Matematika dne svátečního

Jindřich Bečvář

Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova, Praha

Poděbrady, 21. srpna 2019

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/∼becvar

Osnova

Úvod

Tato přednáška navazuje na přednášku

Úvod

Tato přednáška navazuje na přednášku

Matematika všedního dne

Úvod

Tato přednáška navazuje na přednášku

Matematika všedního dne

kolegyně Martiny Bečvářové.

Úvod

Tato přednáška navazuje na přednášku

Matematika všedního dne

kolegyně Martiny Bečvářové.

Bylo mi líto, že dny sváteční zcela pominula.

Proto se tuto situaci snažím svou přednáškou napravit.

Přímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na přímou úměru, trojčlenka:
- **Příklad:** *Pět kilo jablek stojí 275 Kč. Kolik stojí sedm kilo jablek?*

Přímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na přímou úměru, trojčlenka:
- **Příklad:** *Pět kilo jablek stojí 275 Kč. Kolik stojí sedm kilo jablek?*

  Řešení trojčlenkou: souhlasně zakreslené šipky navozují, že se poměry ve směru šipek rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 5 & 275 & \uparrow \\ | & 7 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad 7 : 5 = \mathbf{x} : 275, \;\text{ tedy }\; \mathbf{x} = \frac{7 \cdot 275}{5} = 385.$$

Přímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na přímou úměru, trojčlenka:
- **Příklad:** *Pět kilo jablek stojí 275 Kč. Kolik stojí sedm kilo jablek?*

  Řešení trojčlenkou: souhlasně zakreslené šipky navozují, že se poměry ve směru šipek rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 5 & 275 & \uparrow \\ | & 7 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad 7 : 5 = \mathbf{x} : 275, \text{ tedy } \mathbf{x} = \frac{7 \cdot 275}{5} = 385.$$

  Alternativní pravidlo, tzv. *křížové*, říká: součiny křížem se rovnají, tj. $5 \cdot \mathbf{x} = 7 \cdot 275$.

Přímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na přímou úměru, trojčlenka:
- **Příklad:** *Pět kilo jablek stojí 275 Kč. Kolik stojí sedm kilo jablek?*

  Řešení trojčlenkou: souhlasně zakreslené šipky navozují, že se poměry ve směru šipek rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 5 & 275 & \uparrow \\ | & 7 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad 7 : 5 = \mathbf{x} : 275, \text{ tedy } \mathbf{x} = \frac{7 \cdot 275}{5} = 385.$$

  Alternativní pravidlo, tzv. *křížové*, říká: součiny křížem se rovnají, tj. $5 \cdot \mathbf{x} = 7 \cdot 275$.

  Někdy však mohou do hry vstoupit dvě nebo více závislostí.

- **Příklad:** *Jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik snese pět slepic za šest dní.*

- **Příklad:** *Jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik snese pět slepic za šest dní.*

  Chybné řešení. Jedna slepice snese za jeden den jedno vejce. Tedy pět slepic snese za šest dnů 30 vajec.

- **Příklad:** *Jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik snese pět slepic za šest dní.*

  Chybné řešení. Jedna slepice snese za jeden den jedno vejce. Tedy pět slepic snese za šest dnů 30 vajec.

  Správné řešení. 3 slepice snesou 3 vejce za jeden a půl dne,

  tedy 3 slepice snesou 6 vajec za 3 dny,

  jedna slepice snese 2 vejce za 3 dny,

  5 slepic snese 10 vajec za 3 dny, a tedy 20 vajec za 6 dnů.

  Dvojitá trojčlenka neboli *řetězové pravidlo* říká: součiny křížem se rovnají

$$\begin{array}{ccccc} 1\tfrac{1}{2} & & 1\tfrac{1}{2} & & 1\tfrac{1}{2} \\ & \times & & \times & \\ 5 & & \mathbf{x} & & 6 \end{array} \qquad 1\frac{1}{2} \cdot \mathbf{x} \cdot 1\frac{1}{2} = 5 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6, \quad \mathbf{x} = 20$$

- Poznámka

  Předchozí příklad mnohé fascinuje.

  Není obvyklé počítat výkon chovu slepic na to,

  kolik snese jedna a půl slepice za jeden a půl dne.

- Poznámka

Předchozí příklad mnohé fascinuje.
Není obvyklé počítat výkon chovu slepic na to,
kolik snese jedna a půl slepice za jeden a půl dne.

Následující příklad je převzatý z knihy *Liber abaci*
Leonarda Pisánského (Fibonacci, asi 1170 až asi 1240).

- **Příklad:** *12 římských mincí odpovídá 31 pisánským, 23 pisánských odpovídá 12 janovským, 13 janovských 12 turínským, 11 turínských 12 barcelonským. Kolik barcelonských mincí dostaneme za 15 římských?*

- **Příklad:** *12 římských mincí odpovídá 31 pisánským, 23 pisánských odpovídá 12 janovským, 13 janovských 12 turínským, 11 turínských 12 barcelonským. Kolik barcelonských mincí dostaneme za 15 římských?*

  Řešení. Návod k řešení je znázorněn schématem: součiny křížem se rovnají.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{x} & & 12 & & 13 & & 31 & & 12 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 12 & & 11 & & 12 & & 23 & & 15 \end{array}$$

$$\mathbf{x} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15, \text{ tedy } \mathbf{x} = 20\frac{1180}{3289}.$$

- **Příklad:** *12 římských mincí odpovídá 31 pisánským, 23 pisánských odpovídá 12 janovským, 13 janovských 12 turínským, 11 turínských 12 barcelonským. Kolik barcelonských mincí dostaneme za 15 římských?*

  Řešení. Návod k řešení je znázorněn schématem: součiny křížem se rovnají.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{x} & & 12 & & 13 & & 31 & & 12 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 12 & & 11 & & 12 & & 23 & & 15 \end{array}$$

$$\mathbf{x} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15, \text{ tedy } \mathbf{x} = 20\frac{1180}{3289}.$$

  Poznámka. Co by tehdejší směnárna s tímto výsledkem dělala? Vyplatila by nejvýše 20 barcelonských mincí! Nebo ještě méně!!!

  Klasický příklad „z praxe“ !!!

Naučené postupy **nelze aplikovat mechanicky**.

Naučené postupy **nelze aplikovat mechanicky**.
Uveďme zajímavý zlomek ze Simplikia:

. . . důkaz, na který se dotazoval Zénón sofisty Prótágory: „Pověz mi, Prótágoro," řekl, „zda působí zvuk jedno prosné zrno, upadne-li, nebo jedna desítitisícina zrna?" A když on řekl, že nepůsobí, tázal se: „Upadne-li měřice prosa, působí zvuk či ne?" Když pak on řekl, že měřice působí, pravil Zénón: „Jak pak, není jakýsi poměr měřice prosa k jednomu zrnu a k desítitisícině jednoho?" Když on uznal, že jest, pravil Zénón: „Jak pak, nebudou také tytéž vzájemné poměry zvuků? Neboť jak zvučící předměty, tak také zvuky. Ježto je tomu tak, vydává-li zvuk měřice prosa, vydá jej též jedno prosné zrno i desítitisícina zrna."

Naučené postupy **nelze aplikovat mechanicky**.
Uveďme zajímavý zlomek ze Simplikia:

. . . důkaz, na který se dotazoval Zénón sofisty Prótágory: „Pověz mi, Prótágoro," řekl, „zda působí zvuk jedno prosné zrno, upadne-li, nebo jedna desítitisícina zrna?" A když on řekl, že nepůsobí, tázal se: „Upadne-li měřice prosa, působí zvuk či ne?" Když pak on řekl, že měřice působí, pravil Zénón: „Jak pak, není jakýsi poměr měřice prosa k jednomu zrnu a k desítitisícině jednoho?" Když on uznal, že jest, pravil Zénón: „Jak pak, nebudou také tytéž vzájemné poměry zvuků? Neboť jak zvučící předměty, tak také zvuky. Ježto je tomu tak, vydává-li zvuk měřice prosa, vydá jej též jedno prosné zrno i desítitisícina zrna."

A co když upadne atom prosného zrna? A může atom upadnout?
A může padlý atom vydat zvuk?

Naučené postupy **nelze aplikovat mechanicky**.

Uveďme zajímavý zlomek ze Simplikia:

. . . důkaz, na který se dotazoval Zénón sofisty Prótágory: „Pověz mi, Prótágoro,“ řekl, „zda působí zvuk jedno prosné zrno, upadne-li, nebo jedna desítitisícina zrna?“ A když on řekl, že nepůsobí, tázal se: „Upadne-li měřice prosa, působí zvuk či ne?“ Když pak on řekl, že měřice působí, pravil Zénón: „Jak pak, není jakýsi poměr měřice prosa k jednomu zrnu a k desítitisícině jednoho?“ Když on uznal, že jest, pravil Zénón: „Jak pak, nebudou také tytéž vzájemné poměry zvuků? Neboť jak zvučící předměty, tak také zvuky. Ježto je tomu tak, vydává-li zvuk měřice prosa, vydá jej též jedno prosné zrno i desítitisícina zrna.“

A co když upadne atom prosného zrna? A může atom upadnout? A může padlý atom vydat zvuk?

Závislosti, které v běžných rozměrech (podmínkách) fungují, **nelze bez rozmyslu extrapolovat.** Viz např. supravodivost.

- Můžeme se setkat i s následujícími typy příkladů

  Viz učebnice Eduarda Čecha (1893–1960) nazvaná

  Aritmetika pro I. třídu středních škol,

  Státní nakladatelství v Praze, 1949.

  Příklad. 6 *ručníků se vysuší na slunci za* 30 *minut. Za jak dlouho se vysuší* 8 *ručníků?*

- Můžeme se setkat i s následujícími typy příkladů

  Viz učebnice Eduarda Čecha (1893–1960) nazvaná

  Aritmetika pro I. třídu středních škol,

  Státní nakladatelství v Praze, 1949.

  Příklad. 6 *ručníků se vysuší na slunci za* 30 *minut. Za jak dlouho se vysuší* 8 *ručníků?*

  Příklad. *Chlapci je* 12 *let a jeho výška je* 150 *cm. Jaká bude jeho výška, až mu bude* 24 *let?*

- Můžeme se setkat i s následujícími typy příkladů

Viz učebnice Eduarda Čecha (1893–1960) nazvaná

Aritmetika pro I. třídu středních škol,

Státní nakladatelství v Praze, 1949.

Příklad. 6 *ručníků se vysuší na slunci za* 30 *minut. Za jak dlouho se vysuší* 8 *ručníků?*

Příklad. *Chlapci je* 12 *let a jeho výška je* 150 *cm. Jaká bude jeho výška, až mu bude* 24 *let?*

Příklad. 1 *cestovatel vidí z věže do vzdálenosti* 24 *km. Do jaké vzdálenosti vidí* 5 *cestovatelů?*

- Richard Havelka (1883–1964): *Odstraňte matematiku ze škol.* (novinový článek)

  Tragický příběh rodiny přítele Karla, který se snažil pomáhat synu Jardovi s řešením výše uvedených úloh.

- Richard Havelka (1883–1964): *Odstraňte matematiku ze škol.* (novinový článek)

  Tragický příběh rodiny přítele Karla, který se snažil pomáhat synu Jardovi s řešením výše uvedených úloh.

  Příběh končí takto:

  Přítel Karel chodí po ulicích s dětským počitadlem v ruce, přehazuje barevné kuličky a temně skuhrá: „Až bude našemu Jardovi čtyřiaosmdesát, bude měřit deset a půl metru. Kde já tomu klukovi seženu na kalhoty?“

  Říkám vám pánové, zrušte matematiku!

- Domácí úkoly pro laskavé posluchače:

  Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za kolik minut porodí pět žen dvě děti?*

- Domácí úkoly pro laskavé posluchače:

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za kolik minut porodí pět žen dvě děti?*

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za jakou dobu porodí dvě ženy čtyřčata?*

- Domácí úkoly pro laskavé posluchače:

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za kolik minut porodí pět žen dvě děti?*

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za jakou dobu porodí dvě ženy čtyřčata?*

Příklad. *Tři policisté dopadnou sedmnáct zlodějů za* 58 *dnů. Za jak dlouho dopadnou dva policisté třináct zlodějů?*

- Domácí úkoly pro laskavé posluchače:

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za kolik minut porodí pět žen dvě děti?*

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za jakou dobu porodí dvě ženy čtyřčata?*

Příklad. *Tři policisté dopadnou sedmnáct zlodějů za* 58 *dnů. Za jak dlouho dopadnou dva policisté třináct zlodějů?*

Příklad. *Pan Novák vypije dva půllitry piva za tři čtvrtě hodiny. Za jak dlouho vypije osm velkých panáků?*

- Domácí úkoly pro laskavé posluchače:

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za kolik minut porodí pět žen dvě děti?*

Příklad. *Jedna žena porodí dítě za půl hodiny. Za jakou dobu porodí dvě ženy čtyřčata?*

Příklad. *Tři policisté dopadnou sedmnáct zlodějů za* 58 *dnů. Za jak dlouho dopadnou dva policisté třináct zlodějů?*

Příklad. *Pan Novák vypije dva půllitry piva za tři čtvrtě hodiny. Za jak dlouho vypije osm velkých panáků?*

– převod jednotek, co je panák?

- Domácí úkol pro učitele všech typů a stupňů škol:

- Domácí úkol pro učitele všech typů a stupňů škol:

  Příklad. *Škola má 273 žáků a 33 učitelů. Otec žáka Meszároše dal panu učiteli Přísnému během tříminutového „rozhovoru" pár facek.*

- Domácí úkol pro učitele všech typů a stupňů škol:

  Příklad. *Škola má 273 žáků a 33 učitelů. Otec žáka Meszároše dal panu učiteli Přísnému během tříminutového „rozhovoru“ pár facek.*
  Kolik facek dostane učitelský sbor během celého školního roku?

- Domácí úkol pro učitele všech typů a stupňů škol:

  Příklad. *Škola má 273 žáků a 33 učitelů. Otec žáka Meszároše dal panu učiteli Přísnému během tříminutového „rozhovoru“ pár facek.*
  Kolik facek dostane učitelský sbor během celého školního roku?

  Poznámka.

  Příklad je podstatně komplikován převodem časových jednotek.

- **Příklad.** *Součet úhlů v trojúhelníku je* 180°. *Jaký je součet úhlů ve čtyřúhelníku?*

- **Příklad.** *Součet úhlů v trojúhelníku je* 180°. *Jaký je součet úhlů ve čtyřúhelníku?*

  Řešení. Užijeme trojčlenku:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 3 & 180^\circ & \uparrow \\ | & 4 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad \frac{\mathbf{x}}{180} = \frac{4}{3}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{x} = 240^\circ$$

  Odpověď. Součet úhlů ve čtyřúhelníku je 240°.

- **Příklad.** *Součet úhlů v trojúhelníku je* 180°. *Jaký je součet úhlů ve čtyřúhelníku?*

  Řešení. Užijeme trojčlenku:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 3 & 180^\circ & \uparrow \\ | & 4 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad \frac{\mathbf{x}}{180} = \frac{4}{3}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{x} = 240^\circ$$

  Odpověď. Součet úhlů ve čtyřúhelníku je 240°.

- **Příklad.** *Ze sudu o objemu 25 litrů byl odebrán vzorek o objemu 1,2 litru. Bylo zjištěno, že obsahuje 8,4% dusíku. Kolik procent dusíku je v celém sudu?*

- **Příklad.** *Součet úhlů v trojúhelníku je* 180°. *Jaký je součet úhlů ve čtyřúhelníku?*

  Řešení. Užijeme trojčlenku:

  $$\begin{array}{cccc} \uparrow & 3 & 180^\circ & \uparrow \\ | & 4 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad \frac{\mathbf{x}}{180} = \frac{4}{3}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{x} = 240^\circ$$

  Odpověď. Součet úhlů ve čtyřúhelníku je 240°.

- **Příklad.** *Ze sudu o objemu 25 litrů byl odebrán vzorek o objemu 1,2 litru. Bylo zjištěno, že obsahuje 8,4% dusíku. Kolik procent dusíku je v celém sudu?*

  Řešení. Užijeme trojčlenku:

  $$\begin{array}{cccc} \uparrow & 1,2 & 8,4\% & \uparrow \\ | & 25 & \mathbf{x} & | \end{array} \qquad \frac{\mathbf{x}}{8,4} = \frac{25}{1,2}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{x} = 175\%$$

  Odpověď. V sudu je 175% dusíku.

- **Příklad na dvojitou trojčlenku. (B. Henry):**

  Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut.

  Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto?

- **Příklad na dvojitou trojčlenku. (B. Henry):**

  Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut.

  Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto?

  Řešení. Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu dvojité trojčlenky, tj. křížovým pravidlem:

$$\begin{array}{ccccc} 60 & & 5 & & 32 \\ & \times & & \times & \\ 4 & & 9 & & \mathbf{x} \end{array} \qquad \mathbf{x}\cdot 5\cdot 4 = 32\cdot 9\cdot 60, \qquad \mathbf{x} = 864$$

- **Příklad na dvojitou trojčlenku. (B. Henry):**

  Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut.

  Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto?

  Řešení. Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu dvojité trojčlenky, tj. křížovým pravidlem:

$$\begin{array}{ccccc} 60 & & 5 & & 32 \\ & \times & & \times & \\ 4 & & 9 & & \mathbf{x} \end{array} \qquad \mathbf{x} \cdot 5 \cdot 4 = 32 \cdot 9 \cdot 60, \qquad \mathbf{x} = 864$$

  Odpověď

- **Příklad na dvojitou trojčlenku. (B. Henry):**
  Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut.
  Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto?

  Řešení. Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu dvojité trojčlenky, tj. křížovým pravidlem:

$$\begin{array}{ccccc} 60 & & 5 & & 32 \\ & \times & & \times & \\ 4 & & 9 & & \mathbf{x} \end{array} \qquad \mathbf{x}\cdot 5\cdot 4 = 32\cdot 9\cdot 60, \qquad \mathbf{x} = 864$$

Odpověď (celou větou).

- **Příklad na dvojitou trojčlenku. (B. Henry):**

  Šedesátičlenný symfonický orchestr zahraje Beethovenovu Pátou za 32 minut.

  Za jak dlouho zahraje Beethovenovu Devátou kvarteto?

  Řešení. Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu dvojité trojčlenky, tj. křížovým pravidlem:

$$\begin{array}{ccccc} 60 & & 5 & & 32 \\ & \times & & \times & \\ 4 & & 9 & & \mathbf{x} \end{array} \qquad \mathbf{x} \cdot 5 \cdot 4 = 32 \cdot 9 \cdot 60, \quad \mathbf{x} = 864$$

  Odpověď (celou větou). Kvarteto zahraje Beethovenovu Devátou za 864 minut, tj. za 14 hodin a 24 minut.

Nepřímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na nepřímou úměru, trojčlenka:

  Příklad. *Materiál pro stavbu, který by pět aut odvezlo za dvanáct dnů, bude vozit šest aut. Kolik dnů budou na odvoz materiálu potřebovat?*

Nepřímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na nepřímou úměru, trojčlenka:

  Příklad. *Materiál pro stavbu, který by pět aut odvezlo za dvanáct dnů, bude vozit šest aut. Kolik dnů budou na odvoz materiálu potřebovat?*

  Řešení trojčlenkou. Nesouhlasně zakreslené šipky navozují, že poměry ve směru šipek se rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 5 & 12 & \mid \\ \mid & 6 & \mathbf{x} & \downarrow \end{array} \qquad 6:5 = 12:\mathbf{x}, \text{ tedy } \mathbf{x} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

Nepřímá úměra – trojčlenka a její meze

- Základní škola: úlohy na nepřímou úměru, trojčlenka:

Příklad. *Materiál pro stavbu, který by pět aut odvezlo za dvanáct dnů, bude vozit šest aut. Kolik dnů budou na odvoz materiálu potřebovat?*

Řešení trojčlenkou. Nesouhlasně zakreslené šipky navozují, že poměry ve směru šipek se rovnají:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & 5 & 12 & \mid \\ \mid & 6 & \mathbf{x} & \downarrow \end{array} \qquad 6:5 = 12:\mathbf{x}, \text{ tedy } \mathbf{x} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

Pro odlišení přímé a nepřímé úměry jsou šipky velmi vhodným nástrojem. V určité době badatelé o vyučovacích metodách užívání šipek nedoporučovali. Žáci měli šipky zakázané.

- Nebezpečí mechanického použití bez hlubšího porozumění.

Příklad. *Dva montéři zašroubují* 200 *šroubů za* 50 *minut. Za jak dlouho zašroubují* 100 *šroubů* 3 *montéři?*

(Předpokládáme, že všichni pracují stejně rychle.)

- Nebezpečí mechanického použití bez hlubšího porozumění.

Příklad. *Dva montéři zašroubují* 200 *šroubů za* 50 *minut. Za jak dlouho zašroubují* 100 *šroubů* 3 *montéři?*

(Předpokládáme, že všichni pracují stejně rychle.)

Řešení. Užitím trojčlenky vypočteme, že tři montéři zašroubují 100 šroubů za $\frac{50}{3}$ minuty, tj. za $16\frac{2}{3}$ minuty.

- Nebezpečí mechanického použití bez hlubšího porozumění.

Příklad. *Dva montéři zašroubují* 200 *šroubů za* 50 *minut. Za jak dlouho zašroubují* 100 *šroubů* 3 *montéři?*

(Předpokládáme, že všichni pracují stejně rychle.)

Řešení. Užitím trojčlenky vypočteme, že tři montéři zašroubují 100 šroubů za $\frac{50}{3}$ minuty, tj. za $16\frac{2}{3}$ minuty.

Správné řešení. Jeden montér zašroubuje jeden šroub za půl minuty, dva šrouby za minutu, tedy tři montéři za 16 minut zašroubují $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$ šroubů, za další půl minuty zašroubují další tři šrouby a pro zašroubování posledního šroubu je zapotřebí další půlminuta (pracuje jen jeden montér, ostatní na něj se zalíbením hledí). Celkem je tedy zapotřebí 17 minut.

- Nebezpečí mechanického použití bez hlubšího porozumění.

Příklad. *Dva montéři zašroubují* 200 *šroubů za* 50 *minut. Za jak dlouho zašroubují* 100 *šroubů* 3 *montéři?*

(Předpokládáme, že všichni pracují stejně rychle.)

Řešení. Užitím trojčlenky vypočteme, že tři montéři zašroubují 100 šroubů za $\frac{50}{3}$ minuty, tj. za $16\frac{2}{3}$ minuty.

Správné řešení. Jeden montér zašroubuje jeden šroub za půl minuty, dva šrouby za minutu, tedy tři montéři za 16 minut zašroubují $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$ šroubů, za další půl minuty zašroubují další tři šrouby a pro zašroubování posledního šroubu je zapotřebí další půlminuta (pracuje jen jeden montér, ostatní na něj se zalíbením hledí). Celkem je tedy zapotřebí 17 minut.

Řešení je pochopitelně **akademické**, neobráží reálné poměry.

Může se stát, že se montéři pohádají o to, kdo má zbylý šroub zašroubovat, a čas na zašroubování šroubů proto podstatně naroste.

A hned máme ve třídě vhodné téma pro bezbřehou diskusi o *spravedlnosti* při rozdělování práce, která bude zcela jistě pozitivně rozvíjet *kritické myšlení* žáků.

- **Příklad.** *Tři kopáči potřebují na vykopání* 68 *metrů příkopu* 8 *dnů. Za jak dlouho jej vykope* 1 600 *kopáčů?*

- **Příklad.** *Tři kopáči potřebují na vykopání* 68 *metrů příkopu* 8 *dnů. Za jak dlouho jej vykope* 1 600 *kopáčů?*

  Řešení. Jeden kopáč by potřeboval 24 dnů. Pro 1 600 kopáčů vyjde užitím trojčlenky 0,015 dne, tj. 0,36 hodiny, tj. necelých 21,6 minut.

- **Příklad.** *Tři kopáči potřebují na vykopání* 68 *metrů příkopu* 8 *dnů. Za jak dlouho jej vykope* 1 600 *kopáčů?*

  Řešení. Jeden kopáč by potřeboval 24 dnů. Pro 1 600 kopáčů vyjde užitím trojčlenky 0,015 dne, tj. 0,36 hodiny, tj. necelých 21,6 minut.

  Pokud by mělo příkop kopat 1 600 kopáčů, pak správná otázka zní:

- **Příklad.** *Tři kopáči potřebují na vykopání* 68 *metrů příkopu* 8 *dnů. Za jak dlouho jej vykope* 1 600 *kopáčů?*

  Řešení. Jeden kopáč by potřeboval 24 dnů. Pro 1 600 kopáčů vyjde užitím trojčlenky 0,015 dne, tj. 0,36 hodiny, tj. necelých 21,6 minut.

  Pokud by mělo příkop kopat 1 600 kopáčů, pak správná otázka zní: *Kolik bude mrtvých?*

- **Příklad.** *Tři kopáči potřebují na vykopání* 68 *metrů příkopu* 8 *dnů. Za jak dlouho jej vykope* 1 600 *kopáčů?*

  Řešení. Jeden kopáč by potřeboval 24 dnů. Pro 1 600 kopáčů vyjde užitím trojčlenky 0,015 dne, tj. 0,36 hodiny, tj. necelých 21,6 minut.

  Pokud by mělo příkop kopat 1 600 kopáčů, pak správná otázka zní: *Kolik bude mrtvých?*

  Poznámka. Často nejsme schopni přesně vymezit, jaká otázka má a jaká nemá smysl.

  Má otázka smysl pro deset kopáčů?

  Má smysl pro pět stovek kopáčů?

  Jsme schopni smysluplný počet kopáčů přesněji vymezit?

- Kanadský spisovatel Stephen Leacock (1869–1944) napsal povídku *A, B a C*. Začíná takto:

  Žák studující aritmetiku, který zvládne čtyři základní početní výkony a nedá se zlomit ani zlomky se náhle octne tváří v tvář nesmírné rozloze otázek, známých jako slovní příklady, ačkoli nejsou přikládány, nýbrž ukládány, a měly by se tedy spíše jmenovat úklady. Jsou to krátké povídky o lidské houževnatosti a píli s vynechaným koncem, a třebaže mezi sebou nezapřou až fádní rodinnou podobnost, nepostrádají přece jen jisté romantiky. Hrdinové zápletky takového příkladu jsou tři muži zvaní A, B a C. Forma otázky bývá přibližně tato:

  „A, B a C konají jistou práci. A vykoná za jednu hodinu tolik, kolik B za dvě hodiny nebo C za čtyři hodiny.

  Vypočtěte, jak dlouho jim ta práce trvá.“

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

Přímá

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

Přímá

Čím více budeme mít řiťolezců, tím víc nás bude v . . . !

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

Přímá

Čím více budeme mít řiťolezců, tím víc nás bude v . . . !

Nepřímá

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

Přímá

Čím více budeme mít řiťolezců, tím víc nás bude v . . . !

Nepřímá

Čím méně nás tu bude, tím více budeme mít prostoru pro diskusi.

- Dva příklady ze skutečného, opravdu, ale opravdu skutečného života zdůrazňují **rozdíl** mezi přímou a nepřímou závislostí:

Přímá

Čím více budeme mít řiťolezců, tím víc nás bude v . . . !

Nepřímá

Čím méně nás tu bude, tím více budeme mít prostoru pro diskusi.

(Platí pro $n > 1$.)

Pohádka o čokoládě

- Narušení přímé závislosti další podmínkou

Příklad. *Firma Mls & synové vyrábí čokolády. Jednu prodává za jedno euro. Jako reklama je v každé tabulce čokolády přibalen kupón; za deset kupónů vydá prodejna další tabulku čokolády. Uvážíme-li zvýhodnění kupujícího kupóny, kolik čokolády dostane za jedno euro?*

Pohádka o čokoládě

- Narušení přímé závislosti další podmínkou

Příklad. *Firma Mls & synové vyrábí čokolády. Jednu prodává za jedno euro. Jako reklama je v každé tabulce čokolády přibalen kupón; za deset kupónů vydá prodejna další tabulku čokolády. Uvážíme-li zvýhodnění kupujícího kupóny, kolik čokolády dostane za jedno euro?*

Řešení. Za jedno euro koupíme jednu čokoládu s jedním kuponem, který reprezentuje jednu desetinu čokolády a jednu desetinu dalšího kupónu reprezentující jednu setinu čokolády atd. Za jedno euro tedy máme toto množství čokolády:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots = 1{,}111\cdots = \frac{10}{9}$$

- Jak to vysvětlíme tomu, kdo neumí sečíst geometrickou řadu?
  - Za 9 euro koupíme 9 čokolád, v prodejně předložíme 9 kupónů a požadujeme další čokoládu.
  - Prodavač však chce 10 kupónů.
  - Uděláme smutné oči a pravíme: dejte mi prosím desátou čokoládu, já Vám ihned ten desátý kupón dodám.
  - Jakmile čokoládu dostaneme, vyjmeme kupón a dáme jej prodavači.
  - Za 9 euro máme 10 čokolád, za jedno euro $\frac{10}{9}$ čokolády.
  - A žádný kupón nám nezbyl.

- Jak to vysvětlíme tomu, kdo neumí sečíst geometrickou řadu?
  - Za 9 euro koupíme 9 čokolád, v prodejně předložíme 9 kupónů a požadujeme další čokoládu.
  - Prodavač však chce 10 kupónů.
  - Uděláme smutné oči a pravíme: dejte mi prosím desátou čokoládu, já Vám ihned ten desátý kupón dodám.
  - Jakmile čokoládu dostaneme, vyjmeme kupón a dáme jej prodavači.
  - Za 9 euro máme 10 čokolád, za jedno euro $\frac{10}{9}$ čokolády.
  - A žádný kupón nám nezbyl.
- Porušení pravidel!!!
- Problematičnost výše uvedeného řešení!!!

- **Poznámka:** Představená úloha poskytuje mnoho možností pro sepisování vědeckých prací v didaktice matematiky typu:

  Pavel řekl: ...

  Zdeněk pravil: ...

  Mařenka namítala: ...

  Učitel řekl: ...

- **Poznámka:** Představená úloha poskytuje mnoho možností pro sepisování vědeckých prací v didaktice matematiky typu:

  Pavel řekl: ...

  Zdeněk pravil: ...

  Mařenka namítala: ...

  Učitel řekl: ...

  Já jsem řekl: **Při přednášce se touto cestou v žádném případě nevydám!**

- Jak to tedy je s problémem čokolády ?

  Správné řešení. Vypočtěme, kolik čokolády dostane kupující za jedno euro, když do nákupu čokolád investuje **e** euro a každých deset získaných kupónů ihned smění za další čokoládu.

- Jak to tedy je s problémem čokolády ?

Správné řešení. Vypočtěme, kolik čokolády dostane kupující za jedno euro, když do nákupu čokolád investuje **e** euro a každých deset získaných kupónů ihned smění za další čokoládu.

Sestavme tabulku, která pro investovaný počet **e** euro uvádí počet získaných čokolád **č** a počet zbývajících kupónů **k**.

Důležitý okamžik je při nákupu desáté čokolády, kdy se smění deset kupónů za další čokoládu a jeden kupón.

e	1	2	..	9	10	11	..	18	19	20	..	27	28	29	..
č	1	2	..	9	11	12	..	19	21	22	..	29	31	32	..
k	1	2	..	9	1	2	..	9	1	2	..	9	1	2	..

- Investujeme-li do čokolád $\mathbf{e} = 9m$ euro, kde $m = 1, 2, \ldots,$ získáme $10m - 1$ čokolád a 9 kupónů.

  Za jedno euro tedy získáme $\frac{10m-1}{9m} = 1\frac{1}{9} - \frac{1}{9m}$, tedy jednu celou čokoládu a necelou jednu devítinu čokolády.

  S rostoucím $\mathbf{e}$ (tj. s rostoucím m) se zlomek $\frac{1}{9m}$ zmenšuje, množství čokolády odpovídající jednomu euru při nákupu za $\mathbf{e} = 9m$ euro tedy velmi mírně roste, ale stále je menší než $1\frac{1}{9}$.

  Platí tedy nerovnosti

$$1 < 1\frac{1}{18} < 1\frac{2}{27} < 1\frac{3}{36} < 1\frac{4}{45} < 1\frac{5}{54} < \cdots < 1\frac{1}{9}.$$

- Investujeme-li do nákupu čokolád $e = 9m + z$ euro, kde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a $1 \leq z \leq 8$, získáme $10m + z$ čokolád a z kupónů. Za jedno euro získáme $\frac{10m+z}{9m+z} = 1 + \frac{m}{9m+z}$ čokolády, tedy jednu celou čokoládu a necelou jednu devítinu čokolády.

  Množství **č** čokolády, které získáme za jedno euro, s rostoucím počtem **e** investovaných euro mírně kolísá: pro $\mathbf{e} = 10, \ldots, 18$ tvoří devět za sebou jdoucích hodnot klesající posloupnost, poté hodnota pro $\mathbf{e} = 19$ vzroste, aby následně osmkrát klesla, pak opět vzroste atd.

$$1 < \frac{11}{10} \qquad \frac{11}{10} > \frac{12}{11} > \frac{13}{12} > \frac{14}{13} > \frac{15}{14} > \frac{16}{15} > \frac{17}{16} > \frac{18}{17} > \frac{19}{18}$$

$$\frac{19}{18} < \frac{21}{19} \qquad \frac{21}{19} > \frac{22}{20} > \frac{23}{21} > \frac{24}{22} > \frac{25}{23} > \frac{26}{24} > \frac{27}{25} > \frac{28}{26} > \frac{29}{27}$$

$$\frac{29}{27} < \frac{31}{28} \qquad \frac{31}{28} > \frac{32}{29} > \frac{33}{30} > \frac{34}{31} > \frac{35}{32} > \frac{36}{33} > \frac{37}{34} > \frac{38}{35} > \frac{39}{36}$$

atd.

- **Recenzní posudek č. 1:**

  Za jedno Teuro dostane kupující právě jednu čokoládu a dozví se, že s tím kupónem se může jít nechat tak akorát barevně vyfotit, neb byl platný pouze do loňských vánoc, a navíc firma Mls & synové tento typ čokolád již přestala vyrábět. A pokud se mu to nelíbí, může si jít stěžovat na lampárnu – http://necyklopedie.wikia.com/wiki/Lamp%C3%A1rna.

- **Recenzní posudek č. 1:**

  Za jedno Teuro dostane kupující právě jednu čokoládu a dozví se, že s tím kupónem se může jít nechat tak akorát barevně vyfotit, neb byl platný pouze do loňských vánoc, a navíc firma Mls & synové tento typ čokolád již přestala vyrábět. A pokud se mu to nelíbí, může si jít stěžovat na lampárnu – http://necyklopedie.wikia.com/wiki/Lamp%C3%A1rna.

- **Recenzní posudek č. 2:**

  Genderově nevyrovnané!!! Montéry bych zaměnil za montérky, kopáče za kopáčky, firmu bych raději viděl Mls & dcery.
  Na druhé straně, abych nebyl militantní, jeden a půl vejce nechť snáší jeden a půl kohouta.

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

I když jsem žádnou nedostal!

Děkuji kolegyni Bečvářové

Děkuji kolegyni Bečvářové

Děkuji kolegyni Bečvářové

za inspiraci a shovívavost

Děkuji kolegyni Bečvářové

za inspiraci a shovívavost

Děkuji kolegyni Bečvářové

za inspiraci a shovívavost

ve dnech všedních i svátečních!