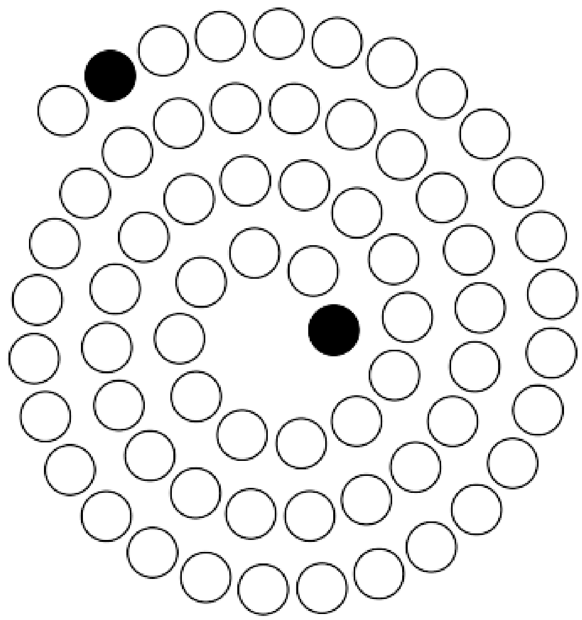


Collatzova hypotéza

David Brebera

XIV. seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách

Poděbrady

19. 8. 2019

Lothar Collatz

6. 7. 1910, Arnsberg, Německo
26. 9. 1990, Varna, Bulharsko

1928 – 1933 Greifswald, Michov, Göttingen, Berlín

Výrazně ovlivněn přednáškami Davida Hilberta

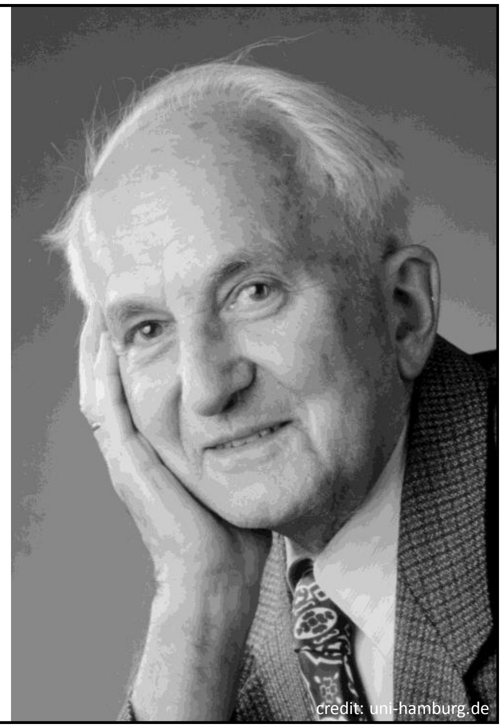
1935, Berlín (numerické metody řeš. lineárních diferenciálních rovnic)

1937 – Collatzova hypotéza

1943 – profesor, Hannover

1952 – Hamburg, zakládá Institut aplikované matematiky

236 publikací, převážně numerická matematika



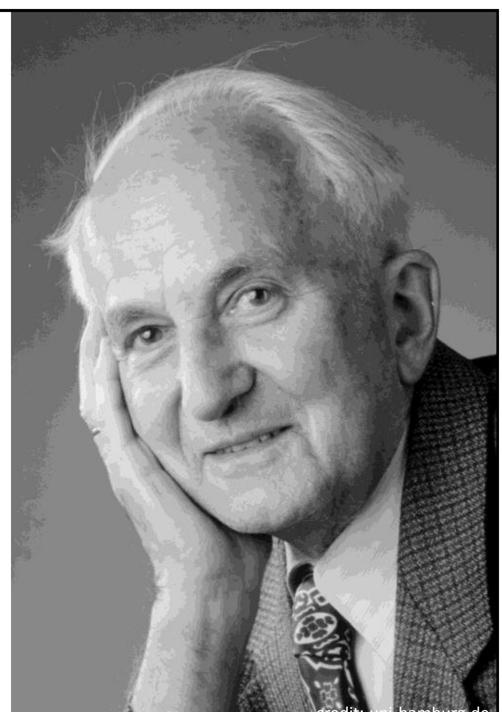
Lothar Collatz
1910 – 1990

1937: Collatzova hypotéza
(stále nevyřešena)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & a_n\ sudé \\ 3a_n + 1 & a_n\ liché \end{cases}$$

$$\forall a_1 \in N : \exists n \in N : a_n = 1$$

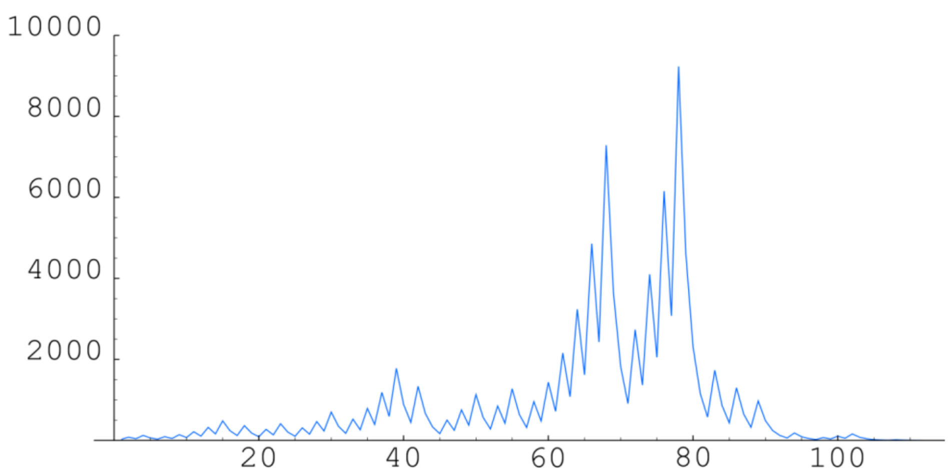
Pro libovolnou počáteční hodnotu a_1 se v konečném počtu kroků vždy dostaneme k hodnotě $a_n = 1$



Příklady

- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1,4,2,1
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, **9232**, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Průběh posloupnosti pro $a_1 = 27$



Řešení

- Podat důkaz tvrzení

nebo

- Najít protipříklad, tedy počáteční hodnotu, pro kterou
  - bude posloupnost divergovat
  - skončí posloupnost jiným než triviálním cyklem 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, …
- Hrubou silou ověřeno do 1.003×10^{20} (BOINC)
  - stále platí (to ale není důkaz, Pólya conjecture)

Pólya conjecture

George Pólya
1887 (Budapešť) – 1985 (Palo Alto, California)
ETH Zürich, Stanford University

1919: V radě přirozených číslech převažují čísla s lichým počtem členů prvočíselného rozkladu

$18 = 2^1 \times 3^2$, $1 + 2 = 3$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $2 + 1 + 1= 4$

1958: teoretické řešení (1.845×10^{361})

1980: nalezen protipříklad
pro hodnotu 906 150 257 poprvé „zvítězí“ sudé rozklady

BOINC

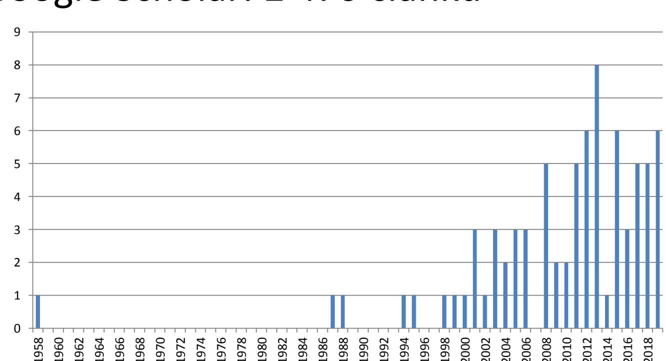
- University of California, Berkeley
- BOINC - Berkeley Open Infrastructure for Network Computing
- využití volné výpočetní kapacity osobních počítačů
  (v součtu kapacit jde o 4. nejvýkonnější superpočítač)
- SETI@home (hledání signálů mimozemských civilizací – zatím nic)
- LHC@home (CERN), NFS@home (faktorizace velkých čísel)
- celkem 35 různých projektů ze všech oborů
- Collatz:

$$100\ 304\ 170\ 900\ 795\ 686\ 912 = 87\times 2^{60} = 1.003\times 10^{20}$$

(kalkulačky)

WoS + Scopus + Google Scholar

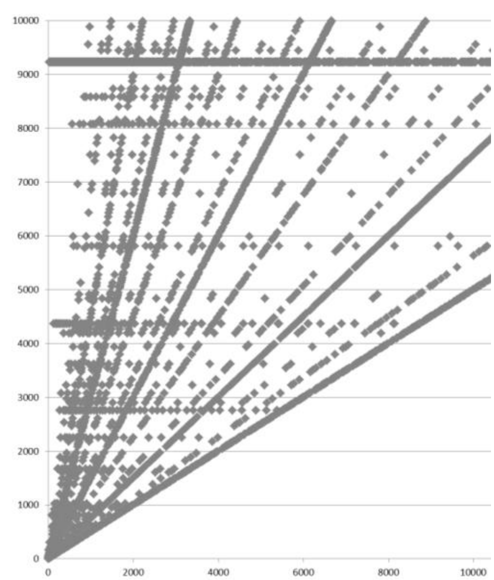
- Scopus: 77 článků
- Web of Science: 67 článků
- Google Scholar: 2 470 článků



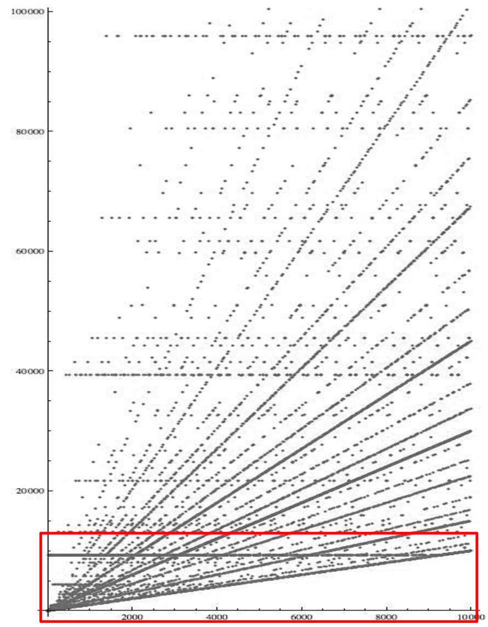
„Současný“ stav

- 1977: existuje pouze jeden triviální cyklus délky 2 (1 -> 4 -> 2 -> 1 -> 4 ...)
- 1993: délka netriviálního cyklu bude minimálně 17 087 915 kroků
- 2005: pokud existuje netriviální cyklus, musí obsahovat hodnotu minimálně 2385×2^{50}

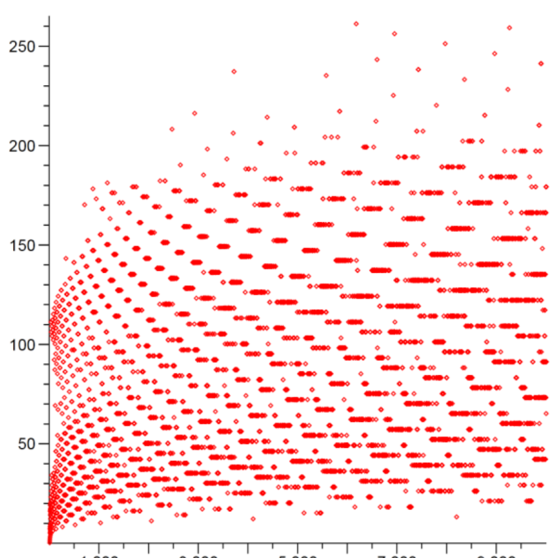
Co se zkoumá? Maximální hodnota



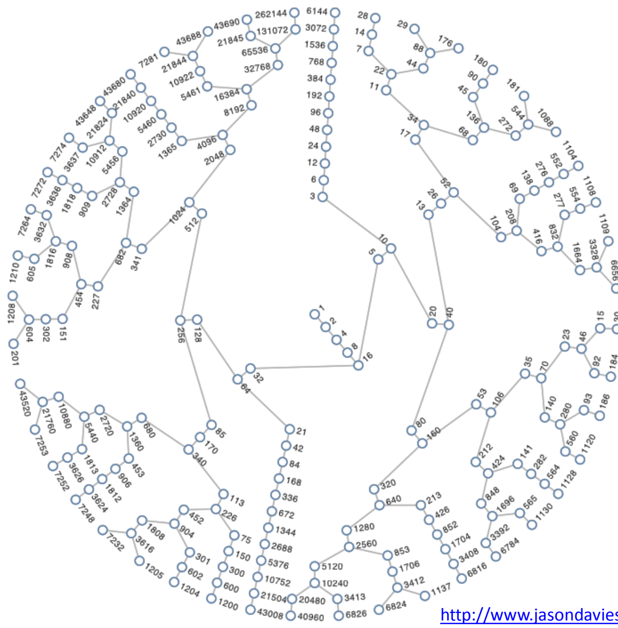
Co se zkoumá? Maximální hodnota



Počet kroků nutných k dosažení 1



Co se zkoumá? Collatzova mapa (strom)



http://www.jasondavies.com/collatz-graph/

Další zkoumání

- Celkový počet kroků nutných k dosažení 1 (A006577)
- Maximální hodnota (A025586)
- poměr počtu lichých(A006667) a sudých kroků (A006666)
- Počet kroků nutných k dosažení známé hodnoty
- Chování „zrychlené varianty“(A006666)

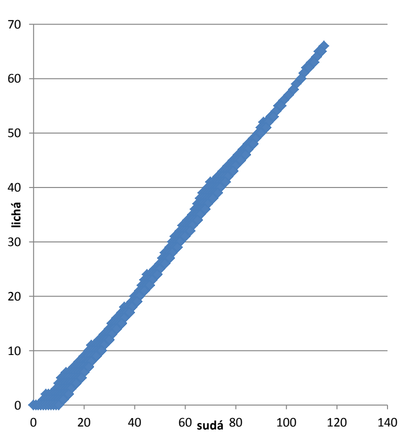
$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & a_n \; sudé \\ 3a_n + 1 & a_n \; liché \end{cases} \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & a_n \; sudé \\ \dfrac{3a_n + 1}{2} & a_n \; liché \end{cases}$$

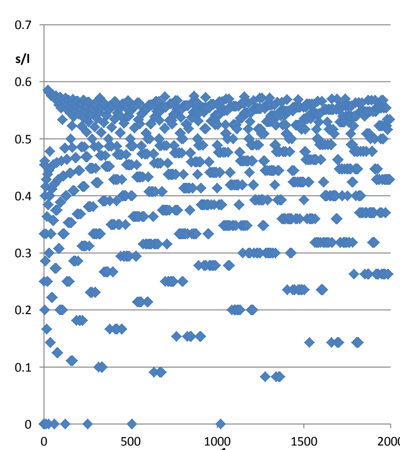
OEIS.ORG

- On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
- Neil Sloane (1939, Wales)
- kombinatorika, samoopravné kódy
- sběratel celočíselných posloupností (od r. 1964)
- od roku 1996 na webu oeis.org
- 320 000 posloupností (červen 2019)
- databáze je otevřena všem přispěvatelům

Další zkoumání I.

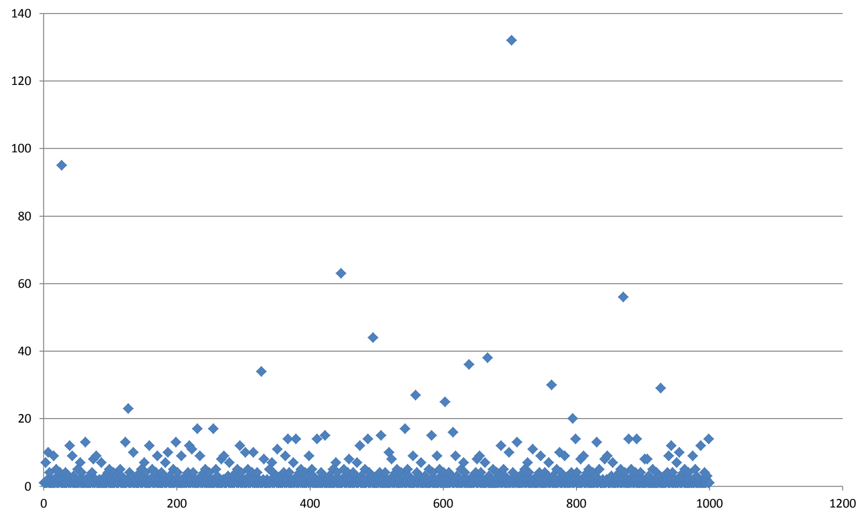
Počet „sudých“ a „lichých“ kroků





Další zkoumání II.

Délka nové cesty

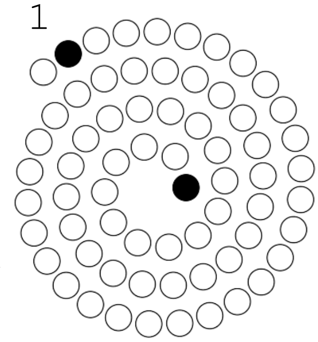


Další zkoumání III.

binární posloupnost

7	111
22	10110
11	1011
34	100010
17	10001
52	110100
26	11010
13	1101
40	101000
20	10100
10	1010
5	101
16	10000
8	1000
4	100
2	10
1	1

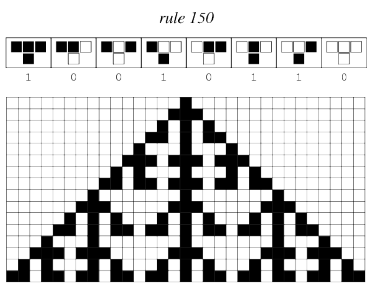
$2^{65} + 1$

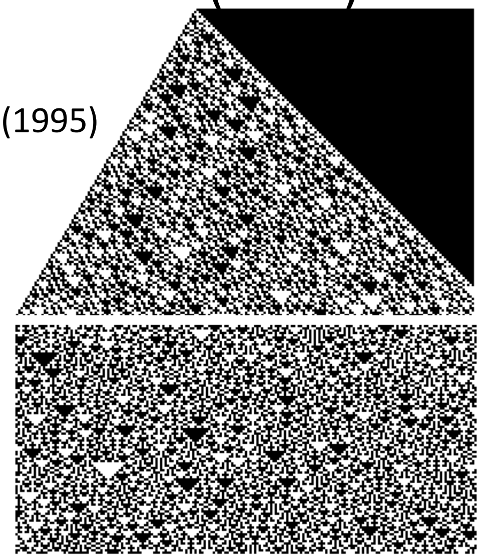


http://pageperso.univ-brest.fr/~huisman/

Stephen Wolfram (1959)

- Mathematica
- New Kind of Science (1995)
- Cellular automata
- Rule 150, 2^n-1





Další zkoumání IV.

Collatzovo síto

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	~~4~~	~~5~~	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	~~8~~	$\boxed{9}$	~~10~~
~~11~~	$\boxed{12}$	~~13~~	~~14~~	$\boxed{15}$	~~16~~	~~17~~	18	19	~~20~~
21	~~22~~	~~23~~	24	25	~~26~~	27	~~28~~	29	30
31	32	33	~~34~~	~~35~~	36	37	38	39	~~40~~
41	42	43	44	45	~~46~~	47	48	49	50
51	~~52~~	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	~~70~~

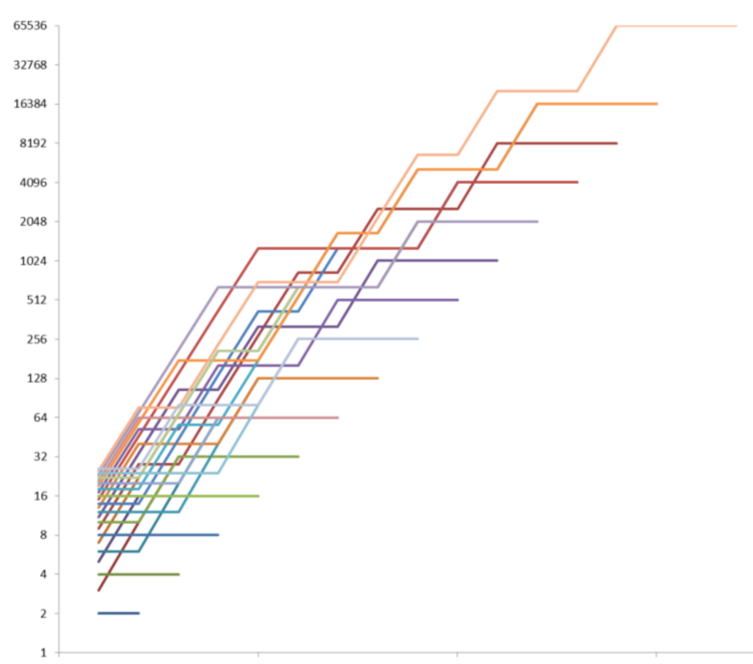
Další zkoumání V.

- Collatzovy zlomky $a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & a_n \ sudé \\ \dfrac{3a_n + 1}{2} & a_n \ liché \end{cases}$

6 – 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1

6 – 3 – 5 – 8 – 4 – 2 – 1

$\frac{6}{1} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{20}{4} \quad \frac{64}{8} \quad \frac{64}{16} \quad \frac{64}{32} \quad \frac{64}{64}$



Hledání funkce pro x $\in N$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x\ sudé \\ 3x+1 & x\ liché \end{cases}$$

$$\frac{(-1)^x+1}{2} = \begin{cases} 1 & x\ sudé \\ 0 & x\ liché \end{cases}$$

$$-\frac{(-1)^x-1}{2} = \begin{cases} 0 & x\ sudé \\ 1 & x\ liché \end{cases}$$

$$f(x) = \left(\frac{(-1)^x+1}{2}\right)\frac{x}{2} - \left(\frac{(-1)^x-1}{2}\right)(3x+1) \text{ pro x} \in N$$

Zobecnění pro x $\in R$ (zrychlená varianta)

$$f(x) = \left(\frac{(-1)^x+1}{2}\right)\frac{x}{2} - \left(\frac{(-1)^x-1}{2}\right)\frac{3x+1}{2} \text{ pro x} \in N$$

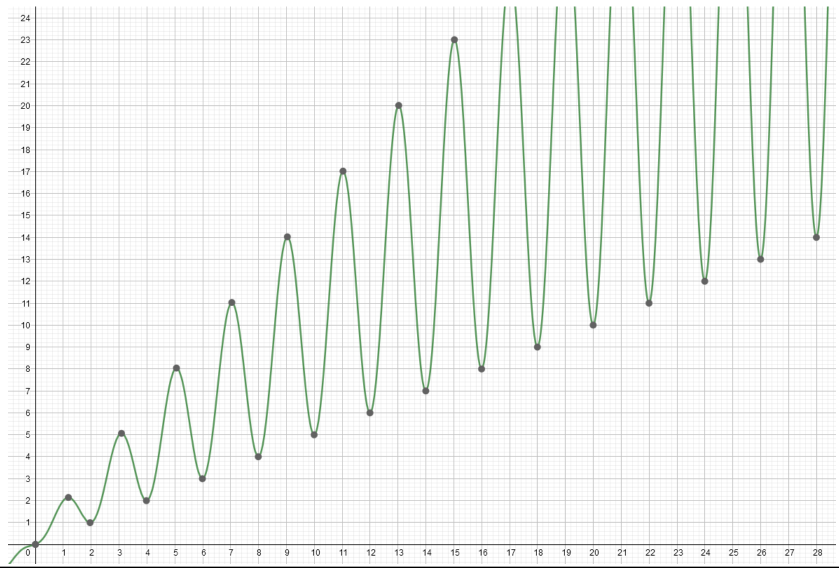
$$\text{pro x} \in R\text{: } (-1)^x = \cos(\pi x)$$

$$f(x) = \left(\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\right)\frac{x}{2} - \left(\frac{\cos(\pi x)-1}{2}\right)\frac{3x+1}{2}$$

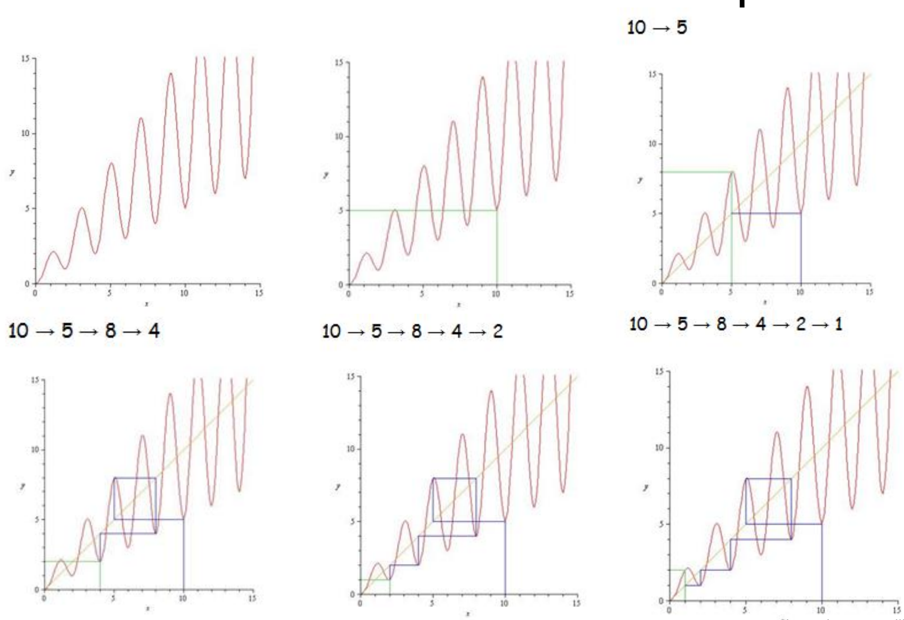
$$f(x) = \frac{1}{4}\ (4x+1-(2x+1)\cos(\pi x))$$

pro x $\in$ C: $f(z) = \frac{1}{4}(2+7z-(2+5z)\cos(\pi z))$ (nezrychlená)

$$f(x) = \frac{1}{4}\,(4x + 1 - (2x + 1)\cos(\pi x))$$



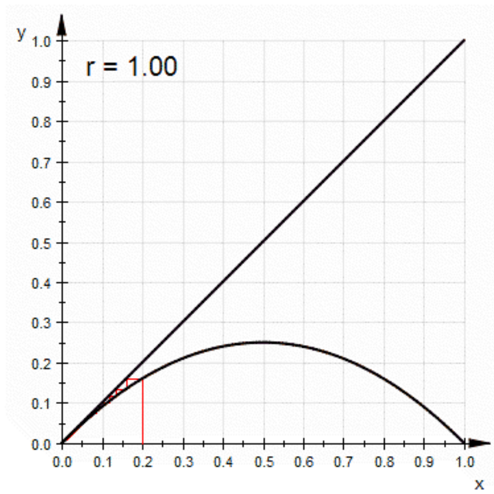
V reálném oboru – cobweb plot



zdroj: Thomas Prellberg

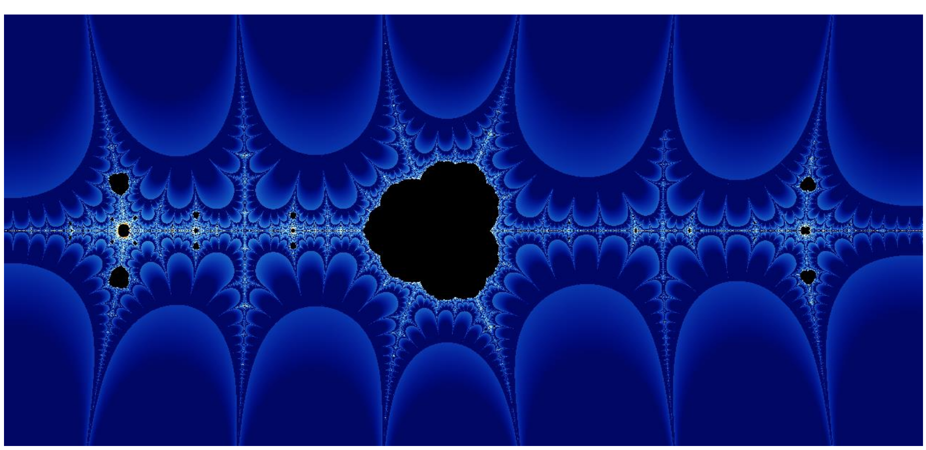
cobweb plot (logistické zobrazení)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



V komplexním oboru – Collatzův fraktál

$$f(z) = \frac{1}{4}(2 + 7z - (2 + 5z)\cos(\pi z))$$

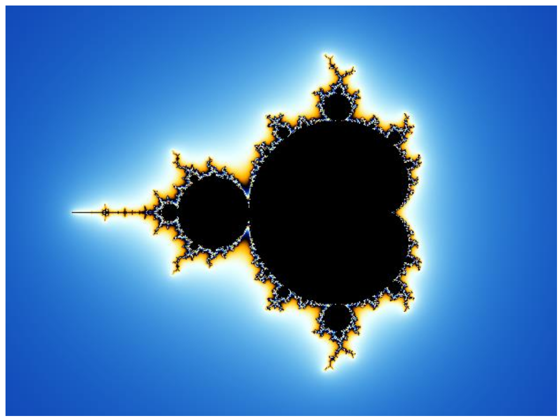


zdroj: Nathaniel Johnston

Mandelbrotova množina

Benoit Mandelbrot (1924 – 2010)

V oboru komplexních čísel, $z = z^2 + c$



Závěr

- Využití při výuce na ZŠ (elementární počítání)
- na SŠ (funkce, grafy, programování)
- na VŠ (fraktály, publikační činnost)
- otevírá prostor do mnoha dalších odvětví matematiky
- odměna 500 USD za vyřešení

Mathematics may not be ready
for such problems

Paul Erdős (1913 – 1996)

Děkuji za pozornost