečvář

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Poděbrady, 19. srpna 2019

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/∼becvar
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm

Osnova

Pokus o propojení matematiky, metodiky a historie

Různé pohledy na soustavu lineárních rovnic

- Soustavy lineárních rovnic na základní a střední škole:
  - speciální případy, malé soustavy 2×2, 3×3
  - většinou jediné řešení
  - metoda: dosazovací, sčítací, srovnávací, ...
  - postupná eliminace neznámých
  - matice, determinanty, Gaussův algoritmus, Cramerovo pravidlo, ...

Různé pohledy na soustavu lineárních rovnic

- Soustavy lineárních rovnic na základní a střední škole:
  - speciální případy, malé soustavy 2×2, 3×3
  - většinou jediné řešení
  - metoda: dosazovací, sčítací, srovnávací, ...
  - postupná eliminace neznámých
  - matice, determinanty, Gaussův algoritmus, Cramerovo pravidlo, ...

- Problémy:
  - soustavy většího počtu „hodně závislých" rovnic

- Soustavy lineárních rovnic na (některých) vysokých školách:
  - teorie řešící v plné obecnosti všechny případy
  - v rámci přednášky *Lineární algebra* nebo *Matematika*
  - vektorové prostory, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, dimenze prostoru, matice, hodnost matice, elementární úpravy matic, determinanty, ...

- Soustavy lineárních rovnic na (některých) vysokých školách:
  - teorie řešící v plné obecnosti všechny případy
  - v rámci přednášky *Lineární algebra* nebo *Matematika*
  - vektorové prostory, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, dimenze prostoru, matice, hodnost matice, elementární úpravy matic, determinanty, ...

- Odpovědi na otázky:
  1. řešitelnost
  2. tvar množiny všech řešení
  3. metody nalezení množiny všech řešení

- Soustava n lineárních rovnic o m neznámých:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Známé veličiny: $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ T$ – komutativní těleso$)$

Neznámé veličiny: $x_j \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ T)$

- Soustava n lineárních rovnic o m neznámých:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n. \end{array}$$

Známé veličiny: $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ T$ – komutativní těleso$)$

Neznámé veličiny: $x_j \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ T)$

- Matice soustavy – $\mathbb{A}$, rozšířená matice – $(\mathbb{A}|b)$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (\mathbb{A}|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

typ $n \times m$ typ $n \times (m+1)$

- Vyřešit soustavu lineárních rovnic:
  - najít všechny m-tice $(x_1, \ldots, x_m)$, které jí „vyhovují“
  - soustava řešitelná, soustava neřešitelná

- Jiné zápisy soustavy n lineárních rovnic o m neznámých:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad i = 1,\dots,n\,,$$

$$\mathbb{A}\cdot x = b\,, \qquad \mathbb{A}\cdot x^{\mathsf{T}} = b^{\mathsf{T}}\,.$$

- Jiné zápisy soustavy n lineárních rovnic o m neznámých:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,,$$

$$\mathbb{A} \cdot x = b \,, \qquad \mathbb{A} \cdot x^{\mathsf{T}} = b^{\mathsf{T}} \,.$$

- Jiné chápání soustavy lineárních rovnic:
  - skalární součin
  - lineární zobrazení $\mathbb{A} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  - lineární formy
  - geometrické pohledy

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

- Postup:

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

- Postup:

  1. Rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$ typu $n \times (m+1)$ převedeme řádkovými elementárními úpravami na tzv. *stupňovitý* tvar typu $k \times (m+1)$.

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

- Postup:

  1. Rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$ typu $n \times (m+1)$ převedeme řádkovými elementárními úpravami na tzv. *stupňovitý* tvar typu $k \times (m+1)$.

  2. Zjistíme, zda je soustava řešitelná nebo neřešitelná. Pokud ano, je dimenze řešení rovna $m - k$.

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

- Postup:

  1. Rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$ typu $n \times (m+1)$ převedeme řádkovými elementárními úpravami na tzv. *stupňovitý* tvar typu $k \times (m+1)$.

  2. Zjistíme, zda je soustava řešitelná nebo neřešitelná. Pokud ano, je dimenze řešení rovna $m-k$.

  3. Najdeme libovolné řešení soustavy nehomogenní a $m-k$ lineárně nezávislých řešení odpovídající soustavy homogenní.

Gaussův eliminační algoritmus

- Gaussův eliminační algoritmus:

  – metoda, která vždy vede k cíli

- Postup:

  1. Rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$ typu $n \times (m+1)$ převedeme řádkovými elementárními úpravami na tzv. *stupňovitý* tvar typu $k \times (m+1)$.

  2. Zjistíme, zda je soustava řešitelná nebo neřešitelná. Pokud ano, je dimenze řešení rovna $m-k$.

  3. Najdeme libovolné řešení soustavy nehomogenní a $m-k$ lineárně nezávislých řešení odpovídající soustavy homogenní.

- Příklad: $m = 7, \ \ k = 4, \ \ m - k = 3$

$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
	$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
		$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
					$\bigstar$	$*$	$*$

★	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
	★	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
		★	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
					★	$*$	$*$

$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
	$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
		$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
					$\bigstar$	$*$	$*$

$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow$

Vypočteme jedno řešení soustavy nehomogenní:

$\star$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
	$\star$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
		$\star$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
					$\star$	$*$	$*$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

Vypočteme jedno řešení soustavy nehomogenní:

$*$	$*$	$*$	0	0	$*$	0

★	*	*	*	*	*	*	*
	★	*	*	*	*	*	*
		★	*	*	*	*	*
					★	*	*

$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow$

Vypočteme jedno řešení soustavy nehomogenní:

*	*	*	0	0	*	0

Vypočteme $m-k$ lineárně nezávislých řešení odpovídající homogenní soustavy (nesmíme zapomenout nahradit sloupec pravých stran nulami):

$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
	$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
		$\bigstar$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
					$\bigstar$	$*$	$*$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \quad \Downarrow$

Vypočteme jedno řešení soustavy nehomogenní:

$*$	$*$	$*$	0	0	$*$	0

Vypočteme $m-k$ lineárně nezávislých řešení odpovídající homogenní soustavy (nesmíme zapomenout nahradit sloupec pravých stran nulami):

$*$	$*$	$*$	1	0	$*$	0
$*$	$*$	$*$	0	1	$*$	0
$*$	$*$	$*$	0	0	$*$	1

Historie:

Historie:

- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik

Historie:

- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik
- Algoritmus *Fang čcheng*
  - *Ťiou čang suan šu* [Matematika v devíti knihách]
  - Gaussův algoritmus objeven ve staré Číně kolem roku 0

Historie:

- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik
- Algoritmus *Fang čcheng*
  - *Ťiou čang suan šu* [Matematika v devíti knihách]
  - Gaussův algoritmus objeven ve staré Číně kolem roku 0

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Historie:

- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik
- Algoritmus *Fang čcheng*
  - *Ťiou čang suan šu* [Matematika v devíti knihách]
  - Gaussův algoritmus objeven ve staré Číně kolem roku 0

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

a_{n1}	$\dots\dots$	a_{21}	a_{11}
a_{n2}	$\dots\dots$	a_{22}	a_{12}
$\vdots$			$\vdots$
a_{nn}	$\dots\dots$	a_{2n}	a_{1n}
b_n	$\dots\dots$	b_2	b_1

0	$\dots\dots$	0	a_{11}
0	$\dots\dots$	a'_{22}	a_{12}
$\vdots$			$\vdots$
a'_{nn}	$\dots\dots$	a'_{2n}	a_{1n}
b'_n	$\dots\dots$	b'_2	b_1

- Znázorňování čísel pomocí tyčinek na početní desce (již v 5. století př. Kr.)

- Znázorňování čísel pomocí tyčinek na početní desce (již v 5. století př. Kr.)
- Objev záporných čísel (kolem roku 0):
  – zachování platnosti algoritmu
  – kladná čísla – *čeng* – červené tyčinky
  – záporná čísla – *fu* – černé tyčinky
  – záporná čísla se však nesměla objevit ve výsledku

- Znázorňování čísel pomocí tyčinek na početní desce (již v 5. století př. Kr.)

- Objev záporných čísel (kolem roku 0):

  – zachování platnosti algoritmu

  – kladná čísla – *čeng* – červené tyčinky

  – záporná čísla – *fu* – černé tyčinky

  – záporná čísla se však nesměla objevit ve výsledku

- **Příklad:** Dvěma snopům z dobré úrody, třem z průměrné, čtyřem ze špatné se do 1 *tou* nedostává jeden snop z průměrné, jeden ze špatné, jeden z dobré úrody. Kolik zrní získáme z jednoho snopu dobré, průměrné, špatné úrody?

Příklad vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+4z} &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + \phantom{3y+{}} 4z &= 1 \end{aligned}$$

Příklad vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Koeficienty se zaznamenají na početní desce do „matice“ a ta se upravuje:

Příklad vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y \quad\quad &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + \quad 4z &= 1 \end{aligned}$$

Koeficienty se zaznamenají na početní desce do „matice“ a ta se upravuje:

1		2
	3	1
4	1	
1	1	1

2		2
	3	1
8	1	
2	1	1

		2
-1	3	1
8	1	
1	1	1

		2
-3	3	1
24	1	
3	1	1

		2
	3	1
25	1	
4	1	1

Příklad vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Koeficienty se zaznamenají na početní desce do „matice“ a ta se upravuje:

1		2
	3	1
4	1	
1	1	1

2		2
	3	1
8	1	
2	1	1

		2
-1	3	1
8	1	
1	1	1

		2
-3	3	1
24	1	
3	1	1

		2
	3	1
25	1	
4	1	1

Výsledek: $\quad z = \frac{4}{25}\ , \quad y = \frac{7}{25}\ , \quad x = \frac{9}{25}\ .$

- **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

- **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

  Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

- **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

  Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

  Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

■ **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

Při dobré taktice je vše poznatelné.

- **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

  Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

  Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

  Při dobré taktice je vše poznatelné.

  Pokud se však z neznámé nestane známá a ze známé známější, může být vinna nevina té známé a z viny a vína je kocovina.

- **Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic**

Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

Při dobré taktice je vše poznatelné.

Pokud se však z neznámé nestane známá a ze známé známější, může být vinna nevina té známé a z viny a vína je kocovina.

Zákon. Čím je známá známější, tím je neznámá neznámější.

Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic

Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

Při dobré taktice je vše poznatelné.

Pokud se však z neznámé nestane známá a ze známé známější, může být vinna nevina té známé a z viny a vína je kocovina.

Zákon. Čím je známá známější, tím je neznámá neznámější.

V teorii míry má tento zákon jinou formulaci.

Malá filozofická úvaha o h'řešení rovnic

Rovnice s jednou neznámou se nejlépe řeší s jednou známou.

Buď se neznámá stane známou, nebo se známá stane známější.

Při dobré taktice je vše poznatelné.

Pokud se však z neznámé nestane známá a ze známé známější, může být vinna nevina té známé a z viny a vína je kocovina.

Zákon. Čím je známá známější, tím je neznámá neznámější.

V teorii míry má tento zákon jinou formulaci.

Zákon. Míra přístupnosti známé je přímo úměrná míře nepřístupnosti neznámé.

- **Teorie řešení soustav více rovnic**

- **Teorie řešení soustav více rovnic**

  s více neznámými s jednou známou vznikne jednoduchým zobecněním a přenesením výsledků z teorie řešení jedné rovnice s jednou neznámou s jednou známou.

- **Teorie řešení soustav více rovnic**

  s více neznámými s jednou známou vznikne jednoduchým zobecněním a přenesením výsledků z teorie řešení jedné rovnice s jednou neznámou s jednou známou.

  Přenechávám tuto problematiku posluchačům.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

  Záleží totiž nejen na vazbách uvažovaných neznámých, ale zejména na vztazích zmíněných známých.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

  Záleží totiž nejen na vazbách uvažovaných neznámých, ale zejména na vztazích zmíněných známých.

  Další neméně podstatnou věcí je nejen to, v jakých tvarech se vyskytují neznámé, ale zejména jaké tvary mají známé.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

  Záleží totiž nejen na vazbách uvažovaných neznámých, ale zejména na vztazích zmíněných známých.

  Další neméně podstatnou věcí je nejen to, v jakých tvarech se vyskytují neznámé, ale zejména jaké tvary mají známé.

  Jednou z nejdůležitějších věcí jsou samozřejmě všestranné schopnosti h'řešitele při úpravách neznámých i známých.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

  Záleží totiž nejen na vazbách uvažovaných neznámých, ale zejména na vztazích zmíněných známých.

  Další neméně podstatnou věcí je nejen to, v jakých tvarech se vyskytují neznámé, ale zejména jaké tvary mají známé.

  Jednou z nejdůležitějších věcí jsou samozřejmě všestranné schopnosti h'řešitele při úpravách neznámých i známých.

  Doporučuji všem posluchačům, aby problematiku soustav rovnic řešili (experi)mentálně.

- **Teorie řešení soustav dvou rovnic**

  s dvěma neznámými s dvěma známými je podstatně složitější a pro nedostatek času a místa se vymyká této přednášce.

  Záleží totiž nejen na vazbách uvažovaných neznámých, ale zejména na vztazích zmíněných známých.

  Další neméně podstatnou věcí je nejen to, v jakých tvarech se vyskytují neznámé, ale zejména jaké tvary mají známé.

  Jednou z nejdůležitějších věcí jsou samozřejmě všestranné schopnosti h'řešitele při úpravách neznámých i známých.

  Doporučuji všem posluchačům, aby problematiku soustav rovnic řešili (experi)mentálně.

  Výzkum problematiky řešení soustav *n* rovnic pro větší *n* naráží na problémy, neboť nejsou lidi.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo: Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice řádu n nad tělesem T, pak má soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ jediné řešení

$$x_1 = \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{A}}\ , \ \dots\ , \ x_n = \frac{\det \mathbb{A}_n}{\det \mathbb{A}}\ ,$$

kde matice $\mathbb{A}_i$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ záměnou i-tého sloupce za sloupec b.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo: Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice řádu n nad tělesem T, pak má soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ jediné řešení

$$x_1 = \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{A}}\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = \frac{\det \mathbb{A}_n}{\det \mathbb{A}}\ ,$$

kde matice $\mathbb{A}_i$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ záměnou i-tého sloupce za sloupec b.

Obecnější formulace: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem R. Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ řešením soustavy $\mathbb{A} \cdot x = b$, potom je

$$\det \mathbb{A} \cdot x_1 = \det \mathbb{A}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \det \mathbb{A} \cdot x_n = \det \mathbb{A}_n\ ,$$

kde matice $\mathbb{A}_i$ ...

Důkaz: Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ řešením, potom je:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Důkaz: Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ řešením, potom je:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je tedy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & : & x_1 & : & 0 \\ 0 & : & x_2 & : & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & : & x_n & : & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & : & b_1 & : & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & : & b_n & : & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-tý sloupec $\qquad\qquad$ i-tý sloupec

Důkaz: Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ řešením, potom je:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je tedy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & : & x_1 & : & 0 \\ 0 & : & x_2 & : & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & : & x_n & : & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & : & b_1 & : & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & : & b_n & : & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-tý sloupec $\qquad$ i-tý sloupec

Nyní užijeme větu o násobení determinantů:

$$\det \mathbb{A} \cdot x_i = \det \mathbb{A}_i$$

Důkaz: Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ řešením, potom je:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je tedy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \vdots & x_1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & x_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & x_n & \vdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & b_1 & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & b_n & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-tý sloupec $\qquad$ i-tý sloupec

Nyní užijeme větu o násobení determinantů:

$$\det \mathbb{A} \cdot x_i = \det \mathbb{A}_i$$

Pracujeme-li nad tělesem T a je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak je

$$x_i = \frac{\det \mathbb{A}_i}{\det \mathbb{A}} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n \ .$$

Pracujeme-li nad tělesem T a je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak je

$$x_i = \frac{\det \mathbb{A}_i}{\det \mathbb{A}} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n \; .$$

Příklady: Nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Pracujeme-li nad tělesem T a je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak je

$$x_i = \frac{\det \mathbb{A}_i}{\det \mathbb{A}} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n \; .$$

Příklady: Nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

– Soustava

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3 \; , \\ x + \; y &= 2 \; , \end{aligned} \qquad \text{přejde v soustavu} \qquad \begin{aligned} 2x &= 1 \; , \\ 2y &= 3 \; , \end{aligned}$$

která nemá řešení.

Pracujeme-li nad tělesem T a je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak je

$$x_i = \frac{\det \mathbb{A}_i}{\det \mathbb{A}} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n\ .$$

Příklady: Nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

– Soustava

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3\ , \\ x + \ \ y &= 2\ , \end{aligned} \qquad \text{přejde v soustavu} \qquad \begin{aligned} 2x &= 1\ , \\ 2y &= 3\ , \end{aligned}$$

která nemá řešení.

– Soustava

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1\ , \\ x + \ \ y &= 3\ , \end{aligned} \qquad \text{přejde v soustavu} \qquad \begin{aligned} 2x &= 0\ , \\ 2y &= 2\ , \end{aligned}$$

která má řešení $(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)$.

Pracujeme-li nad tělesem T a je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak je

$$x_i = \frac{\det \mathbb{A}_i}{\det \mathbb{A}} \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n \, .$$

Příklady: Nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

– Soustava

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3 \, , \\ x + y &= 2 \, , \end{aligned} \qquad \text{přejde v soustavu} \qquad \begin{aligned} 2x &= 1 \, , \\ 2y &= 3 \, , \end{aligned}$$

která nemá řešení.

– Soustava

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \, , \\ x + y &= 3 \, , \end{aligned} \qquad \text{přejde v soustavu} \qquad \begin{aligned} 2x &= 0 \, , \\ 2y &= 2 \, , \end{aligned}$$

která má řešení $(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)$.

Pozor! Původní soustavě vyhovují pouze řešení $(0, 3), (2, 1)$.

Historie:

- Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik
  Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (1750)
  – vrcholné dílo teorie algebraických křivek
  – Problém: najít rovnici kuželosečky dané pěti body

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$(x_1, y_1)\ ,\ \ldots\ ,\ (x_5, y_5)$$

  – Apendix: *Cramerovo pravidlo*, pojem determinantu

Historie:

- Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik
  Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (1750)
  – vrcholné dílo teorie algebraických křivek
  – Problém: najít rovnici kuželosečky dané pěti body

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$(x_1, y_1)\ ,\ \ldots\ ,\ (x_5, y_5)$$

  – Apendix: *Cramerovo pravidlo*, pojem determinantu
- Důsledky:
  – zrod teorie determinantů
  – bouřlivý rozvoj a úspěšnost této teorie v 19. století
  – snahy o uvedení determinantů na střední školy
  – ve Francii bylo koncem 19. století Cramerovo pravidlo hlavním tématem státních zkoušek z matematiky

- Carl Benjamin Boyer (1906–1976), americký historik matematiky
  Colin Maclaurin and Cramer's Rule (1966)
  – upozornil na to, že Cramerovo pravidlo bylo publikováno již roku 1748 a užíváno již od roku 1729

- Carl Benjamin Boyer (1906–1976), americký historik matematiky
  Colin Maclaurin and Cramer's Rule (1966)
  – upozornil na to, že Cramerovo pravidlo bylo publikováno již roku 1748 a užíváno již od roku 1729

- Colin Maclaurin (1698–1746), anglický matematik
  Treatise of Algebra (1748)

- Carl Benjamin Boyer (1906–1976), americký historik matematiky
  Colin Maclaurin and Cramer's Rule (1966)
  – upozornil na to, že Cramerovo pravidlo bylo publikováno již roku 1748 a užíváno již od roku 1729

- Colin Maclaurin (1698–1746), anglický matematik
  Treatise of Algebra (1748)

- Bruce A. Hedman
  An Earlier Date for "Cramer's Rule" (1999)
  – opis části Maclaurinovy Algebry z roku 1729 téměř shodný s jeho pozdější učebnicí
  – potvrzení Boyerova názoru

Frobeniova věta

Frobeniova věta: Soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ je řešitelná právě tehdy, je-li hodnost rozšířené matice rovna hodnosti matice soustavy, tj.

$$r(\mathbb{A}|b) = r(\mathbb{A}) \ .$$

To nastane právě tehdy, je-li sloupec b pravých stran lineární kombinací sloupců matice $\mathbb{A}$.

Frobeniova věta

Frobeniova věta: Soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ je řešitelná právě tehdy, je-li hodnost rozšířené matice rovna hodnosti matice soustavy, tj.

$$r(\mathbb{A}|b) = r(\mathbb{A}) \ .$$

To nastane právě tehdy, je-li sloupec b pravých stran lineární kombinací sloupců matice $\mathbb{A}$.

Důkaz: Soustavu $\mathbb{A} \cdot x = b$ zapišme takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \cdot x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Frobeniova věta

Frobeniova věta: Soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ je řešitelná právě tehdy, je-li hodnost rozšířené matice rovna hodnosti matice soustavy, tj.

$$r(\mathbb{A}|b) = r(\mathbb{A}) \ .$$

To nastane právě tehdy, je-li sloupec b pravých stran lineární kombinací sloupců matice $\mathbb{A}$.

Důkaz: Soustavu $\mathbb{A} \cdot x = b$ zapišme takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \cdot x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Quod erat demonstrandum.

- Poznámky:
  - zviditelnění podstaty tvrzení věty i jejího důkazu
  - připomíná orientální geometrické důkazy: obrázek a pokyn „Dívej se!“
  - dobře definované pojmy: lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, matice, hodnost matice, …

Historie:

- Až do 19. století řešeny soustavy lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí (*Fang čcheng*, *Cramerovo pravidlo*):

  – dlouhá cesta od konkrétních úloh k teorii

Historie:

- Až do 19. století řešeny soustavy lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí (*Fang čcheng*, *Cramerovo pravidlo*):

  – dlouhá cesta od konkrétních úloh k teorii

- Teprve v 19. století řešeny obecnější případy:

  – obdélníková matice, čtvercová singulární matice

  – komplikováno neujasněností číselného oboru: $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Q}$.

Historie:

- Až do 19. století řešeny soustavy lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí (*Fang čcheng*, *Cramerovo pravidlo*):

  – dlouhá cesta od konkrétních úloh k teorii

- Teprve v 19. století řešeny obecnější případy:

  – obdélníková matice, čtvercová singulární matice

  – komplikováno neujasněností číselného oboru: $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Q}$.

- Nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy lineárních rovnic:

  – Georg Frobenius (1849–1917), německý matematik,

  – Leopold Kronecker (1823–1891), německý matematik,

  – Alfred Capelli (1855–1910), italský matematik,

  – další matematici.

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik *An Elementary Treatise on Determinants* (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik *An Elementary Treatise on Determinants* (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik *An Elementary Treatise on Determinants* (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus $\Longrightarrow$

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus $\Longrightarrow$ Lewis Carroll ($\star$1856) – matematik, spisovatel, fotograf

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus $\Longrightarrow$ Lewis Carroll ($\star$1856) – matematik, spisovatel, fotograf

  Alenka v říši divů, *Alenka za zrcadlem*, *Sylvie a Bruno* (1996), *Zamotaný příběh* (1996), *Logika hrou* (1972)

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus $\Longrightarrow$ Lewis Carroll ($\star$1856) – matematik, spisovatel, fotograf

  Alenka v říši divů, *Alenka za zrcadlem*, *Sylvie a Bruno* (1996), *Zamotaný příběh* (1996), *Logika hrou* (1972)
  - fotografoval již 16 let po vzniku prvních daguerrotypií
  - výstava *150 let fotografie* (Praha, 1989)

- Priorita: C. L. Dodgson (1832–1898), anglický matematik
  An Elementary Treatise on Determinants (1867)
  - musel opsat pojem hodnosti, který tehdy ještě nebyl vytvořen
  - *hodnost*: G. Frobenius 1878, *nulita*: J. J. Sylvester (1814–1897), asi 1881
- Kdo byl Charles Lutwidge Dodgson?
  - Carolus Lodovicus $\Longrightarrow$ Lodovicus Carolus $\Longrightarrow$ Lewis Carroll ($\star$1856) – matematik, spisovatel, fotograf

  Alenka v říši divů, *Alenka za zrcadlem*, *Sylvie a Bruno* (1996), *Zamotaný příběh* (1996), *Logika hrou* (1972)
  - fotografoval již 16 let po vzniku prvních daguerrotypií
  - výstava *150 let fotografie* (Praha, 1989)
  - Učitel matematiky 5(1996), 1(21), 58–64
  - Učitel matematiky 7(1999), 2(30), 124–128

Nu, jak je libo, řekla kočka a tentokrát mizela docela pozvolna, začínajíc ocasem a končíc šklebem, jejž bylo vidět ještě chvíli potom, když už ostatek z ní byl dávno pryč.

Nu, viděla jsem už často kočku bez šklebu, pomyslela si Alenka, ale škleb bez kočky! To je nejpodivnější věc, jakou jsem viděla ve svém životě.

Proč a jak řešit neřešitelnou soustavu lineárních rovnic?

Uvažujme těleso $\mathbb{R}$ reálných čísel a vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem definovaným pro

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n)$$

rovností

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

a odvozenou normou (délkou) vektoru danou vztahem

$$||u|| = \sqrt{(u|u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \ .$$

- Proč řešit neřešitelnou soustavu lineárních rovnic?

- Proč řešit neřešitelnou soustavu lineárních rovnic?
- Hledáme závislost veličiny β na veličinách $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, která je dána např. vztahem

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \ .$$

- Proč řešit neřešitelnou soustavu lineárních rovnic?
- Hledáme závislost veličiny β na veličinách $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, která je dána např. vztahem

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \ .$$

- Hodnoty těchto veličin jsou zjištěny v n měřeních ($n \gg m$):

- Proč řešit neřešitelnou soustavu lineárních rovnic?

- Hledáme závislost veličiny β na veličinách $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, která je dána např. vztahem

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \ .$$

- Hodnoty těchto veličin jsou zjištěny v n měřeních ($n \gg m$):

	α_1	α_2	$\ldots$	α_m	β
1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2m}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nm}	b_n

- Dosazením naměřených hodnot získáme soustavu rovnic:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n
\end{array}
$$

- Dosazením naměřených hodnot získáme soustavu rovnic:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\
\dotfill \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n
\end{array}
$$

- Většinou máme podstatně více rovnic než neznámých (neboť je $n \gg m$), soustava lineárních rovnic

$$\mathbb{A} \cdot x = b$$

je tedy pravděpodobně **neřešitelná**. Sloupec b pravých stran tedy není lineární kombinací sloupců $s_1, s_2, \ldots, s_m$ matice soustavy, tj. $b \notin W = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$, neboli

$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m \neq b \ .$$

- Dosazením naměřených hodnot získáme soustavu rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

- Většinou máme podstatně více rovnic než neznámých (neboť je $n \gg m$), soustava lineárních rovnic

$$\mathbb{A} \cdot x = b$$

je tedy pravděpodobně **neřešitelná**. Sloupec b pravých stran tedy není lineární kombinací sloupců $s_1, s_2, \ldots, s_m$ matice soustavy, tj. $b \notin W = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$, neboli

$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m \neq b \ .$$

- My však řešení chceme!!!

- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?

- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?
- Potřebujeme nahradit sloupec $b \notin W$ pravých stran nějakým vhodným sloupcem $b^p \in W$, který je vektoru b „**nejbližší**“.

- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?
- Potřebujeme nahradit sloupec $b \notin W$ pravých stran nějakým vhodným sloupcem $b^p \in W$, který je vektoru b „**nejbližší**“.
- Co znamená nejbližší?

- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?
- Potřebujeme nahradit sloupec $b \notin W$ pravých stran nějakým vhodným sloupcem $b^p \in W$, který je vektoru b „**nejbližší**“.
- Co znamená nejbližší?
- Norma (délka) rozdílu $b - b^p$ musí být co nejmenší!

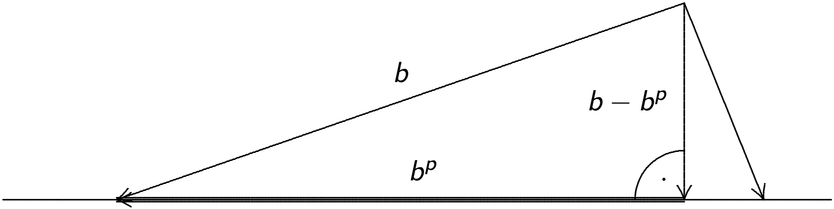
- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?
- Potřebujeme nahradit sloupec $b \notin W$ pravých stran nějakým vhodným sloupcem $b^p \in W$, který je vektoru b „**nejbližší**“.
- Co znamená nejbližší?
- Norma (délka) rozdílu $b - b^p$ musí být co nejmenší!
- Označíme-li $b - b^p = (c_1, \ldots, c_n)$, pak musí být

$$||b - b^p||^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \quad \text{co nejmenší.}$$

- Jak z neřešitelné soustavy udělat řešitelnou?
- Potřebujeme nahradit sloupec $b \notin W$ pravých stran nějakým vhodným sloupcem $b^p \in W$, který je vektoru b „**nejbližší**“.
- Co znamená nejbližší?
- Norma (délka) rozdílu $b - b^p$ musí být co nejmenší!
- Označíme-li $b - b^p = (c_1, \dots, c_n)$, pak musí být

$$||b - b^p||^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \quad \text{co nejmenší.}$$

- Metoda nejmenších čtverců.



$$W = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$$

- Pišme

$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m = b^p \ ,$$

kde $(x_1, \ldots, x_m)$ je hledané řešení.

- Pišme
$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m = b^p \ ,$$
kde $(x_1, \ldots, x_m)$ je hledané řešení.

- Norma vektoru $b - b^p$ je nejmenší právě tehdy, když je vektor $b - b^p$ kolmý k podprostoru W (Pythagorova věta), tj. vektor b^p je ortogonální projekcí vektoru b na podprostor W.

- Pišme
$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m = b^p \ ,$$
kde $(x_1, \ldots, x_m)$ je hledané řešení.

- Norma vektoru $b - b^p$ je nejmenší právě tehdy, když je vektor $b - b^p$ kolmý k podprostoru W (Pythagorova věta), tj. vektor b^p je ortogonální projekcí vektoru b na podprostor W.

- Vektor $b - b^p$ musí být tedy kolmý na vektory $s_1, \ldots, s_m$. Pro každé $j = 1, \ldots, m$ musí tedy být
$$(s_j | b - b^p) = (s_j | b - s_1 x_1 - s_2 x_2 - \cdots - s_m x_m) = 0 \ ,$$

- Pišme
$$s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_m \cdot x_m = b^p \ ,$$
kde $(x_1, \ldots, x_m)$ je hledané řešení.

- Norma vektoru $b - b^p$ je nejmenší právě tehdy, když je vektor $b - b^p$ kolmý k podprostoru W (Pythagorova věta), tj. vektor b^p je ortogonální projekcí vektoru b na podprostor W.

- Vektor $b - b^p$ musí být tedy kolmý na vektory $s_1, \ldots, s_m$. Pro každé $j = 1, \ldots, m$ musí tedy být
$$(s_j | b - b^p) = (s_j | b - s_1 x_1 - s_2 x_2 - \cdots - s_m x_m) = 0 \ ,$$
neboli pro každé $j = 1, \ldots, m$ musí být
$$(s_j|s_1)x_1 + (s_j|s_2)x_2 + \cdots + (s_j|s_m)x_m = (s_j|b) \ .$$

- Jde o soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (s_1|s_1) & (s_1|s_2) & \dots & (s_1|s_m) & (s_1|b) \\ (s_2|s_1) & (s_2|s_2) & \dots & (s_2|s_m) & (s_2|b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_m|s_1) & (s_m|s_2) & \dots & (s_m|s_m) & (s_m|b) \end{array}\right)$$

Její řešení $(x_1, \dots, x_m)$ je hledaným „přibližným řešením“ původní neřešitelné soustavy.

- Jde o soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (s_1|s_1) & (s_1|s_2) & \dots & (s_1|s_m) & (s_1|b) \\ (s_2|s_1) & (s_2|s_2) & \dots & (s_2|s_m) & (s_2|b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_m|s_1) & (s_m|s_2) & \dots & (s_m|s_m) & (s_m|b) \end{array}\right)$$

Její řešení $(x_1, \dots, x_m)$ je hledaným „přibližným řešením“ původní neřešitelné soustavy.

Uvědomme si, že jsme nehledali vektor b^p.

- Jde o soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (s_1|s_1) & (s_1|s_2) & \dots & (s_1|s_m) & (s_1|b) \\ (s_2|s_1) & (s_2|s_2) & \dots & (s_2|s_m) & (s_2|b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_m|s_1) & (s_m|s_2) & \dots & (s_m|s_m) & (s_m|b) \end{array}\right)$$

  Její řešení $(x_1, \dots, x_m)$ je hledaným „přibližným řešením“ původní neřešitelné soustavy.

  Uvědomme si, že jsme nehledali vektor b^p.

- Matice soustavy je tzv. *Gramova matice* vektorů $s_1, \dots, s_m$.

  Jorgen Pedersen Gram (1850–1916), dánský matematik, 1883

- Příklad: přibližné řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1 &= (1,2,3) \\ s_2 &= (2,4,5) \\ b &= (1,3,3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (s_1|s_1) &= 14 \\ (s_1|s_2) &= 25 \\ (s_2|s_2) &= 45 \\ (s_1|b) &= 16 \\ (s_2|b) &= 29 \end{aligned}$$

- Příklad: přibližné řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1 &= (1,2,3) \\ s_2 &= (2,4,5) \\ b &= (1,3,3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (s_1|s_1) &= 14 \\ (s_1|s_2) &= 25 \\ (s_2|s_2) &= 45 \\ (s_1|b) &= 16 \\ (s_2|b) &= 29 \end{aligned}$$

Neřešitelná soustava je převedena na soustavu řešitelnou:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 25x_2 &= 16 \\ 25x_1 + 45x_2 &= 29 \end{aligned}$$

- Příklad: přibližné řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1 &= (1,2,3) \\ s_2 &= (2,4,5) \\ b &= (1,3,3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (s_1|s_1) &= 14 \\ (s_1|s_2) &= 25 \\ (s_2|s_2) &= 45 \\ (s_1|b) &= 16 \\ (s_2|b) &= 29 \end{aligned}$$

Neřešitelná soustava je převedena na soustavu řešitelnou:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 25x_2 &= 16 \\ 25x_1 + 45x_2 &= 29 \end{aligned}$$

Přibližným řešením je $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{6}{5}$.

- Další příklad neřešitelné soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

- Další příklad neřešitelné soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Přibližným řešením je $x_1 = \frac{1}{14}$, $x_2 = \frac{10}{14}$.

Závěr:

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?
- Může být více přibližných řešení? Kdy to nastane?

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?
- Může být více přibližných řešení? Kdy to nastane?
- Jiná metoda nalezení přibližného řešení neřešitelné soustavy: *Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice*

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?
- Může být více přibližných řešení? Kdy to nastane?
- Jiná metoda nalezení přibližného řešení neřešitelné soustavy:

  Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice

  Jestliže je matice $\mathbb{A}$ čtvercová regulární, potom má soustava lineárních rovnic $\mathbb{A} \cdot x = b$ jediné řešení $x = \mathbb{A}^{-1}b$.

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?
- Může být více přibližných řešení? Kdy to nastane?
- Jiná metoda nalezení přibližného řešení neřešitelné soustavy:

  Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice

  Jestliže je matice $\mathbb{A}$ čtvercová regulární, potom má soustava lineárních rovnic $\mathbb{A} \cdot x = b$ jediné řešení $x = \mathbb{A}^{-1}b$.

  Ke každé matici $\mathbb{A}$ existuje jednoznačně určená tzv. Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice $\mathbb{A}^{+}$.

  Pro libovolnou soustavu rovnic $\mathbb{A} \cdot x = b$ je $x = \mathbb{A}^{+}b$ řešením, resp. přibližným řešením (s nejmenší normou).

Závěr:

- Co se stane, je-li soustava $\mathbb{A} \cdot x = b$ řešitelná?
- Může být více přibližných řešení? Kdy to nastane?
- Jiná metoda nalezení přibližného řešení neřešitelné soustavy:

  Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice

  Jestliže je matice $\mathbb{A}$ čtvercová regulární, potom má soustava lineárních rovnic $\mathbb{A} \cdot x = b$ jediné řešení $x = \mathbb{A}^{-1} b$.

  Ke každé matici $\mathbb{A}$ existuje jednoznačně určená tzv. Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice $\mathbb{A}^{+}$.

  Pro libovolnou soustavu rovnic $\mathbb{A} \cdot x = b$ je $x = \mathbb{A}^{+} b$ řešením, resp. přibližným řešením (s nejmenší normou).
- J. Bečvář: *Lineární algebra*, Matfyzpress, 2000, 2002, 2005.

Děkuji za pozornost !

Děkuji za pozornost !

A hlavně za květinové dary !!!

Děkuji za pozornost !

A hlavně za květinové dary !!!

Ale manželka má raději maso !!!!!!!!