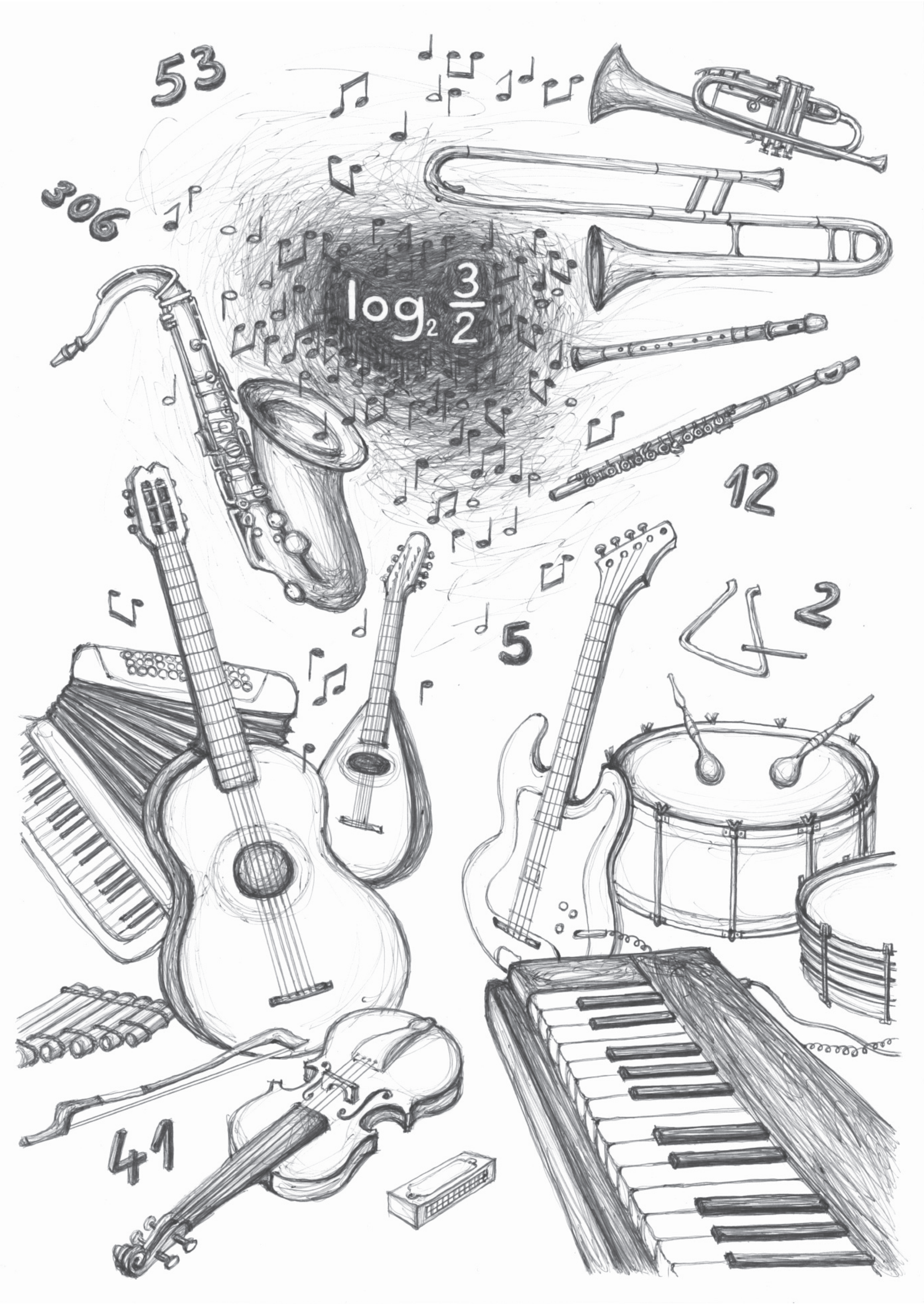

53
306
$\log_2 \frac{3}{2}$
12
2
5
41

2 Matematika a hudba

Celá tato kapitola bude věnována vztahu matematiky a hudby. Když posloucháme krásnou skladbu nebo zpíváme písničku, tak ani nevnímáme, že není vůbec samozřejmé, z jakých tónů se tato hudba skládá. Vše plyne tak přirozeně… A přesto, podstata volby „správných“ tónů, tj. takových, aby z nich bylo možno skladby tvořit, je matematická. Panují zde zákonitosti, které alespoň zčásti odhalíme v této kapitole.

Budeme k tomu potřebovat znát ty části matematiky, které mohou vypadat na první pohled trochu samoúčelně: počítání se zlomky (Proč upravovat zlomky, když mohu dělit přímo na kalkulátoru?), mocninami, geometrickou posloupností a logaritmy.

Odpovíme si na základní otázku: „Jak vybudovat celou tónovou soustavu?“ Budeme se ptát po zákonitostech tónové soustavy umožňující komponovat skladby, které budou dobře znít. Jako důsledek našeho hledání dostaneme také odpovědi na otázku: „Proč je „naše“ hudba založena právě na dvanácti tónech?“ Nemohl by jich být jiný počet?

Celou konstrukci tónové soustavy provedeme třemi způsoby. Budeme tak přibližně kopírovat historický postup, jak byly jednotlivé způsoby ladění objevovány a teoreticky popisovány. První způsob bude nejjednodušší, nejlépe na něm bude zřetelný základní princip tvoření tónové soustavy. Bude se jednat o systém, který je připisován pýthagorejské škole, proto budeme hovořit o *pýthagorejském* způsobu ladění. Dále si ukážeme, že tento systém není nejvhodnějším pro harmonii, a úpravou předchozího systému získáme ladění *přirozené*. I zde však objevíme některé problémy, které trápily hudebníky po celá staletí. Díky nerovnoměrnému rozložení tónů totiž zněla každá tónina trochu jinak; některé zněly velmi příjemně, jiné však tak nepříjemně, že byly nepoužitelné. Řešením byl systém *rovnoměrného temperovaného* ladění, který používáme téměř výhradně dodnes.

Než začneme s první konstrukcí tónové soustavy, tak bychom měli upřesnit několik pojmů. *Tónová soustava* je konečná množina tónů vytvořená podle určitého principu, *stupnice* je postupná řada tónů získaná výběrem podle zvoleného principu a nepřesahující rozsah oktávy.[2]

Stupnicí je například řada tónů c – d – e – f – g – a – h – c^1 (stupnice C-dur). Příkladem tónové soustavy může být množina všech tónů, které se ozvou, když postupně zazní tóny příslušné všem klávesám na klavíru.

Z fyziky i z běžného života je nám dobře známo, že drnkneme-li na napnutou strunu, tak tato struna začne kmitat a ozve se nějaký tón. Dobu potřebnou k vykonání jednoho kmitu nazýváme *doba kmitu* neboli *perioda*, značit ji budeme T. Počet kmitů za jednu sekundu nazýváme *frekvence*. Je-li perioda

---

[2] Pojem oktáva bude vysvětlen později v kapitole pojednávající o základních principech budování tónových soustav. Tónová soustava je vlastně souhrn všech tónů, které v rámci daného systému máme k dispozici. Stupnici získáme z tónové soustavy tak, že vybereme všechny tóny, které leží v intervalu jedné zvolené oktávy a seřadíme je podle jejich výšky.

$$T = \frac{1}{5} s,$$

bude frekvence $f = 5$ kmitů za sekundu. Mezi frekvencí a periodou tedy platí vztah

$$f = \frac{1}{T}.$$

Jednotkou frekvence je hertz (Hz), píšeme tedy $f = 5$ Hz. Lidský sluch je schopen mechanické vlnění vnímat, a to přibližně v rozsahu od 16 Hz do 16 000 Hz, při čemž se zvyšujícím se věkem se horní hranice podstatně snižuje. Lidský sluch vnímá tóny o nižší frekvenci jako nižší, tóny o vyšší frekvenci jako vyšší. Pro popis této vlastnosti tónů se tedy používá prostorová metafora, hovoříme o výšce tónu. *Absolutní výšku tónu* definujeme velmi přirozeně – přímo frekvencí tohoto tónu.

Vzhledem k tomu, že lze každému tónu přiřadit jeho absolutní výška, můžeme srovnávat výšku různých tónů. Znějí-li dva tóny, z nichž jeden má frekvenci f_1 a druhý frekvenci f_2, můžeme vzít jejich poměr

$$\frac{f_2}{f_1}.$$

Tento poměr se nazývá *relativní výška tónu* s frekvenci f_2 k tónu s frekvencí f_1. Častěji však hovoříme o tomto poměru absolutních frekvencí jako o *hudebním intervalu*. Níže uvidíme, proč se interval definuje právě pomocí podílu dvou frekvencí, a ne například jejich rozdílem.

Veškerý postup tvoření tónové soustavy bude vycházet z pokusů se strunou. Tyto pokusy byly prováděny už v antickém Řecku a právě na jejich základě byly vybudovány první tónové soustavy. Bude tedy užitečné se podívat, jak souvisí výška tónu, který se ozve při drnknutí na strunu, s délkou struny.

Lze ukázat, že pokud máme dokonale pružnou strunu délky l (v metrech), její hustota je ρ (v $kg \cdot m^{-3}$) a má průměr d (v metrech), kterou napneme silou F (v newtonech), tak platí Taylorův vzorec

$$f = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{\pi \rho d^2}}.$$

Vidíme tedy, že pokud budeme uvažovat stejnou dokonale pružnou strunu (hustota ρ a průměr d tedy bude konstantní) a budeme-li na ni působit stále stejnou napínací silou F, bude celý výraz pod odmocninou konstantní:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\pi \rho d^2}}.$$

Za těchto předpokladů budeme moci říci, že frekvence závisí na délce struny nepřímo úměrně:

$$f = \frac{c}{l}.$$

Při drnknutí na strunu se tedy ozve tón, jehož frekvence je dána Taylorovým vzorcem, z něhož plyne, že výška tónu závisí nepřímo úměrně na délce struny. Čím delší strunu budeme mít, tím hlubší tón bude vydávat.

2.1 Základní principy budování tónových soustav

Všechny vztahy mezi výškami jednotlivých tónů budeme vyjadřovat pomocí délky struny. Intervaly proto budeme často chápat nejen jako poměr dvou frekvencí, ale také jako poměr dvou délek. Při budování tónových soustav budeme postupovat tak, že vezmeme jeden tón za základní a výšku všech ostatních tónů budeme udávat relativně k tomuto zvolenému tónu. Délku struny, která bude vydávat tento zvolený základní tón, budeme brát jako jednotkovou. Základní otázkou bude, jak zkrátit naši strunu, aby příslušné tóny společně se zvoleným základním tónem „dobře zněly". Takovéto zadání není nijak přesné, jeho exaktní formalizaci je možno provést několika způsoby. Ty pak povedou ke zmíněným třem druhům ladění.

Budeme-li dělat pokusy se zkracováním struny, tak záhy zjistíme, že když zkrátíme strunu na polovinu, ozve se tón, který bude sice vyšší, než tón příslušný celé struně, ale oba tóny si budou velmi podobné. Necháme-li oba tyto tóny zaznít společně, zjistíme, že mnozí lidé ani nepostřehnou, že nezní tón jeden, ale dva. Bude se jednat o velmi harmonický souzvuk. Tón příslušný jedné polovině délky struny tedy zařadíme do naší tónové soustavy. Interval mezi tónem, který vydává celá struna a její polovina, se nazývá *oktáva*.[3]

Nyní snadno utvoříme tón o dvě oktávy vyšší. Víme, že budeme muset nechat zaznít polovinu poloviny struny, tedy její pouhou jednu čtvrtinu. Pokud bychom chtěli tón o tři oktávy vyšší, museli bychom původní strunu zkrátit na jednu osminu. Dostáváme tak jednoduchý vztah:

tón o *n* oktáv vyšší zazní na struně zkrácené na

$$\frac{1}{2^n}$$

původní délky. Zdá se tedy, že při budování tónových soustav bude hrát důležitou roli násobení zlomků a geometrická posloupnost.

Jelikož je tón o oktávu vyšší svým charakterem prakticky shodný s tónem původním, tak můžeme naše zkoumání omezit na tóny, které budou pouze v intervalu jedné oktávy. Všechny ostatní tóny pak budou vzhledem k nim jen o oktávu (nebo několik oktáv) vyšší či nižší. Prozkoumáme-li tedy vhodné tóny v rámci jediné oktávy, tak můžeme celou tuto situaci

[3] Základem naší tónové soustavy je sedm tónů: c, d, e, f, g, a, h. Jejich pojmenování pomocí písmen se objevuje od středověku. Název oktáva vychází ze zvyku označovat vzdálenost dvou tónů v této základní tónové řadě latinskými řadovými číslovkami (v ženském rodě). Dostáváme tak postupně tyto intervaly: prima (c–c), sekunda (c–d), tercie (c–e), kvarta (c–f), kvinta (c–g), sexta (c–a), septima (c–h), oktáva (c–c^1).

„zkopírovat“ do vyšších poloh – do dalších oktáv. To dobře souhlasí s naší zkušeností například s klavírem – klaviatura obsahuje klávesy, které jsou rozděleny do zcela shodně rozložených skupin – jedná se právě o oktávy. Celá klaviatura je tak složena z kláves jediné oktávy, která je několikrát „nakopírována“. Tím pak dostaneme všechny tóny, které máme v klavírní hudbě k dispozici – tj. tónovou soustavu. V následujících odstavcích se budeme zabývat pouze hledáním vhodných tónů v rámci jediné oktávy, tedy nalezením vhodné stupnice.

Oktáva tedy bude základním mezníkem v tónové soustavě. Prakticky od každé tónové soustavy budeme požadovat, aby obsahovala tento interval.

Budeme-li v našich pokusech pokračovat, tak zjistíme, že ihned po oktávě je „nejharmoničtějším“ tónem ten, který získáme zkrácením struny o třetinu. Interval mezi tónem, který vydává celá struna, a mezi tónem, který vydává struna zkrácená o třetinu, se nazývá *kvinta*. Na základě úvah s oktávou je zřejmé, že budeme-li chtít, aby zazněl tón o kvintu vyšší, budeme muset délku původní struny vynásobit zlomkem $\frac{2}{3}$. Pokud budeme od tohoto nového tónu chtít tón, který bude znít opět o kvintu výše, budeme muset délku struny opět vynásobit zlomkem $\frac{2}{3}$. Budeme-li tedy mít strunu délky 1, tak tón o dvě kvinty vyšší zazní na struně délky

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

Celkem tedy budou znít dvě třetiny ze dvou třetin původní jednotkové délky struny. Jestliže budeme chtít nechat zaznít tón o n kvint vyšší, budeme muset zkrátit původní strunu na

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

původní délky.

Postupně začíná vysvítat základní princip, jak získat délku struny, chceme-li zvýšit či snížit tón o zadaný interval. Tóny přidáváme („sčítáme“) a délku struny dostaneme vynásobením příslušných zlomků. Začínáme zde tušit princip logaritmu – násobení se převádí na sčítání. Zvýšení odpovídá násobení příslušným zlomkem, snížení odpovídá naopak dělení. Schematicky můžeme zapsat například:

kvinta + kvinta	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
oktáva + kvinta	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$
kvinta + kvinta – oktáva	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$
tón o oktávu hlubší zazní na struně délky	$1 : \frac{1}{2}$
tón o kvintu hlubší zazní na struně délky	$1 : \frac{2}{3}$

Z právě provedeného rozboru začíná být zřejmé, že další tóny stupnice budeme získávat násobením zlomků. Když jsme zkracovali strunu o polovinu či třetinu, dostali jsme části struny, které byly vyjádřeny poměrem malých přirozených čísel. Skutečně se dá experimentálně snadno ověřit, že čím menší budou čísla, z nichž utvoříme poměr, tím harmoničtější bude příslušný interval.

Nyní můžeme přistoupit k vytvoření prvního systému ladění.

2.2 Pýthagorejské ladění

Jednoho dne byl Pýthagorás ponořen do myšlenek a uvažoval, zda by bylo možné vymyslet nějakou pomůcku pro uši, která by byla spolehlivá a bezchybná, tak jako zrak má pravítko a kružítko nebo čočku; nebo hmat má ramena vah či systém měr. Zatímco byl tímto zaměstnán, šel díky božskému řízení kolem kovárny a uslyšel kladiva, která tloukla do železa na kovadlině a dávala kombinace tónů, které byly krásně harmonické, až na jednu kombinaci. V těchto zvucích rozpoznal oktávu, kvintu a kvartu. Vnímal sice, že interval mezi kvartou a kvintou byl sám o sobě disonantní, ale jinak doplňoval větší z těchto dvou konsonancí. Nadšen vběhl do kovárny a pomocí různých pokusů zjistil, že různost zvuků měla svůj původ v hmotnosti kladiv, ne v síle úderů nebo jejich tvaru, ani ve změně kovaného železa. Když pečlivě prozkoumal hmotnosti kladiv a jejich vliv, což bylo totéž, odešel domů.

[Dále je popisováno, jak si Pýthagorás vyrobil stejné struny, které zatížil různými závažími a vytvořil tímto způsobem tónovou soustavu.]

Na úvod této kapitoly máme citát ze šesté kapitoly spisu *Harmonicum enchiridion*, který napsal pýthagorejský filosof Níkomachos z Gerasy někdy ve 2. stol. po Kr. Popisuje se v něm, jak prý Pýthagorás objevil číselné vztahy, které panují v tónové soustavě.

Nyní se podíváme na tónovou soustavu, jejíž teoretický popis je připisován Pýthagorovi ze Samu (6. stol. př. Kr.) a jeho žákům, proto také nese dosud jeho jméno. Toto ladění je založeno na postupném skládání intervalů kvinty, proto se mu také říká kvintové.

Pro jednoduchost popisu budeme jednotlivé tóny označovat tak, jak jsme dnes v hudbě zvyklí. Zvolme si za základní tón c. Kvintovým vzestupným krokem (tj. násobením $\frac{2}{3}$) získáme tón g, kvintovým sestupným krokem (tj. dělením $\frac{2}{3}$) dostaneme tón F.

$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
F	c	g	c^1

Přeložením tónu F o oktávu výše[4] (tj. vynásobením $\frac{1}{2}$) dostaneme tón f a získáme stupnici o třech tónech (tzv. *tritonickou stupnici*): c – f – g (– c[1]). Příslušné poměry budou následující:

1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
c	f	g	c^1
prima	kvarta	kvinta	oktáva

Sestupným krokem kvinty jsme tak získali nový interval – kvartu:

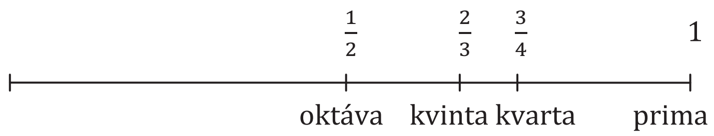
$$\left(1 : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Nabízí se také otázka, jaký je interval mezi kvartou a kvintou. Zformulováno pomocí délek struny: jak musíme zkrátit strunu, abychom dostali příslušný tón? Čím musíme vynásobit $\frac{3}{4}$, abychom dostali $\frac{2}{3}$? Z jednoduché rovnice

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{2}{3}$$

dostáváme $\frac{8}{9}$ a příslušný interval nazveme *pýthagorejský celý tón*. V úvodním úryvku se o něm píše jako o disonantním.

Všimněme si ještě jedné matematické souvislosti. Znázorníme-li tritonickou stupnici na struně, získáme následující schéma.



Kvarta a kvinta leží „někde mezi“ primou a oktávou. Harmonický průměr dvou čísel a, b je definován jako zlomek

$$\frac{2ab}{a+b}.$$

Harmonický průměr délek příslušných oktávě a primě je

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}.$$

Vidíme, že jsme dostali přesně kvintu – interval, který s původními tóny „dobře zní“, je s nimi v harmonii, odtud také pochází název tohoto průměru. Obdobně pomocí aritmetického průměru délek příslušných oktávě a primě dostaneme kvartu:

[4] Přeložení tónu F o oktávu výše provádíme proto, aby nový tón spadal do naší základní oktávy.

$$\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Aritmetický a harmonický průměr tedy vede přímo k základním hudebním intervalům.

Nyní můžeme řadu c – f – g rozšířit o další dva kvintové kroky vzhůru. Příslušné poměry získáme násobením $\frac{2}{3}$. Dostaneme řadu

1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$
c	f	g	d^1	a^1

Přidané tóny opět přeložíme o oktávu níže vydělením $\frac{1}{2}$, čímž dostaneme stupnici o pěti tónech:

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$
c	d	f	g	a	c^1

Tímto způsobem jsme obdrželi *pentatonickou stupnici*. Stupnice o pěti tónech byly známy prakticky u všech starověkých národů. Znali je Číňané (už v 3. tis. př. Kr.), Japonci, národy sídlící v Malé Asii. Dodnes je používána v současné lidové čínské hudbě, v hudbě afrických a zvláště amerických černochů, v lidové hudbě Skotů a Irů. Melodickou strukturou pentatoniky se nechali inspirovat také někteří novodobí hudební skladatelé (A. Dvořák, G. Puccini, B. Bartók). Pentatonickou stupnici (ovšem v dnešním ladění a transponovanou – se základním tónem cis) můžeme na klavíru snadno zahrát tak, že budeme používat pouze černé klávesy.

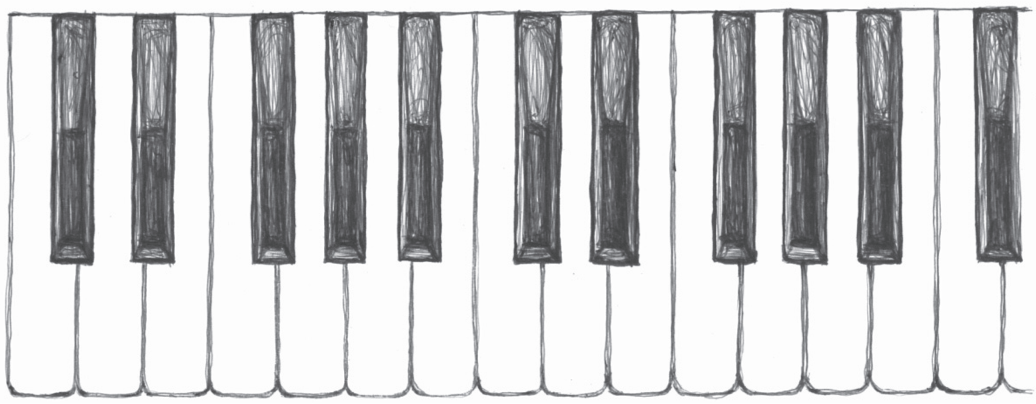
Budeme-li pokračovat v rozšiřování o další dva kvintové kroky vzhůru, získáme celkem sedm tónů: c – f – g – d^1 – a^1 – e^2 – h^2. Příslušné poměry získáme násobením $\frac{2}{3}$. Dostaneme řadu

1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$
c	f	g	d^1	a^1	e^2	h^2

Přidané tóny přeložíme o dvě oktávy níže vydělením $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, čímž dostaneme stupnici o sedmi tónech a příslušné délky struny:

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
c	d	e	f	g	a	h	c^1
prima	sekunda	tercie	kvarta	kvinta	sexta	septima	oktáva

Tímto způsobem jsme obdrželi *heptatonickou stupnici*. Na klavíru bychom všechny tyto tóny (ovšem v jiném ladění!) zahráli právě na bílých klávesách.



c d e f g a h c¹ d¹ e¹ f¹ g¹ a¹ h¹ c²

Prozkoumáme-li intervaly mezi jednotlivými tóny, získáme následující poměry délek struny. Kdybychom chtěli vypsat poměry frekvencí, tak by stačilo vzít z výsledných poměrů převrácenou hodnotu.

Připišme nyní ke vzniklému schématu třetí řádek, v němž budou poměry příslušné sousedním tónům (tónu a tónu předcházejícímu). Získáme tak zlomky, které budou vyjadřovat, jak musíme postupně zkracovat strunu, aby zazněly po řadě všechny tyto tóny.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
c & & d & & e & & f & & g & & a & & h & & c^1 \\
1 & & \frac{8}{9} & & \frac{64}{81} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{3} & & \frac{16}{27} & & \frac{128}{243} & & \frac{1}{2} \\
 & \frac{8}{9} & & \frac{8}{9} & & \frac{243}{256} & & \frac{8}{9} & & \frac{8}{9} & & \frac{8}{9} & & \frac{243}{256} &
\end{array}$$

Vidíme, že v pěti případech, konkrétně mezi tóny c – d, d – e, f – g, g – a, a – h, je interval pýthagorejského celého tónu. Mezi tóny e – f a h – c^1 se nám objevil nový interval, který je menší než celý tón. Nazývá se *malý pýthagorejský půltón* nebo také *limma*.

Pokud provedeme dvakrát vzestupný krok o malý pýthagorejský půltón, dostaneme tón poněkud hlubší, než pýthagorejský celý tón:

$$0{,}901 \ldots = \frac{243}{256} \cdot \frac{243}{256} > \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8}$$

Skutečně, kdyby měla nastat rovnost, muselo by platit

$$\frac{3^{10}}{2^{16}} = \frac{2^3}{3^2}.$$

I bez výpočtu příslušných hodnot je zřejmé, že tato podmínka není splněna. Napíšeme-li předchozí vztah ve tvaru

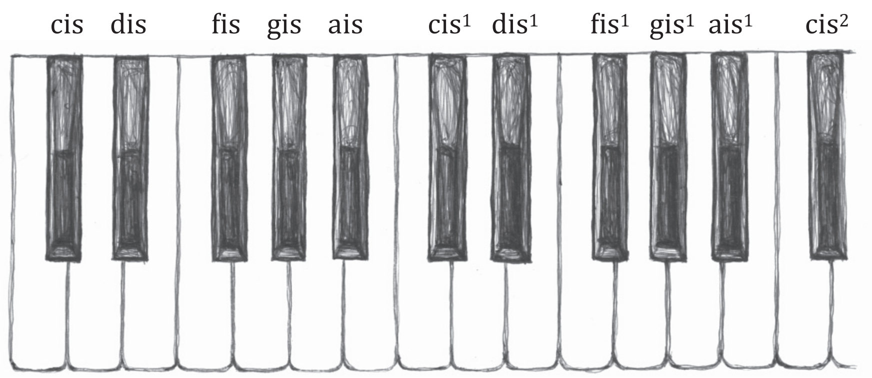
$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12},$$

můžeme mu dát hudební interpretaci: *sedm vzestupných oktávových kroků není přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým.* Přestože tento rozdíl není příliš veliký, jsou důsledky této nerovnosti pro hudbu dalekosáhlé. Později o nich pojednáme podrobněji.

Dalším problémem je, že sice můžeme používat stupnici, kterou jsme právě vybudovali, obecně však nebude možno zahrát zvolenou melodii od jiného základního tónu, než jak bude tato melodie zapsána původně. Důvodem je nerovnoměrné rozložení půltónů a tónů. Náš tónový systém je sice použitelný, je však ještě poměrně chudý. Východiskem může být pokračování procesu, kterým jsme stávající tónový systém vytvořili. Nyní tedy budeme pokračovat v kvintových vzestupných krocích (násobením $\frac{2}{3}$ v horním řádku schématu) a každý takto vzniklý tón vždy přeložíme o tolik oktáv níže, aby spadal do naší základní oktávy (spodní řádek schématu). Navážeme tedy na poslední získaný tón h. Interval pýthagorejského celého tónu mezi sousedními tóny máme v naší stupnici celkem v pěti případech, naši stupnici tedy budeme chtít doplnit pěti novými tóny. Vzestupných kvintových kroků provedeme tedy celkem pět.

$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^6}$	$\frac{2^9}{3^7}$	$\frac{2^{10}}{3^8}$	$\frac{2^{11}}{3^9}$	$\frac{2^{12}}{3^{10}}$
h	fis^1	cis^2	gis^2	dis^3	ais^3
$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$

Tónům, které jsme v tomto kroku přidali, odpovídají na klaviatuře současných klávesových nástrojů černé klávesy.



Do počátku 19. století měly klávesové nástroje (cembala,…) běžně klaviaturu provedenou v inverzních barvách – naše černé klávesy byly bílé (či ze světlého dřeva) a dnešní bílé klávesy byly černé (z tmavého dřeva).

Celkově tedy máme stupnici o dvanácti tónech:

1	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$	$\frac{2^7}{3^5}$
c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h

$$\frac{2^{11}}{3^7} \quad \frac{3^5}{2^8} \quad \frac{2^{11}}{3^7} \quad \frac{3^5}{2^8} \quad \frac{3^5}{2^8} \quad \frac{2^{11}}{3^7} \quad \frac{3^5}{2^8} \quad \frac{2^{11}}{3^7} \quad \frac{3^5}{2^8} \quad \frac{2^{11}}{3^7} \quad \frac{3^5}{2^8}$$

Intervaly mezi jednotlivými tóny jsou naznačeny v posledním řádku tohoto schématu. Vidíme, že se nám tu objevily dva druhy pýthagorejských půltónů: *malý* a *velký*:

$$\frac{3^5}{2^8} = 0{,}949\ 218\ 75 \qquad \text{a} \qquad \frac{2^{11}}{3^7} = 0{,}936\ 442\ 6\ \ldots$$

Malému pýthagorejskému půltónu odpovídá delší struna, je tedy nepatrně hlubší než pýthagorejský půltón velký. Odtud pochází také jejich názvy. Z jejich rozložení ve stupnici můžeme ihned pozorovat, že složením velkého a malého pýthagorejského půltónu dostaneme pýthagorejský celý tón:

$$\frac{2^{11}}{3^7} \cdot \frac{3^5}{2^8} = \frac{8}{9}.$$

Pokud bychom provedli ještě jeden vzestupný kvintový krok (tj. od tónu ais^3), dostali bychom tón eis^4: $\frac{2^{13}}{3^{11}}$, po přenesení do základní oktávy

$$\frac{2^{17}}{3^{11}} = 0{,}7399\ \ldots$$

Očekávali bychom však, že se dostaneme přímo k tónu f, čímž by se kruh uzavřel. Mezi tóny eis a f však je velmi malý interval, poměr délek příslušných strun je:

$$\frac{3}{4} : \frac{2^{17}}{3^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\ 441}{524\ 288} = 1{,}013\ 6\ \ldots$$

Zde se opět dostáváme k problému, na který jsme již narazili: *sedm vzestupných oktávových kroků není přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým.* Po dvanácti kvintových vzestupných krocích jsme sice dostali stupnici, která se skládá z půltónů (i když ze dvou druhů), takže je možno melodie transponovat (hrát výše), skládat kánony apod., tato stupnice však není „uzavřená“, stále bychom mohli pokračovat ve vzestupných kvintových krocích a dostávali bychom další a další tóny. Interval mezi tóny eis a f, tedy rozdíl mezi tónem získaným dvanácti vzestupnými kvintovými kroky a tónem získaným sedmi kroky oktávovými, je vlastně roven intervalu mezi malým a velkým pýthagorejským půltónem

$$\frac{3^5}{2^8} : \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

Tento malý, přesto však dobře slyšitelný a velmi nepříjemně znějící interval se nazývá *pýthagorejské komma*.

Při odvozování pýthagorejské stupnice můžeme také postupovat kvintovými kroky směrem **sestupným**,[5] jednotlivé členy v tomto případě získáme dělením $\frac{2}{3}$. Dostaneme tedy:

---

[5] Stejný výsledek bychom získali vzestupnými kroky kvartovými, které bychom vždy překládali o oktávu níže, takže bychom násobili $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$. Pro zajímavost uveďme, že arabská šestnáctistupňová soustava byla odvozována pýthagorejským způsobem: pomocí 12 kvintových kroků sestupných a 4 vzestupných. Díky

1	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$
c^7	f^6	hes^5	es^5	as^4	des^4	ges^3	ces^3	fes^2	$heses^1$	$eses^1$	asas

Přenesením do jediné oktávy a seřazením těchto tónů podle výšky získáme poměry:

1	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^{10}}{2^{16}}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^{11}}{2^{18}}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^9}{2^{15}}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$
c	des	eses	es	fes	f	ges	asas	as	heses	hes	ces^1

Následujícím členem v této řadě by bylo deses $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$. Po přenesení do základní oktávy dostaneme interval mezi základním tónem c a tónem deses: $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}013\,643\ldots$, což je opět pýthagorejské komma. Intervaly (poměry délek struny) mezi jednotlivými tóny jsou následující:

	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$
c	des	eses	es	fes	f	ges	asas	as	heses	hes	ces
1	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^{10}}{2^{16}}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^{11}}{2^{18}}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^9}{2^{15}}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$

Vidíme, že jsme dostali opět pýthagorejské velké a malé půltóny, jejich rozložení je však odlišné od stupnice budované vzestupnými kroky. Tón cis je například vyšší než tón des. Zajímavá je zde tercie: délka struny odpovídá

$$\text{u tónu e: } \frac{64}{81} = 0{,}790\,12\ldots, \text{ u tónu fes: } \frac{3^8}{2^{13}} = 0{,}800\,903\ldots$$

Zejména u tónu fes pozorujeme nebývalou shodu se zlomkem $\frac{4}{5}$, což nás povede k novému způsobu zavedení tercie jako tónu, který zazní při zkrácení struny o jednu pětinu. Dostáváme tak další tón pomocí poměru malých celých čísel. Pro přehled si takovéto tóny shrňme do tabulky, v níž uvádíme, o kolik je potřeba zkrátit jednotkovou strunu, aby zazněl daný interval.

$\frac{1}{2}$	oktáva	$\frac{1}{3}$	kvinta	$\frac{1}{4}$	kvarta	$\frac{1}{5}$	tercie

2.3 Přirozené ladění

Oktávu a kvintu jsme už použili při vytváření pýthagorejské stupnice. Kvartu jsme použili také, a to při budování pomocí sestupných kvintových kroků – tento postup je totiž ekvivalentní s vytvořením stupnice pomocí vzestupných kroků kvartových. Tercii, další libozvučný souzvuk, jsme však zatím nikde neupotřebili. A přitom se jedná o základní stavební kámen durového

tomu obsahovala tón fes ($\frac{3^8}{2^{13}} = 0{,}800\,903\ldots$), který (jak uvidíme dále) odpovídá přirozené velké tercii ($\frac{4}{5} = 0{,}8$) s velkou přesností – chyba je menší než jedna tisícina.

kvintakordu (např. c – e – g), který je základem veškeré harmonie. Přestože jsme už vybudovali kompletní stupnici (dokonce dvěma způsoby), tak se na základě těchto úvah zdá, že by bylo užitečné vybudovat stupnici ještě jinak, totiž tak, aby obsahovala nejen čistou kvintu, ale také přirozenou tercii. Taková stupnice by měla tu dobrou vlastnost, že by byla mimořádně vhodná pro harmonii. Tento přístup teoreticky popsal jako první Aristoxenos z Tarentu (kolem r. 350 př. Kr.), významný hudební teoretik a žák Aristotelův.

Zastánci pýthagorejského přístupu ke stavbě stupnic byli nazýváni *kanónikové* podle řeckého κανών (kanón; měřicí tyčka, monochord – jednostrunný nástroj). Jednotlivé tóny a intervaly totiž zkoumali pomocí pokusů se strunou. Na tomto základě pak vytvořili systém pýthagorejského ladění založený na oktávových a kvintových krocích.

Zastánci přístupu aristoxenovského se nazývali *harmonikové*. Vycházeli totiž zejména z hudební praxe a při vytváření vlastního systému ladění přibrali do své konstrukce oproti kanónikům také interval velké a malé tercie.

Pýthagorejský přístup se udržel po celý starověk a středověk, a to zejména pro svou matematickou jednoduchost. Teprve v hudbě, která se opírala o harmonický základ, se mohly plně uplatnit přednosti Aristoxenova přístupu. Přirozené ladění se tak začalo oproti pýthagorejskému prosazovat na přelomu 15. a 16. století. Svůj název „přirozené" získalo toto ladění právě díky libozvučnosti tercií, které byly definovány poměry malých celých čísel ($\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$). Naproti tomu pýthagorejská velká tercie je (se svým poměrem $\frac{64}{81}$) uchu mnohem méně přijatelná.

Ukažme si nyní, jak lze vytvořit stupnici v přirozeném ladění. Vytvoříme stupnici opět se sedmi tóny, k čemuž jsme došli pýthagorejským postupem. Vyjdeme opět z toho, že je potřeba zachovat základní intervaly: oktávu, kvintu a kvartu. Tyto intervaly jsou definovány pomocí poměrů malých celých čísel, budou tedy znít libozvučně. Máme tedy:

c	d	e	f	g	a	h	c^1
1			$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$

První, čtvrtý a pátý tón nazýváme postupně *tonika, subdominanta* a *dominanta*. Hudební praxe ukazuje jejich mimořádnou důležitost pro harmonii. Jednak tyto tóny získáme pomocí poměru velmi malých celých čísel, jednak také budou mít vlastnost, o které pojednáme za chvíli.

Sekundu (tj. tón d) opět vytvoříme pomocí dvou vzestupných kvintových kroků a vzniklý tón přeložíme o oktávu níže, schematicky:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{8}{9}.$$

Zbylým tónům už budou odpovídat jiné délky struny. Místo tercie pýthagorejské vezmeme *velkou přirozenou tercii*, tj. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (tón e). Pomocí této tercie nakonec vytvoříme zbylé tóny a, h (sextu a septimu). Sexta vznikne zvýšením kvarty o tuto tercii, podobně septima zvýšením kvinty. Schematicky zapsáno:

sexta = kvarta + tercie	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$,
septima = kvinta + tercie	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Celkem tedy máme stupnici (tzv. *diatonická stupnice dur*):

c	d	e	f	g	a	h	c^1
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Podívejme se nyní, jakou vlastnost mají tonika, subdominanta a dominanta. Zmínili jsme již jejich velikou důležitost pro harmonii. Bez nadsázky můžeme říci, že základním stavebním kamenem harmonie je kvintakord, tedy souzvuk primy, tercie a kvinty (c – e – g). Strukturu kvintakordu nejlépe uvidíme, vypíšeme-li přímo příslušné poměry. Vezmeme-li za základní tón c, dostaneme dva intervaly: c – e, e – g:

$$\frac{4}{5} \qquad \frac{5}{6}.$$

Kvintakord s tímto rozložením intervalů nazýváme durový kvintakord. Postavíme-li analogicky souzvuk tří tónů na tónu f (f – a – c^1), resp. g (g – h – d^1), dostaneme přesně stejné rozložení intervalů, jako v případě kvintakordu c – e – g, tedy $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$, vznikne tedy opět durový kvintakord. Zároveň si všimněme, že každý tón naší stupnice je obsažen alespoň v jednom z těchto tří základních durových kvintakordů.

Z uvedeného matematického rozboru vyplývá, proč je aristoxenovská soustava tak vhodná pro harmonii. Celá stupnice je budována tak, aby zněl co nejlépe durový kvintakord, který lze postavit na tonice, subdominantě i dominantě.

Viděli jsme, že durový kvintakord se skládá z velké přirozené tercie (c – e, $\frac{4}{5}$) a ještě jednoho intervalu (e – g, $\frac{5}{6}$), který je větší, než sekunda, ale menší, než velká přirozená tercie:

$$\frac{8}{9} < \frac{5}{6} < \frac{4}{5},$$

budeme jej nazývat *malá přirozená tercie*. Podobně, jako jsme do základního schématu

$$c - d - f - g - c^1$$

přidali tercii, sextu a septimu zvýšením primy, kvarty a kvinty o velkou přirozenou tercii a dostali jsme tak durovou stupnici, můžeme podobně přidávat místo velké tercie tercii malou a dostaneme tak *diatonickou stupnici moll:*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$

Tóny již nemůžeme označovat písmeny c, d, …, protože dostáváme jiné poměry mezi nimi, vzniklá stupnice je jiná. Kvintakord složený z primy, tercie a kvinty nazveme v této mollové stupnici *mollový kvintakord.* Rozložení tercií je v něm přesně opačné, než u durového kvintakordu: malá tercie – velká tercie. Podobně jako u durové stupnice bychom zjistili, že kvintakordy na tonice, subdominantě a dominantě jsou všechny mollové.

U přirozeného ladění je také zajímavý problém transponování, tj. pokusíme-li se zahrát tutéž stupnici od jiného tónu než c se stávajícími sedmi tóny v každé oktávě. Snadno se vypočte, že by to nebylo možné, dostali bychom tóny další. Bez vyřešení tohoto problému by nebylo možné přirozené ladění prakticky používat. Přesto se těmto otázkám nebudeme podrobněji věnovat, protože cílem tohoto textu je ukázat matematickou podstatu budování tónových soustav. Případného zájemce o podrobnější pojednání z hudebního i matematického hlediska tak musíme odkázat na doporučenou literaturu.

Jak vidíme, činí transponování stále potíže. U pýthagorejského ladění jsme dostali mnoho dalších tónů, některé z nich se však od sebe lišily pouze nepatrně. U přirozeného ladění by vznikla podobná situace. Tento velký počet tónů v jediné oktávě je například pro klávesové nástroje těžko myslitelný. Klaviatura by nabyla přílišné složitosti. Řešení pak spočívalo v tom, že se prováděly u všech typů ladění nějaké kompromisy. Velmi blízké tóny se ztotožnily v tón jediný, čímž se opět získala potřebná jednoduchost celé tónové soustavy.

2.4 Rovnoměrně temperované ladění

Viděli jsme, že oba způsoby ladění, kterým jsme se věnovali, měly poměrně dobré vlastnosti, pokud jsme zůstali u sedmi základních tónů v oktávě. Hudební praxe však vyžaduje soustavu bohatší, která však vedla k zesložitění celé soustavy a následná zjednodušování pak nakonec ke kompromisům, jež některé původně dobré vlastnosti setřely buď úplně, nebo částečně. Nabízí se tedy otázka, zda nevybudovat tónovou soustavu pomocí nějakého velmi jednoduchého principu, který sice od počátku bude činit kompromisy, nebude však způsobovat problémy při transponování. Začneme-li tedy hrát nějakou melodii například o dva tóny výše, měly by být přesně zachovány všechny relativní výšky. Tohoto dosáhneme jen tehdy, když opustíme složitý systém různých půltónů a zavedeme půltón jediný. Z dvanácti stejných půltónových intervalů se pak bude skládat jedna oktáva, k čemuž nás inspiroval už pýthagorejský způsob ladění.

Matematicky lze tuto soustavu vytvořit velmi snadno. Označme hledaný půltónový interval x. Pro jednoduchost zde budeme pracovat s frekvencí tónů, tj. s převrácenou hodnotou délky struny. Interval oktávy má být tvořen dvanácti půltónovými kroky. Uvědomíme-li si, že tón o oktávu vyšší má dvojnásobnou frekvenci (zní totiž na struně zkrácené na $\frac{1}{2}$), dostáváme rovnici

$$x^{12} = 2\,.$$

Hledaná frekvence musí být kladné reálné číslo, dostáváme tak jediné vyhovující řešení:

$$x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059\,463\,\ldots$$

Jednotlivé frekvence pro rovnoměrně temperované ladění získáme pouhým násobením (vzestupným půltónovým krokem), tj. podle vzorce

$$f_n = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n, \qquad n = 0, 1, \ldots, 12.$$

Vidíme, že se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem $\sqrt[12]{2}$. Frekvence pro celou stupnici můžeme shrnout do následujícího schématu. Pro názornost je ve třetím řádku vždy vyznačen interval mezi dvěma sousedními tóny. Rovnoměrnost, kterou zde pozorujeme, dala rovnoměrně temperovanému ladění název.

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	c^1
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

$\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$ $\sqrt[12]{2}$

Tato soustava je po matematické stránce elegantně jednoduchá. Nalezený půltónový interval je však reprezentován iracionálním číslem $\sqrt[12]{2}$, o poměru malých celých čísel tedy nemůže být vůbec řeč, a to ani např. u kvarty nebo kvinty složené z těchto intervalů. Prakticky bude tato soustava použitelná jen tehdy, pokud základní intervaly budou přibližně souhlasit (tj. budou-li se lišit jen „málo“) s intervaly určenými v přirozeném (příp. pýthagorejském) ladění, protože tam byla určujícím prvkem právě harmonie. Srovnejme tedy diatonické stupnice v přirozeném ladění s laděním rovnoměrně temperovaným.

Tab. 1 – Srovnání přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění (RTL)

Půltón		Přirozené ladění		RTL	RTL – PřL
0	c	1	1	1	0
1	cis			1,059 463	
2	d	9/8	1,125	1,122 462	-0,002538
3	es	6/5	1,2	1,189 207	-0,010793
4	e	5/4	1,25	1,259 921	0,009921
5	f	4/3	1,333	1,334 839	0,001839
6	fis			1,414 213	
7	g	3/2	1,5	1,498 307	-0,001693
8	as	8/5	1,6	1,587 401	-0,012599
9	a	5/3	1,666	1,681 792	0,015792
10	b	9/5	1,8	1,781 797	-0,018203
11	h	15/8	1,875	1,887 748	0,012748
12	c^1	2	2	2	0

V tabulce (Tab. 1) udáváme jednotně frekvence, u přirozeného ladění se tedy objeví převrácené hodnoty zlomků získaných při dělení struny. Rozdíly mezi hodnotami rovnoměrně temperovaného a přirozeného ladění jsou uvedeny v posledním sloupci.

Rovnoměrně temperované ladění nebylo historicky prvním pokusem o kompromisní řešení problémů nastíněných v úvodu této podkapitoly. Rozmach těchto řešení, kdy se zachovávaly zvolené intervaly a jiné se vyrovnávaly (temperovaly) podle různých pravidel, nastal v 16. století společně s rozvojem klávesových nástrojů. Rovnoměrná temperatura, kdy byl každý interval kromě oktávy nepatrně rozladěn, se začala více uplatňovat až na počátku 18. století, přestože teoretické základy pro ni byly položeny už v pojednání *Van der Spiegeling der Sinconst* holandského fyzika S. Stevina (1548–1620). Do praktické hudby se ji snažil uvést například Andreas Werckmeister (1645–1706). Johann Sebastian Bach (1685–1750) ve svých dvou souborech 24 preludií a fug *Das wohltemperierte Klavier I, II* (1722, 1744) skvěle prokázal přijatelnost nového temperovaného ladění pro všechny tóniny.

Pokud bychom chtěli u jednotlivých tónů určit jejich absolutní výšku, potřebovali bychom kromě vztahů mezi tóny v rámci oktávy znát ještě přesnou frekvenci jednoho tónu. Ukázalo se, že nejvhodnějším tónem (zejména na základě hudební praxe) je a^1 (tzv. *komorní a*). Jednota ohledně jeho výšky však nepanovala ještě v 19. století. Různé druhy nástrojů měly různé ladicí konvence. Rozdíly byly také mezi jednotlivými národy. V 18. a 19. století kolísala absolutní výška od 409 Hz po 454,7 Hz. Ve Francii byla roku 1858 navržena frekvence 435 Hz, kterou potvrdilo také Rakousko-Uhersko, kde se tato frekvence běžně používala. Vojenské dechové hudby však používaly vyšší ladění (kolem 450 Hz). Současná frekvence *komorního a* rovná 440 Hz, na kterou jsme zvyklí a jíž se řídí hudební nástroje po celém světě, byla ustanovena až na zasedání komise ISA (International Standard Association) v Londýně roku 1939. Zkušenosti s uplatňováním tohoto frekvenčního normálu byly dobré, a tak byl potvrzen ve Stockholmu roku 1953.

Hodnoty všech ostatních tónů v rovnoměrně temperovaném ladění získáme snadno násobením nebo dělením $\sqrt[12]{2}$. Pro úplnost si uveďme frekvence všech tónů jednočárkované oktávy.

c^1	261,6256	g^1	391,9954
cis^1	277,1826	gis^1	415,3047
d^1	293,6648	a^1	440
dis^1	311,1270	ais^1	466,1638
e^1	329,6276	h^1	493,8833
f^1	349,2282	c^2	523,2511
fis^1	369,9944		

Na základě konstrukce pýthagorejského ladění jsme zvolili dělení oktávy na dvanáct stejných půltónových intervalů. Teoreticky jsme však mohli oktávu rozdělit na libovolný počet stejných intervalů. Nejedná se pouze o teoretickou úvahu, například na ostrovech Jáva a Bali je známa pětitónová stupnice *slendro*, jejíž oktáva je dělena do pěti rovnocenných stupňů o velikosti $x = \sqrt[5]{2} = 1{,}148\,698\ldots$ Podobně ve staré indické hudbě se používala sedmistupňová stupnice *svaragrama*, která vycházela z dělení na 22 stejných dílů, tj. $x = \sqrt[22]{2} = 1{,}032\ldots$ Pokud bychom však chtěli zachovat tóny naší běžné hudby, tak bychom se mohli soustředit na dělení půltónu.

Rozdělíme-li půltón na dva stejné intervaly, dostaneme *čtvrttón* ($x = \sqrt[24]{2} = 1{,}029\,3\ldots$). Čtvrttónová stupnice tak bude obsahovat 24 tónů. Podobně bychom mohli půltón rozdělit na tři stejné intervaly, tzv. *šestinotóny* ($x = \sqrt[36]{2} = 1{,}019\,44\ldots$), čímž bychom dostali šestinotónovou soustavu. Nejznámějším skladatelem a teoretikem čtvrttónové a šestinotónové hudby, který si získal světové uznání, je bezesporu rodák z Vizovic Alois Hába (1893–1973).

2.5 Kolik tónů můžeme mít v hudbě?

U pýthagorejského ladění jsme narazili na problém, kolik kvintových vzestupných kroků je potřeba provést, aby se „kruh uzavřel“, tedy abychom získali opět základní tón, jen o několik oktáv vyšší. Kdybychom takový počet n vzestupných kvintových kroků našli, tak by už pomocí vzestupných kvintových kroků nevznikaly žádné nové tóny, situace by se po n vzestupných kvintových krocích opakovala, jen o několik oktáv výše. Postupným vršením vzestupných kvintových kroků jsme narazili na hodnotu $n = 12$, kdy sice *sedm vzestupných oktávových kroků nebylo přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým*, tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12},$$

ale tyto hodnoty se od sebe lišily jen velmi málo – o malý interval[6] zvaný pýthagorejské komma:

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} = 1{,}013\,643\,264\,770\,507\,812\,5\,.$$

Nevychází tedy poměr přesně jedna, ale číslo nepatrně vyšší. Aby však došlo k přesné shodě oktávových a kvintových vzestupných kroků, bylo by potřeba splnit pro nějaká přirozená n a k podmínku

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Její úpravou na tvar $\frac{3}{2} = 2^{\frac{k}{n}}$ a logaritmováním při základu 2 obdržíme

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{k}{n}\,.$$

Jelikož je tento logaritmus iracionální číslo

$$\log_2 \frac{3}{2} = 0{,}584\,962\,500\,721\,156\ldots,$$

nelze jej vyjádřit ve tvaru zlomku. Pýthagorejský postup vzestupných kvint tedy nevede ke konečnému počtu tónů. Můžeme se jen pokusit nalézt takové racionální číslo $\frac{k}{n}$, které bude tento

[6] Pro srovnání: intervalu rovnoměrně temperovaného půltónu odpovídá $\sqrt[12]{2} = 1{,}059\ldots$

logaritmus přibližně vyjadřovat. Z hudební interpretace vztahu $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ vidíme, že n udává počet vzestupných kvintových kroků, každým získáme jeden nový tón. Číslo n (tj. jmenovatel zlomku $\frac{k}{n}$) je tedy rovno počtu různých tónů, které bude tónový systém obsahovat v intervalu jedné oktávy. Číslo k teď není příliš důležité, udává počet oktáv, kterým se (přibližně) rovná n kvint.

Otázka, před kterou nyní stojíme, je čistě matematická. Volně vyjádřeno, potřebujeme *vyjádřit zadané iracionální číslo „co nejlepším" zlomkem.*

V tomto úkolu nám pomůže následující postup. Chceme-li například přibližně vyjádřit zlomek $\frac{87}{38}$ pomocí zlomku s menším jmenovatelem (například pro zjednodušení výpočtů), můžeme postupovat takto:

1. Odebereme celou část zadaného čísla – tj. provedeme dělení.
2. Pokud zbude po dělení nula, proces končí.
3. Zbude-li číslo mezi nulou a jedničkou, jeho převrácená hodnota je číslo větší než jedna. Můžeme tedy opět provést dělení.

Proveďme tento postup na zvoleném racionálním čísle $\frac{87}{38}$:

$$\frac{87}{38} = 2 + \frac{11}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

Výraz, který jsme nakonec dostali, se nazývá *řetězový zlomek*. V čitatelích vznikajících zlomků je vždy číslo jedna, proto stačí zapisovat vždy prvního sčítance ve jmenovateli. Dostaneme tak velmi stručný zápis řetězového zlomku:

$$\frac{87}{38} = [2; 3, 2, 5].$$

Tento kondenzovaný zápis reprezentuje racionální číslo, které můžeme vypočítat například zpětnou úpravou řetězového zlomku.

Pokud bychom ve výpočtu tvaru řetězového zlomku vzali jednotlivé členy a zanedbali bychom v nich vždy druhý sčítanec v posledním jmenovateli, obdrželi bychom posloupnost zlomků:

$$2, \qquad 2 + \frac{1}{3}, \qquad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}, \qquad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}},$$

neboli po úpravě

$$2, \qquad \frac{7}{3}, \qquad \frac{16}{7}, \qquad \frac{87}{38}.$$

Dostali jsme zlomky, které jsou čím dál tím blíže zvolenému racionálnímu číslu. Nazývají se *konvergenty*. Navíc jsou tyto zlomky střídavě větší a menší než zadané racionální číslo $\frac{87}{38}$. Tuto vlastnost má obecně každá posloupnost konvergentů. Jelikož vždy odebereme celou část, a potom pracujeme s pouhým zbytkem, zdá se, že zlomky, které postupně dostáváme, jsou těmi „nejlepšími" s daným jmenovatelem, tj. jsou danému racionálnímu číslu nejblíže. Přesně tuto myšlenku shrnuje následující věta.

Hodnota konvergentu $\frac{P_k}{Q_k}$ racionálního čísla $\frac{p}{q}$ se od hodnoty $\frac{p}{q}$ liší méně než hodnota kteréhokoli jiného zlomku $\frac{m}{n}$, jehož jmenovatel $n < Q_k$, tj. platí nerovnost

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| .$$

Přesností, s jakou konvergent aproximuje zadané racionální číslo, rozumíme absolutní hodnotu rozdílu tohoto racionálního čísla a příslušného konvergentu. Můžeme ji snadno odhadnout pomocí této věty:

Ze dvou po sobě jdoucích konvergentů $\frac{P_i}{Q_i}$ racionálního čísla $\frac{p}{q}$ má alespoň jeden tu vlastnost, že platí

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{2 \cdot Q_k^2} .$$

Zároveň platí, že konvergenty racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou jeho nejlepším přiblížením. Přesněji vyjádřeno:

Pokud budeme hledat posloupnost konvergentů k zadanému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$, bude tato posloupnost konečná – posledním členem bude právě $\frac{p}{q}$. V posloupnosti konvergentů totiž postupně vzrůstají jmenovatele, největším z nich je pak právě q. Pro racionální čísla tedy dostaneme vždy řetězový zlomek konečný.

Pro iracionální čísla vnikají řetězové zlomky nekonečné. Posloupnost konvergentů je tedy také nekonečná. Je tvořena zlomky, kde ve jmenovateli (a čitateli) jsou čím dál tím větší čísla. Konečnou být tato posloupnost nemůže – končila by totiž racionálním číslem, které by nutně nebylo rovno zadanému číslu iracionálnímu, a proces vytváření řetězového zlomku by musel pokračovat. Dá se dokázat, že vezmeme-li konkrétní iracionální číslo α, aproximuje jej konvergent $\frac{P_k}{Q_k}$ s přesností

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k \cdot Q_{k+1}} ,$$

přičemž Q_k a Q_{k+1} jsou jmenovatele dvou po sobě jdoucích konvergentů čísla α.

Velmi snadno se počítají konvergenty u odmocnin. V tomto případě nemusíme znát numerickou hodnotu zadané odmocniny na mnoho míst, stačí její celá část a usměrňování zlomků. Například:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \cdots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}} = [1; \bar{2}]$$

Využili jsme zde toho, že $\left(\sqrt{2} - 1\right)$ je číslo mezi nulou a jedničkou, hraje tedy podobnou roli, jako zbytek po dělení. Vidíme, že jsme dostali řetězový zlomek periodický. V případě odmocnin je to pravidlem.

Nyní jsme již vybaveni pro řešení problému možného počtu tónů v hudbě. Viděli jsme, že je potřeba nalézt racionální číslo $\frac{k}{n}$, které bude blízké hodnotě

$$\log_2 \frac{3}{2} = 0{,}584\,962\,500\,721\,156\ldots$$

Vezmeme-li za základ výpočtu numerickou hodnotu (s přesností na dostatečný počet míst), dostaneme postupně následující řetězový zlomek

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0;\ 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, \ldots].$$

Příslušná posloupnost konvergentů pak bude

$$0, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \ldots$$

Jmenovatele zlomků udávají počty tónů v jedné oktávě. Dostali jsme tedy: 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306, 665, … Hudba s pouhým jedním či dvěma tóny by byla velmi chudá. Částečně by to mohla vyvážit velmi výrazná rytmická složka. S pětitónovou stupnicí se setkáváme u mnoha národů (např. Čína), jedná se o pentatonickou stupnici. Další je tónový systém o dvanácti tónech – jedná se o naši běžnou hudbu. Těchto dvanáct tónů však dnes není tvořeno pomocí vzestupných kvint, ale pomocí principu rovnoměrného temperování. Vidíme, že „dokonalejší“ hudba,[7] než je ta naše, by musela mít 41 tónů,[8] což je pro praktické použití příliš mnoho. O větších počtech, které nám vyšly, ani nemluvě. Naše hudba o dvanácti tónech je tedy velmi dobrým kompromisem mezi bohatostí, dokonalostí a praktičností.

Pro výpočet konvergentů můžeme použít kalkulátoru. Jelikož se však jedná o větší množství rutinních výpočtů, můžeme si napsat krátký program, který udělá veškerou práci za nás. S výhodou jej pak také budeme moci použít v následující kapitole.

---

[7] Ve skutečnosti bychom ještě museli ověřit, zda jsme v takové tónové soustavě dostali také lepší poměry pro tercie, tj. poměry bližší hodnotám v přirozeném ladění. Kombinací s tímto principem byly vytvořeny další tónové soustavy obsahující např. 43 tónů. Snad nejvýznamnější je soustava o 31 tónech holandského muzikologa A. D. Fokkera, který navazoval na teoretické úvahy matematika L. Eulera.

[8] Existují počítačové simulace klaviatury, která má v každé oktávě právě těchto 41 tónů. Experimentovat s různými tóninami lze např. zde: http://tones.wolfram.com/generate/advanced.html?pitch

Zvolili jsme programovací jazyk Python kvůli jeho jednoduchosti a snadné dostupnosti.[9] Uvádíme zde pro přehled kompletní program i s komentáři. V elektronické podobě se nachází také na přiloženém CD.

```
import math                                    # načtení knihovny matematických funkcí (kvůli log, pow)

x = math.log(1.5) / math.log(2)                # zadáme log o základu 2 čísla 1,5
N = 9                                          # počet konvergentů, který se bude počítat

print('log_2 3/2, řetězový zlomek, konvergenty, komma')
print(x)                                       # tisk zadaného čísla (pro přehlednost)

        # Výpočet řetězového zlomku            x // 1 je zlomková část x (vlastně zbytek po dělení 1)
q = []                                         # pole q – zde bude uložen řetězový zlomek
for i in range(0, N):                          # cyklus pro i od 0 do N;   x - (x//1) je celá část čísla x
    q.append( int(x // 1) )                    # do řetězového zlomku přidáváme jednotlivé členy
    x = 1 / ( x - (x//1) )                     # zde se tvoří řetězový zlomek

print(q)                                       # tisk řetězového zlomku

        # Výpočet konvergentů K: P jsou čitatele, Q jsou jmenovatele
P = [ q[0], q[0]*q[1]+1 ]                      # první dva konvergenty
Q = [ 1, q[1] ]

for i in range(2, N):                          # i-té konvergenty (i = 2, 3, ..., N)
    P.append( q[i]*P[i-1] + P[i-2] )           # přidáváme další čitatele a jmenovatele do pole
    Q.append( q[i]*Q[i-1] + Q[i-2] )

        # sestavení výsledných zlomků do tvaru:  čitatel P[i] / jmenovatel Q[i]
Konv = []
for i in range(0, N):
    Konv.append( str(P[i]) + ' / ' + str(Q[i]) )

print(Konv)                                    # tisk konvergentů

        # hodnota "pýthagorejského kommatu" v příslušném tónovém systému
Komma = []
for i in range(0, N):                          # výpis bude na 7 míst
    Komma.append( '{0:.7}'.format( pow(3./2.,float(Q[i])) / pow(2.,float(P[i])) ))

print(Komma)                                   # tisk kommat:  (3/2)^jmenovatel / 2^čitatel
```

Výstupem z programu je číslo, začátek řetězového zlomku, prvních deset konvergentů a příslušná hodnota pýthagorejského kommatu:

```
log_2 3/2, řetězový zlomek, konvergenty, komma
0.5849625007211562
[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2]
['0 / 1', '1 / 1', '1 / 2', '3 / 5', '7 / 12', '24 / 41', '31 / 53', '179 / 306', '389 / 665']
['1.5', '0.75', '1.125', '0.9492188', '1.013643', '0.9886025', '1.00209', '0.9989783', '1.000044']
```

[9] K dispozici je zdarma ke stažení na http://www.python.org/download/

Pro přehlednost si ještě získané výsledky shrňme do tabulky.

Tab. 2 – Možný počet tónů v hudbě

Konvergent	Počet tónů	Komma
1 / 2	2	1,125
3 / 5	5	0,949 219
7 / 12	12	1,013 643
24 / 41	41	0,988 603
31 / 53	53	1,002 090
179 / 306	306	0,998 978
389 / 665	665	1,000 044
9126 / 15601	15 601	*0,999 982*

2.6 Kytara, flétna, varhany

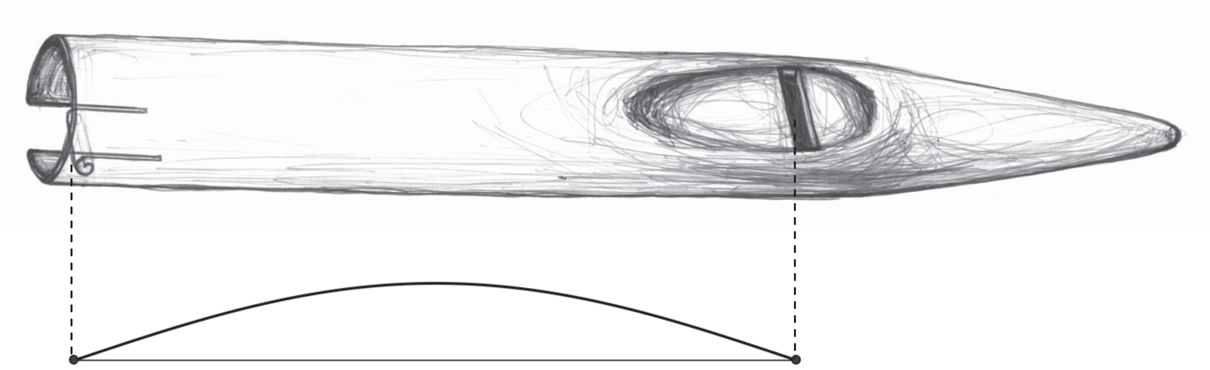
S délkou struny jsme počítali za předpokladu, že je dokonale pružná. Pak pro ni platil Taylorův vzorec. Takovou strunu však na kytaře nemáme, a tak se používají různé empiricky získané vzorce pro korekce na reálnou strunu v konkrétních podmínkách daného hudebního nástroje. Proto když budeme ověřovat naše teoretické výsledky například měřením vzdáleností pražců na kytaře, tak se naměřené hodnoty nebudou úplně přesně shodovat s hodnotami vypočtenými.

Co se týče flétny a varhanních píšťal, výpočet délky probíhá podobně jako u struny. Je však potřeba vzít v úvahu, že existují dva základní druhy varhanních píšťal: *otevřené* a *kryté*. Společné oběma typům je, že k vydání tónu je potřeba uvést ve chvění vzduchový sloupec uvnitř píšťaly. To se děje tak, že vzduch ženeme úzkou štěrbinou s ostrou hranou. Nárazem na hranu vznikne turbulentní proudění, tvoří se periodicky se opakující víry. Počet těchto vírů, které vznikají v jedné sekundě, určuje frekvenci tzv. *třecího tónu*. Ten zní sám o sobě velmi slabě, pokud není zesílen rezonancí spřaženého vzduchového sloupce. Poprvé tento druh tónů pozoroval český fyzik Čeněk Strouhal roku 1878, který také objevil vztah mezi frekvencí třecího tónu f, šířkou štěrbiny u a rychlostí proudění vzduchu v:

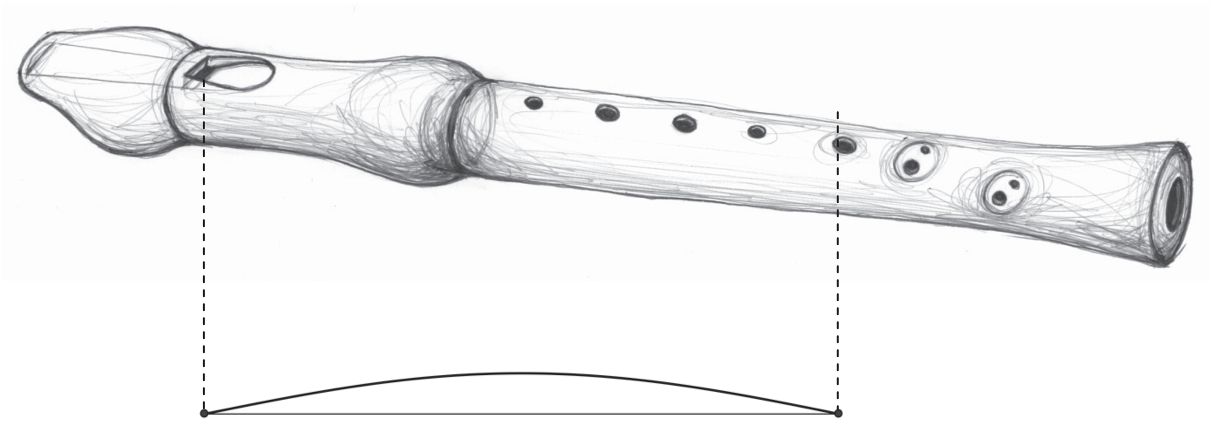
$$f = \frac{v}{u}.$$

Pokud síla vzduchového proudu přesáhne určitou hranici, rozpadne se vír na dva. Počet vírů, které vzniknou v jedné vteřině, se tím zdvojnásobí a zdvojnásobí se tak frekvence tónu. Místo základního tónu píšťaly tedy zazní tón o oktávu vyšší. Tím dojde k tzv. *přefouknutí*. Při stupňování síly vháněného vzduchového proudu se pak vír rozpadá na tři, čtyři, pět (až maximálně osm) vírů, čímž se pak ozývají tóny příslušně vyšší.

Pokud je štěrbina i hrana spojena s chvějícím se vzdušným sloupcem, tak nabývá díky své velikosti naprosté převahy vzdušný sloupec. Ten je tedy rozhodujícím pro výšku základního tónu píšťaly. V případě otevřené píšťaly platí pro výšku tohoto tónu prakticky stejný vztah, jako pro strunu. Pokud si totiž naznačíme (v podélném řezu) chvění vzduchového sloupce v otevřené varhanní píšťale, dostaneme stejný obrázek jako pro strunu.

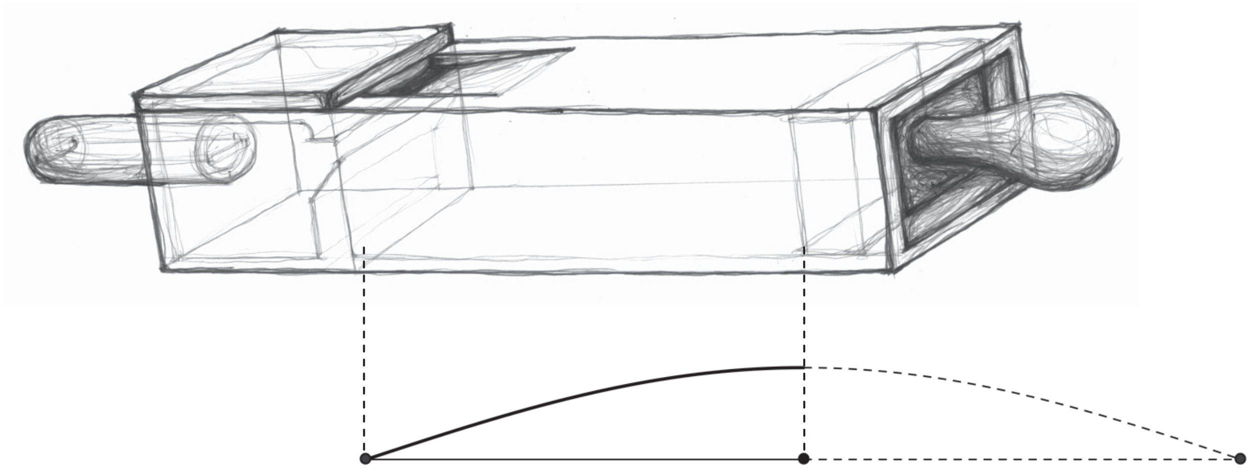


Na principu otevřené píšťaly je také založena zobcová flétna. Základní (tj. nejhlubší) tón zobcové flétny zazní při zakrytí všech otvorů. Jejich postupným odkrýváním můžeme flétnu zkracovat, a tak zní tóny vyšší – tóny diatonické stupnice dur.



Zakryjeme-li například pouze první čtyři otvory, chová se zobcová flétna jako otevřená píšťala, která končí v místě pátého otvoru, jak je naznačeno čárkovanou čarou. Pokud bychom poslední otvor zakryli pouze částečně, vznikla by malá štěrbina, na níž by se tvořilo turbulentní proudění, které by ovlivnilo výšku tónu. Tímto způsobem lze zahrát některé půltóny, pro které nejsou na flétně speciální otvory (s výjimkou dvou otvorů na konci). Hráči na zobcovou flétnu znají také přefukování – zesílením proudu vzduchu lze zahrát tóny o oktávu vyšší, čímž se podstatně rozšiřuje tónový rozsah zobcové flétny. Vzhledem k tomu, že se při přefouknutí automaticky ozývají tóny o oktávu vyšší, lze tyto tóny zahrát opět pomocí postupného odkrývání otvorů. Hmaty pro tón a tón o oktávu vyšší jsou tedy přibližně stejné. Zejména ve vyšších polohách je však potřeba vyvažovat nepřesnosti, které při přefukování vznikají, modifikováním hmatů ze základní oktávy.

Pokud je píšťala na jednom konci uzavřená, tak se postupná vlna od tohoto konce odráží s opačnou fází a na tomto uzavřeném konci vzniká pohybový uzel. Ten tedy není uprostřed píšťaly (jako tomu bylo u píšťaly otevřené), ale až na jejím konci. To znamená, že uvnitř kryté píšťaly je pouze polovina vlny. Celá vlna tak má dvojnásobnou délku. Základní tón kryté píšťaly je proto o oktávu nižší, než je tomu u píšťaly otevřené.



Na obrázku máme nakreslenu dřevěnou krytou varhanní píšťalu a podélný řez vlny, která v této píšťale vzniká. Plnou čarou je vyznačena ta část vlny, která vzniká uvnitř píšťaly, čárkovaně je její doplnění na celou vlnu.

Pokud je píšťala takové délky, že by se do varhan v daném prostoru nevešla, je možno ji sestrojit tak, že nebude rovná, ale například ve tvaru velkého řeckého písmene Γ. V případě potřeby je možno mít na píšťale takovýchto ohybů i více, nemají totiž vliv na samotný tón. Jeho výška se opět řídí celkovou délkou píšťaly. Důležité však je, aby byl zachován konstantní průřez.

Poněkud jinak se chovají hudební nástroje, v nichž dochází ke chvění vzduchového sloupce kuželového tvaru. Teorie je v tomto případě mnohem složitější. Za příklad si vezměme lesní roh. Na tomto žesťovém nástroji s velmi úzkým kuželovým vrtáním dochází velmi snadno k přefukování. Lze tak zahrát nejen tón o oktávu vyšší (tzv. *druhý harmonický tón*), ale i další harmonické tóny[10] až do pořadového čísla 18. Ostatní tóny lze zahrát díky soustavě čtyř ventilů a pomocí částečného nebo úplného krytí (tj. vkládáním ruky do roztrubu).

[10] První harmonický tón je tón sám, odpovídá mu interval primy. Druhý harmonický tón má dvojnásobnou frekvenci, třetí harmonický tón má frekvenci trojnásobnou. Obecně *n*-tý harmonický tón má *n*-násobnou frekvenci tónu základního.