JAK NA VÝUKU PRAVDĚPODOBNOSTI

INSPIRACE ZE STARÝCH UČEBNIC

XIV. seminář z historie matematiky

pro vyučující na středních školách

Poděbrady, 19. – 22. srpna 2019

Magdalena Hykšová

Další materiály:

http://euler.fd.cvut.cz/~hyksova/pravdepodobnost

- **Loterie, sázky**

  „matematická naděje“ – střední hodnota

  deduktivní pravděpodobnost

- **Aplikace: pojišťovnictví**

  úmrtnostní tabulky, složené úročení

  induktivní pravděpodobnost (založená na zkušenosti)

- **Geometrická pravděpodobnost**

  nekonečné množiny příznivých a všech možných případů

LOTERIE, SÁZKY

Malá (janovská) loterie: 5 čísel z 90

Kořeny: Janov, 1576

losováni dva muži ze 120 (noví senátoři)

→ sázky na jména vylosovaných

→ 5 mužů ze 120

→ nahrazení jmen čísly – losování 5 čísel ze 120

první prokazatelně povolená loterie: Janov, 1643

→ Miláno, Řím, Neapol (5 čísel z 90)

→ další země (Rakousko: 1752)

velká obliba, příjem státního rozpočtu

nepříznivé sociální důsledky ⇒ rušení:

Prusko (1810)

Anglie (1826)

Francie (1838)

Bavorsko (1862)

U nás: do roku 1919, pak třídní loterie

Využití při výkladu kombinatoriky a pravděpodobnosti

Kombinace první až páté třídy bez opakování:
extrata, amba, terna, kvaterna a kvinterna

Obvyklá otázka:

Kolik amb, ..., kvinteren lze sestavit z 90 čísel malé loterie?

Emanuel Taftl, 1883

Algebra. Vyšším třídám středních škol českých

Ve společnosti rozprodáno* 100 *losův a výhry stanoveny takto: jedna výhra 2 zlaté* [200 krejcarů], *jedna výhra 1 zlatý, 10 výher po 10 krejcarech, dvacet po 5 krejcarech; kterou hodnotu má mathematická naděje majetníka jednoho losu?

Prodá-li se všech 100 losů, pak musí být vyplaceno:

$$(200 \cdot 1 + 100 \cdot 1 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 20)\ \mathrm{kr} = \mathbf{500\ kr}$$

Na jeden los v průměru připadá výhra:

$$\frac{500}{100}\ \mathrm{kr} = 5\ \mathrm{kr}$$

Jinak zapsáno:

$$200 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{100} + 10 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{20}{100}$$

Očekávaná výhra, úplná mathematická naděje: 5 Kč
(střední hodnota výhry)

matematická naděje: součin výhry a pravděpodobnosti

Bez užitku a škody má tedy los hodnotu 5 kr.

Spravedlivá hra:
sázka = matematická naděje

– aby nebylo ani se strany prohrávajícího (pojistitele) ani se strany vyhrávajícího (pojistníka) neodůvodněného užitku nebo škody

sázky bývají vyšší ⇒ zisk provozovatelů

... počítáť se na chuť obecenstva ve výhru bez vlastní práce **(R. Baltzer / M. Pokorný, 1874)**

Eduard Heis, 1837

Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra

Včetně překladů více než 100 vydání, používána i v rakouské monarchii

Francouzská číselná loterie: 5 čísel z 90

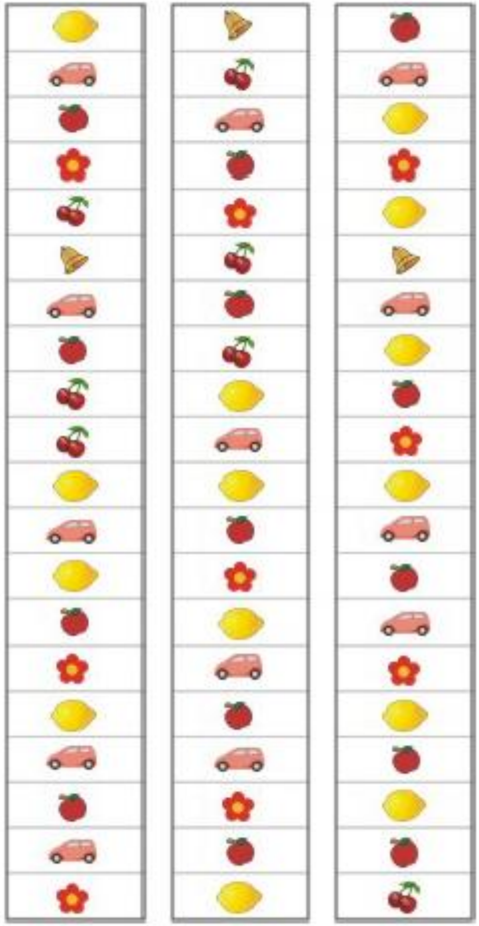
Výsledek	Pravděpodobnost	Vypsaný kurz	Střední hodnota výhry za 1 zl.	Střední hodnota zisku loterie
extrato	1 / 18	17	0,944	5,6 %
ambo	1 / 400,5	270	0,674	32,6 %
terno	1 / 11 748	5500	0,468	53,2 %
kvaterno	1 / 511 038	60 000	0,117	88,3 %

Josef Smolík, 1870
Algebra pro střední školy

Výsledek	Pravděpo-dobnost výsledku: p	Spravedlivý kurz: 1/p	Kurz v Rakousku	Kurz v Itálii
extrato	1 / 18	18	14	15
nominato	1 / 90	90	67	70
ambo	1 / 400,5	400,5	240	270
terno	1 / 11 748	11 748	4800	5500
kvaterno	1 / 511 038	511 038	19 210	75 000
kvinterno	1 / 43 949 268	43 949 268	48 000	1 100 000

V rakouské monarchii byly zakázány sázky v zahraničních loteriích


750
420
250
150
50
20
Diamond



Výherní kombinace	Počet možností	Pravděpodobnost p_i	Výhra x_i	Součin $x_i p_i$
	1	0,0125 %	750 Kč	0,093 75 Kč
	9	0,1125 %	420 Kč	0,472 50 Kč
	27	0,3375 %	250 Kč	0,843 75 Kč
	80	1,0000 %	150 Kč	1,500 00 Kč
	96	1,2000 %	50 Kč	0,600 00 Kč
	100	1,2500 %	20 Kč	0,250 00 Kč
Celkem		**3,9125 %**		**3,760 00 Kč**

sázka v jedné hře: 5 Kč

Kurzové sázky

Španělsko – Honduras (LOH 2012)

Sázková kancelář	1 (Š vyhraje)	X (remíza)	2 (H vyhraje)
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00
Fortuna	1,12	6,70	13,00
Tipsport	1,13	8,10	15,05

Čísla v tabulce:

Kolik bookmaker zaplatí za 1 Kč v případě sázky na správný výsledek

Kde bychom si měli vsadit?

Sázková kancelář	1 (Š vyhraje)	X (remíza)	2 (H vyhraje)
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00
Fortuna	1,12	6,70	13,00
Tipsport	1,13	8,10	15,05

Ať se stane cokoli, Tipsport vyplatí nejvíc

Nejvyšší šance na výhru: Španělsko

Fraška, krach! Španělsko se probouzí z olympijského šoku

Zklamání španělských fotbalistů po porážce od Hondurasu na olympiádě
Foto: Reuters

Vsadíme na všechny možnosti tak, abychom v každém případě vyhráli 100 Kč.

Kolik procent vsazené částky se nám vrátí?

Název	1 (Š vyhraje)	X (remíza)	2 (H vyhraje)	Návratnost
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00	
Fortuna	1,12	6,70	13,00	
Tipsport	1,13	8,10	15,05	

Návratnost – např. pro Fortunu:

abychom vyhráli 100 Kč v případě vítězství Španělska,

musíme na ně vsadit 100 / 1,12

Abychom vyhráli 100 Kč, ať se stane cokoli, musíme zaplatit celkem

$$Z = \frac{100}{1{,}12} + \frac{100}{6{,}70} + \frac{100}{13{,}00} = 111{,}90 \text{ Kč}$$

Vsadíme na všechny možnosti tak, abychom v každém případě vyhráli 100 Kč.

Kolik procent vsazené částky se nám vrátí?

Název	1	X	2	Návratnost
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00	
Fortuna	1,12	6,70	13,00	89,36 %
Tipsport	1,13	8,10	15,05	

Návratnost – např. pro Fortunu:

Abychom vyhráli 100 Kč, ať se stane cokoli, musíme zaplatit:

$$Z = \frac{100}{1{,}12} + \frac{100}{6{,}70} + \frac{100}{13{,}00} = 100 \cdot \left(\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00} \right) = 111{,}90 \ \text{Kč}$$

Návratnost: $$\frac{100}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00}} \doteq 0{,}8936 = 89{,}36\ \%$$

Vsadíme na všechny možnosti tak, abychom v každém případě vyhráli 100 Kč.

Kolik procent vsazené částky se nám vrátí?

Název	1	X	2	Návratnost
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00	91,53 %
Fortuna	1,12	6,70	13,00	89,36 %
Tipsport	1,13	8,10	15,05	93,04 %

MAX

Návratnost – např. pro Fortunu:

Abychom vyhráli 100 Kč, ať se stane cokoli, musíme zaplatit:

$$Z = \frac{100}{1{,}12} + \frac{100}{6{,}70} + \frac{100}{13{,}00} = 100 \cdot \left(\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00} \right) = 111{,}90 \;\; \text{Kč}$$

Návratnost: $$\frac{100}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00}} \doteq 0{,}8936 = 89{,}36\ \%$$

Vypsané kurzy a pravděpodobnosti jevů

Název	1	X	2	Návratnost
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00	91,53 %
Fortuna	1,12	6,70	13,00	89,36 %
Tipsport	1,13	8,10	15,05	93,04 %

Fortuna: $$Z = 100 \cdot \left(\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00} \right) = 111{,}90 \text{ Kč}$$

kurzy sázek

$$\frac{100}{Z} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{6{,}70} + \frac{1}{13{,}00}} \doteq 0{,}8936 = 89{,}36\ \%$$

Spravedlivá sázka:

$$\boxed{\frac{100}{Z} = \frac{1}{p_1 + p_X + p_2} = 1 = 100\ \%}$$

p_1, p_X, p_2 = pravděpodobnosti výsledků 1, X, 2

František Machovec, 1886
Algebra pro vyšší třídy škol středních

Klasická definice pravděpodobnosti, hry, loterie, úmrtnostní tabulky, pojistná matematika

Tři úlohy z geometrické pravděpodobnosti

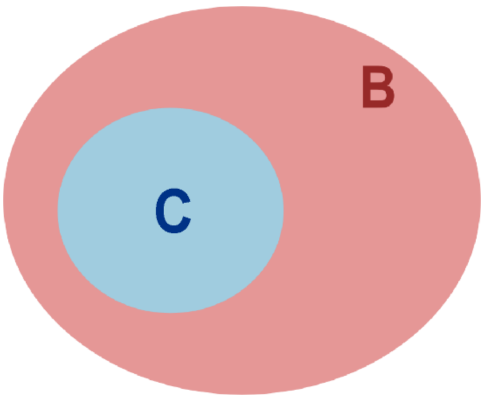
V mnohých případech nelze vyjádřiti čísly počet případů možných a príznivých, ale lze určiti jich poměr, a tudíž pravděpodobnost příslušného zjevu.

GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

Klasická pravděpodobnost:

- založena na kombinatorických úvahách
- např.: pravděpodobnost, že ve dvou hodech padne dvakrát šestka:

$$P(6-6)=\frac{\text{Počet příznivých případů}}{\text{Počet všech případů}}$$

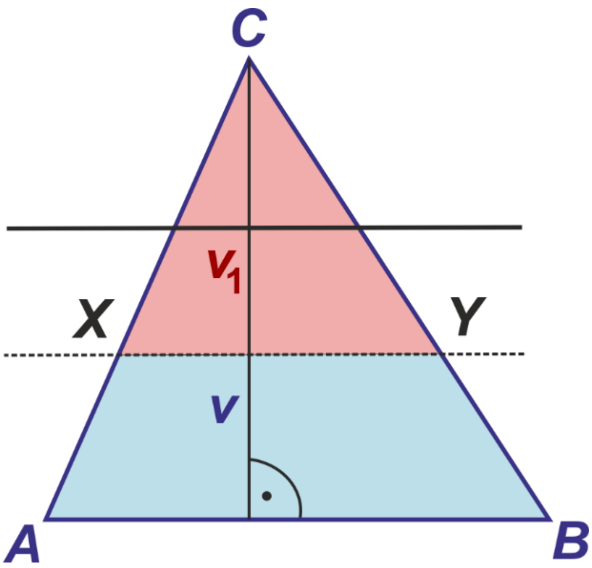


Geometrická pravděpodobnost:

- nespočetná množství případů
- např.: pravděpodobnost, že bod, který leží v množině B, leží i v množině C:

$$P(X \uparrow C | X \uparrow B)=\frac{\text{Míra množiny C}}{\text{Míra množiny B}}$$

V trojúhelníku sestrojena jest se základnou rovnoběžka. Jaká jest pravděpodobnost, že trojúhelník, který při vrcholu vznikl, jest menší* [má menší obsah] *než polovina daného trojúhelníku?



$$X \in AC:\quad S(\Delta XYC) = \frac{1}{2}\cdot S(\Delta ABC)$$

příznivé případy: rovnoběžka prochází bodem úsečky *XC*

$$\Rightarrow\ p = |XC| : |AC|$$

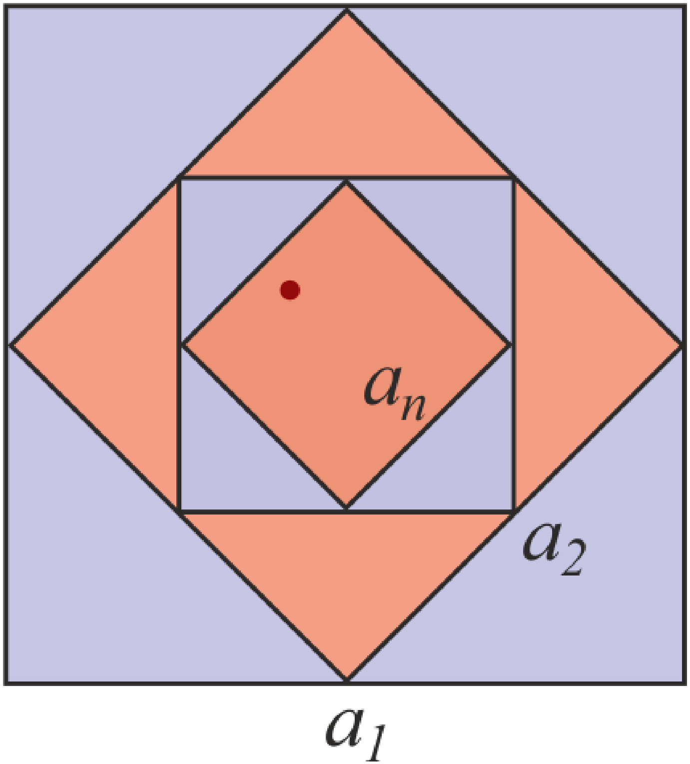
$$S(\Delta XYC) : S(\Delta ABC) = (|XC| : |AC|)^2$$

$$1/2 = (|XC| : |AC|)^2$$

$$\Rightarrow\ p = 1 : \sqrt{2}$$

Body na přímkách, křivkách ... míra: délka

Středy stran čtvercové desky jsou vrcholy nového čtverce, z něhož odvozen jest čtverec týmž způsobem a t.d. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnost, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n-tého čtverce, okraj desky za 1. čtverec počítajíc?



Obsahy čtverců:

$$S_1 = a_1^2$$

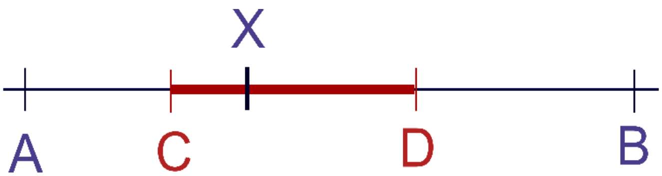
$$S_2 = a_2^2 = a_1^2/2$$

$$\dots$$

$$S_n = a_n^2 = a_1^2 \cdot (1/2)^{n-1}$$

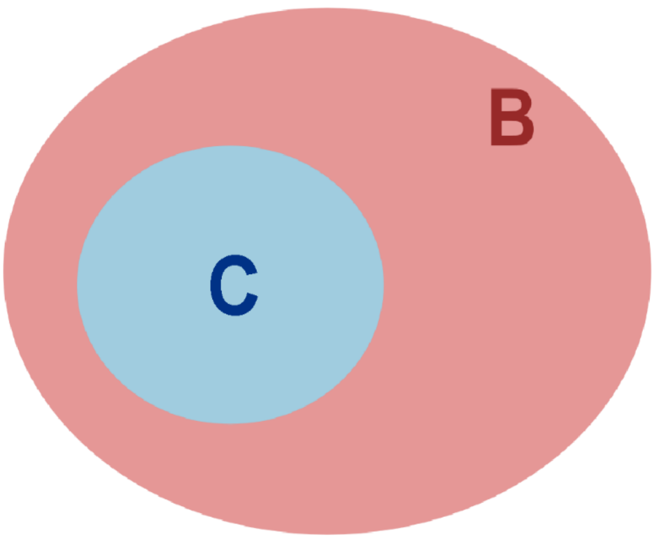
$$p = S_n : S_1 = (1/2)^{n-1}$$

Body na přímkách, křivkách ... míra: délka

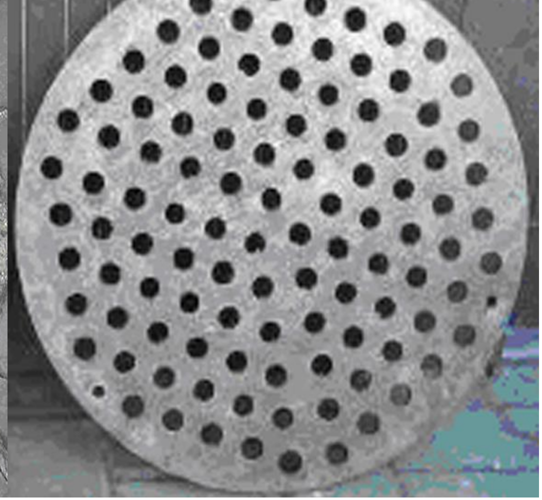


$$P(X \uparrow CD \mid X \uparrow AB) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

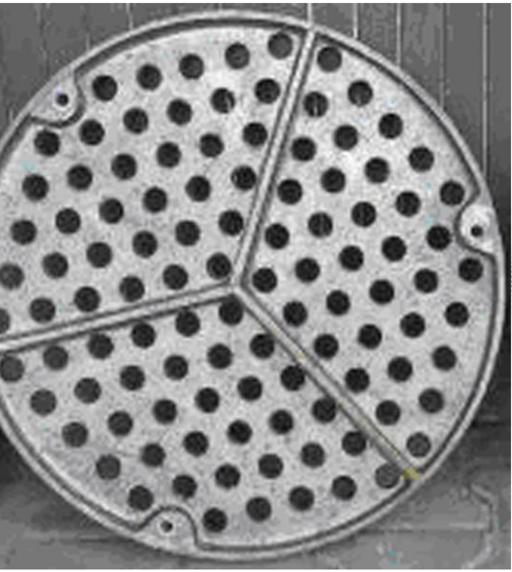
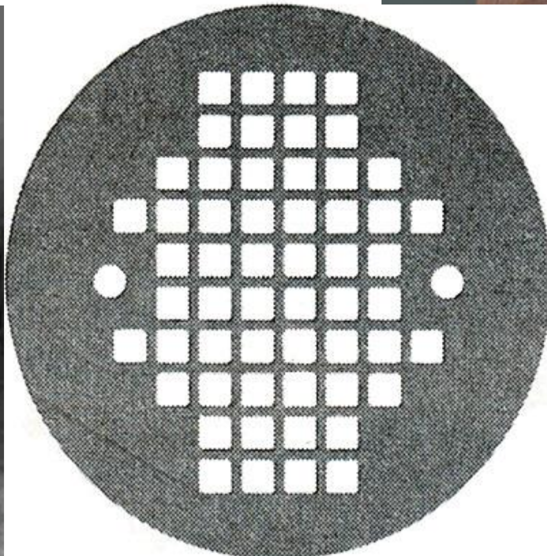
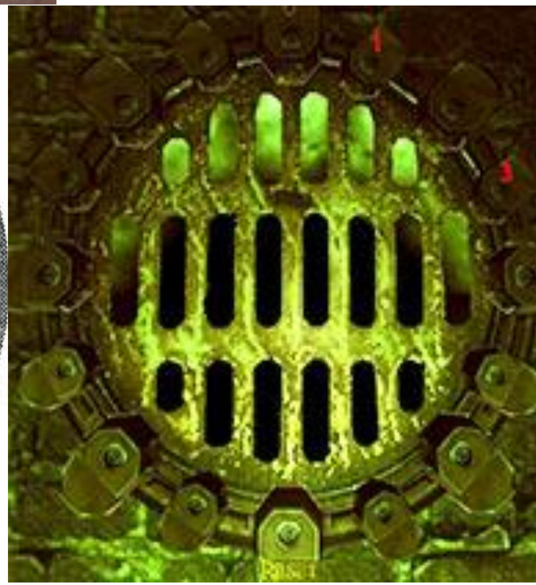
Body v rovině/prostoru ... míra: obsah/objem

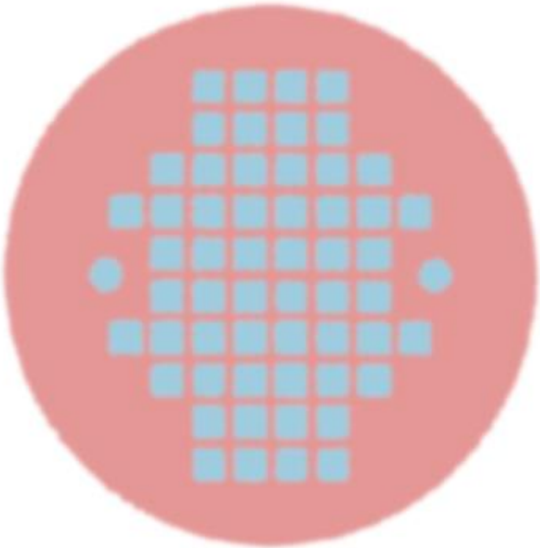


$$P(X \uparrow C \mid X \uparrow B) = \frac{m(C)}{m(B)}$$



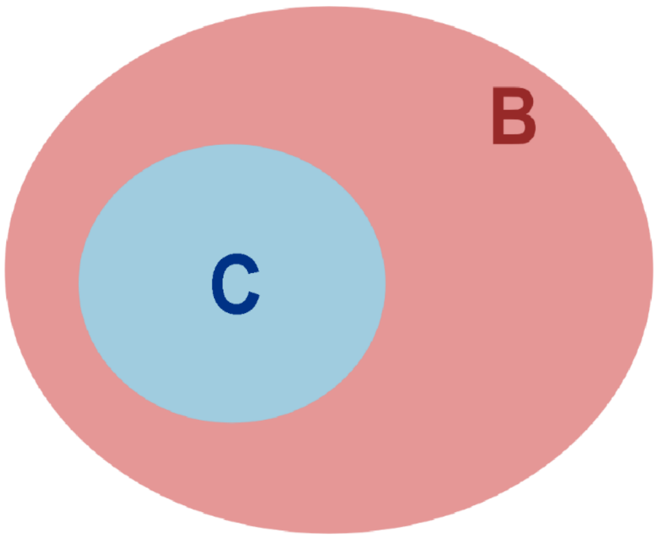
Odhozený nedopalek...



Jaká je pravděpodobnost, že se trefím do otvoru, zasáhnu-li poklop?

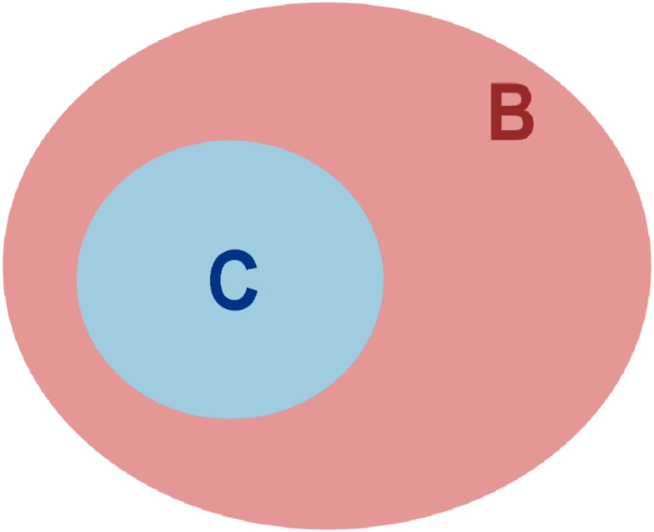
$$P = \frac{\text{Obsah děr}}{\text{Obsah celého poklopu}}$$



Pravděpodobnost, že bod X, který zasáhne množinu B, zasáhne také množinu C:

$$P(X \uparrow C \mid X \uparrow B) = \frac{\text{Míra množiny C}}{\text{Míra množiny B}}$$

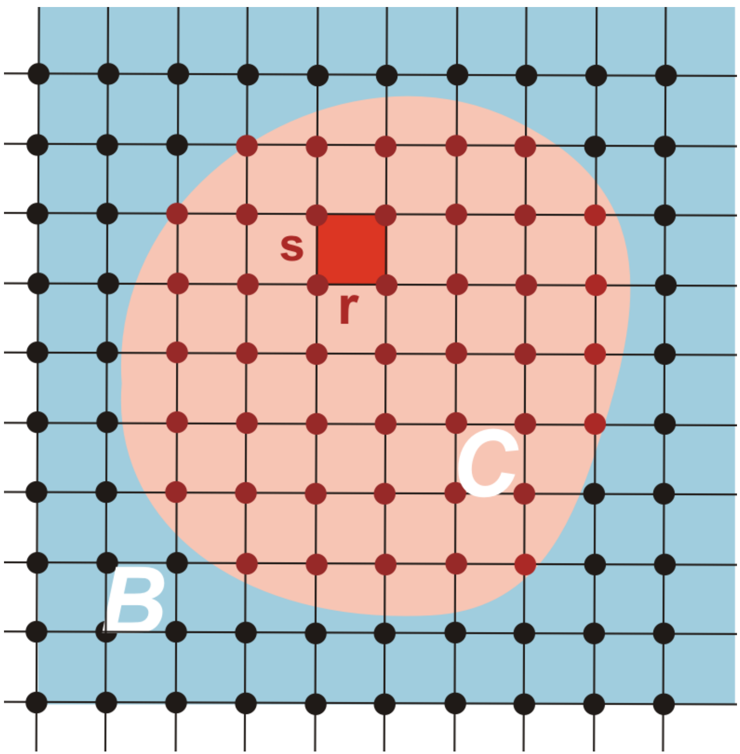
Body v rovinné/prostorové oblasti ... míra: obsah/objem



$$P(X \uparrow C | X \uparrow B) = \frac{m(C)}{m(B)}$$

Body v rovině – odhad plošného obsahu

$$P(X \uparrow C | X \uparrow B) = \frac{S(C)}{S(B)} = \overline{\left(\frac{N_{zasah}}{N_{celk}}\right)}$$



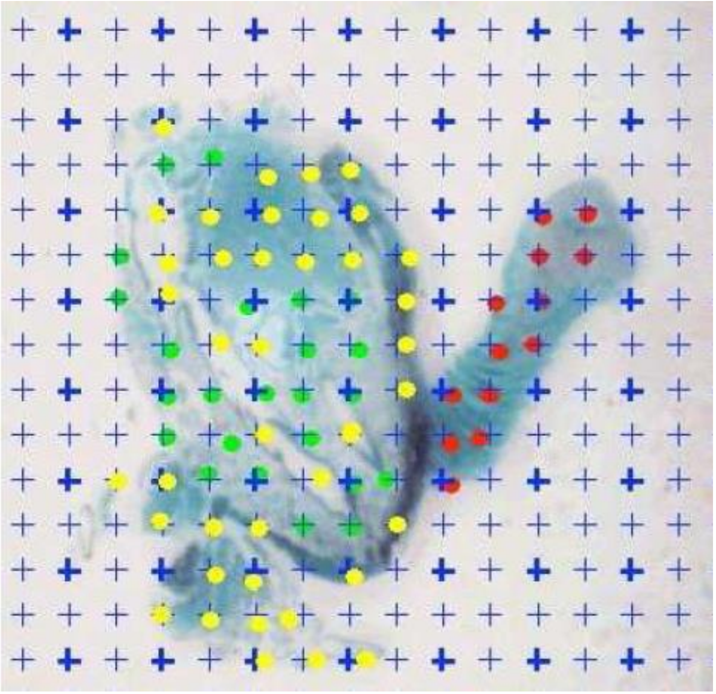
$$S(C) = S(B) \cdot \overline{\left(\frac{N_{zasah}}{N_{celk}}\right)}$$

Odhad:

$$S(C) = \frac{S(B)}{N_{celk}} \cdot \overline{N}_{zasah}$$

$$\boxed{S(C) = rs \cdot \overline{N}_{zasah}}$$

Bodová testovací mřížka



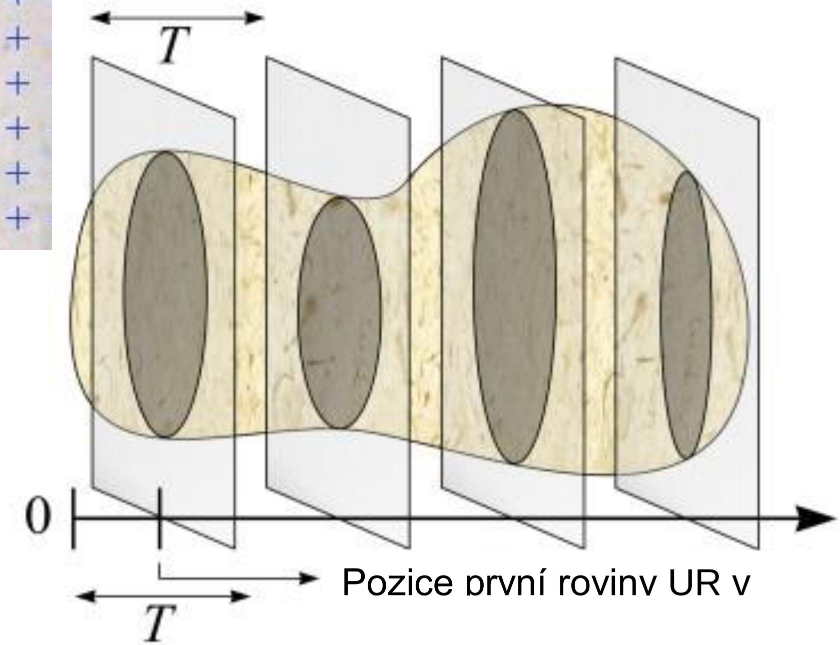
Řez lasturou

Počet průsečíků hodnocené struktury s náhodnou sítí bodů superponovaných se snímkem

↓

odhad obsahu plošných oblastí (profil cévy, léze)

↓




Franz Josef Land
Russia
ARCTIC
OCEAN
Prince Rudolf Island
Eva-Liv Island
Jackson Island
Payer Island
Graham Bell Island
Alexandra Land
Prince George Land
Salisbury Island
Luigi Island
Wilczek Land
British Channel
Markham Sound
Austrian Strait
Hall Island
Hooker Island
McClintock Island
Salm Island
82°
50°
55°
60°
80°

Weissenkirchen im Attergau
am Attersee
233
Berg im Attergau
Schörfling am Attersee
Aurach am Hongar
Sankt Georgen im Attergau
242
Strass im Attergau
Attersee
Weyregg am Attersee
Zell am Moos
Nussdorf am Attersee
B152
E55
Oberwang
264
Tiefgraben
Mondsee
254
B151
Sankt Lorenz
Steinbach am Attersee
Innerschwand am Mondsee
Unterach am Attersee
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

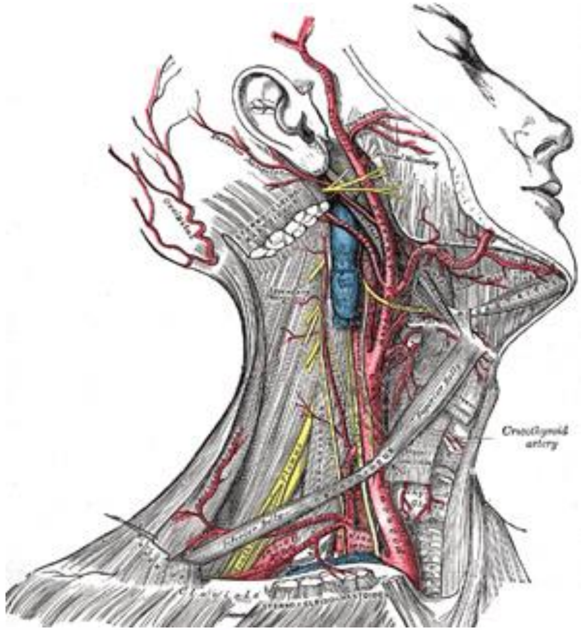
Populace

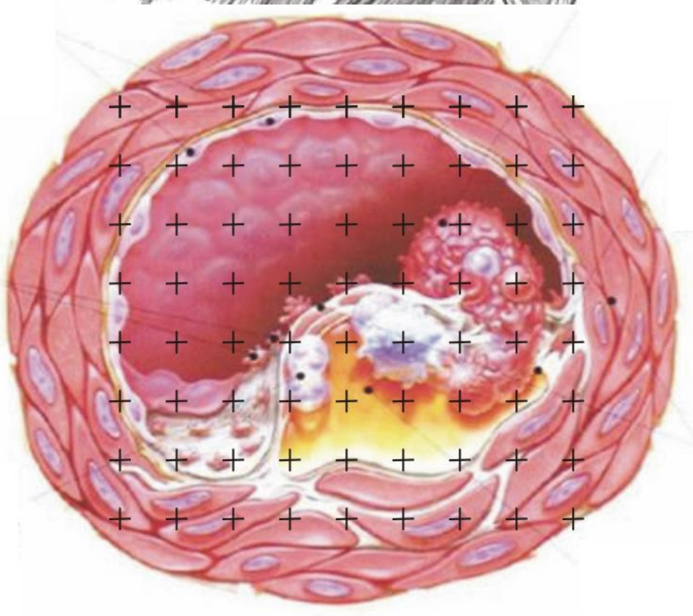
Náhodný výběr

Statistika

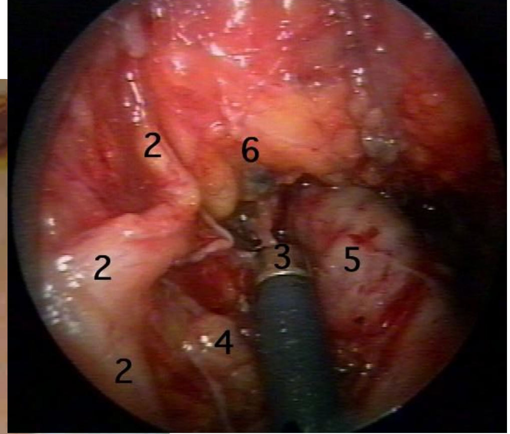
Stereologie

Soubor matematických metod odhadů geomet. charakteristik trojrozměrných struktur na základě pozorování sond nižší dimenze (rovin řezu, projekcí)





Sonda do tkáně

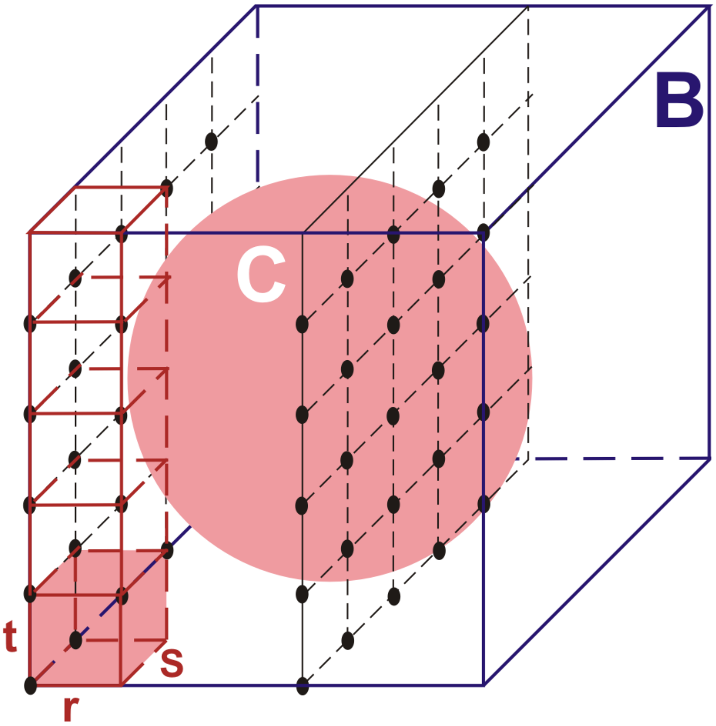


Geologický průzkum

Ropný průzkum/vrt

Body v prostoru – odhad objemu

$$P(X \uparrow C | X \uparrow B) = \frac{V(C)}{V(B)} = \overline{\left(\frac{N_{zasah}}{N_{celk}}\right)}$$



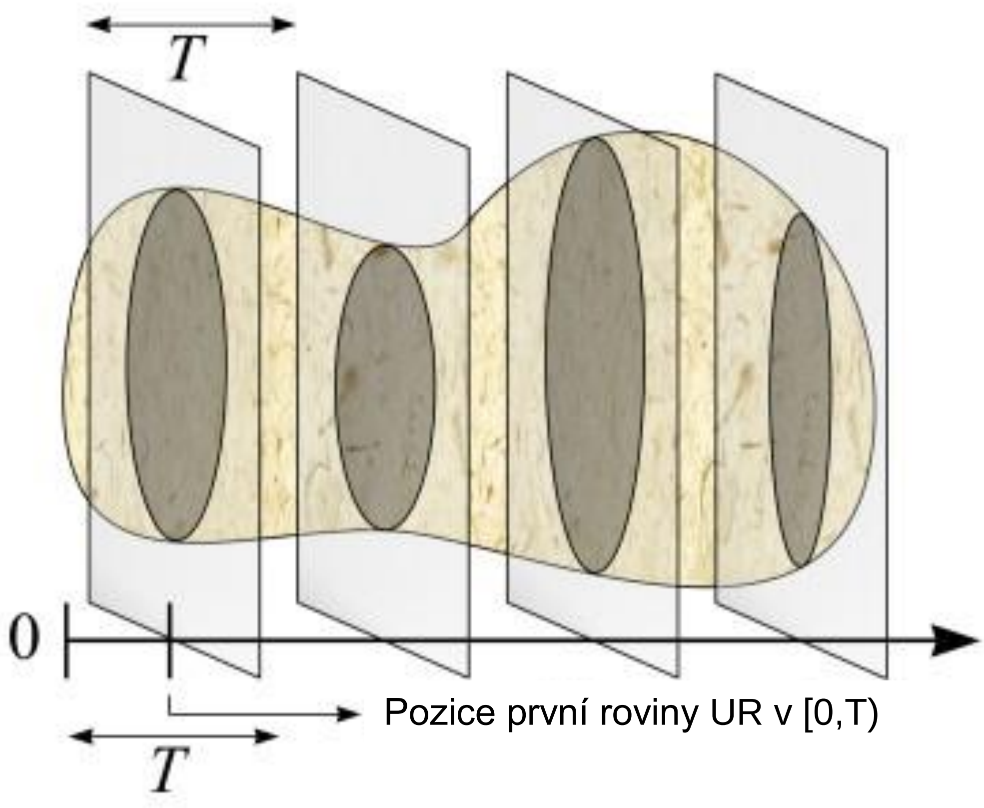
$$V(C) = V(B) \cdot \overline{\left(\frac{N_{zasah}}{N_{celk}}\right)}$$

Odhad:

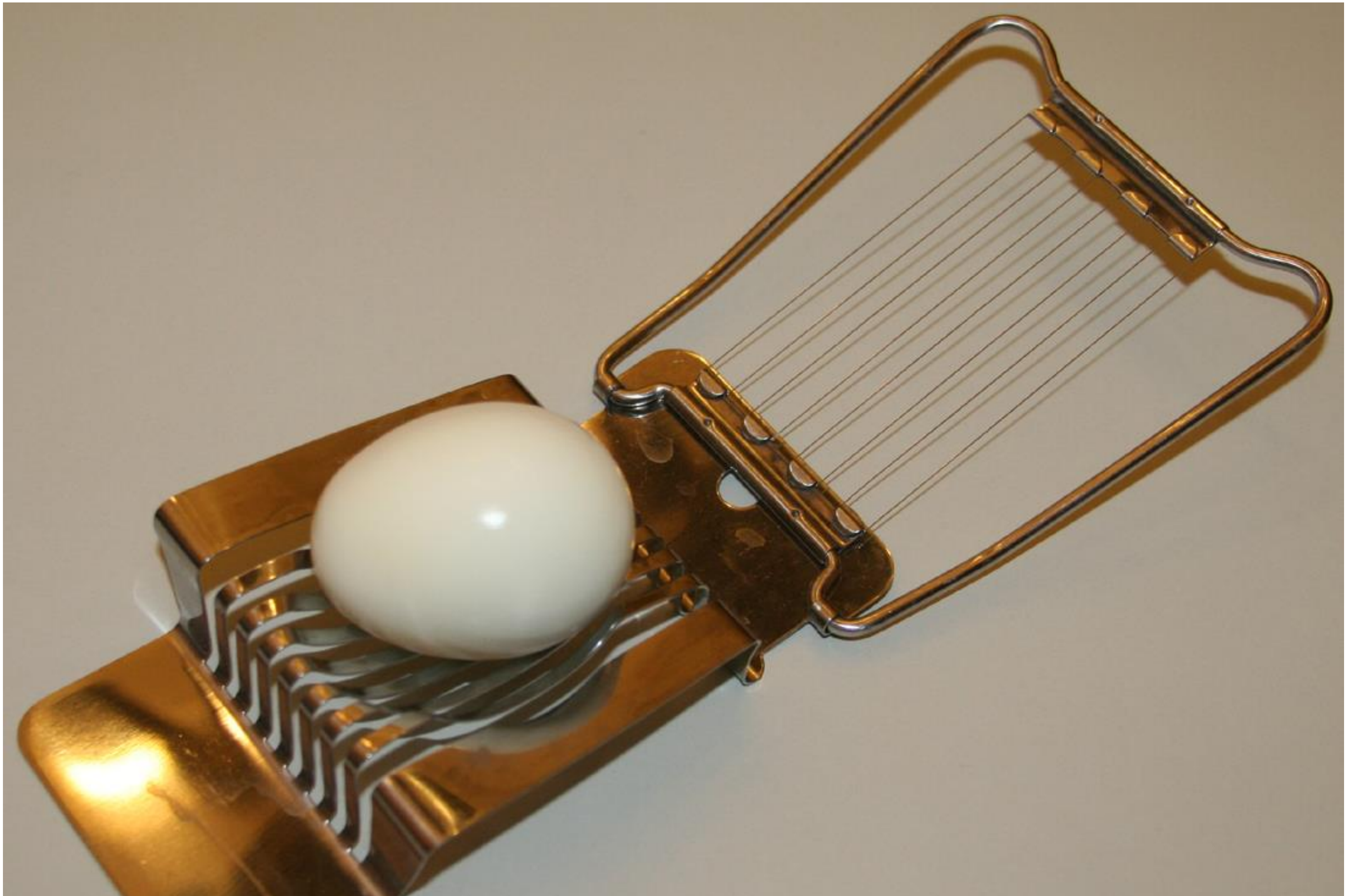
$$V(C) = \frac{V(B)}{N_{celk}} \cdot \overline{N}_{zasah}$$

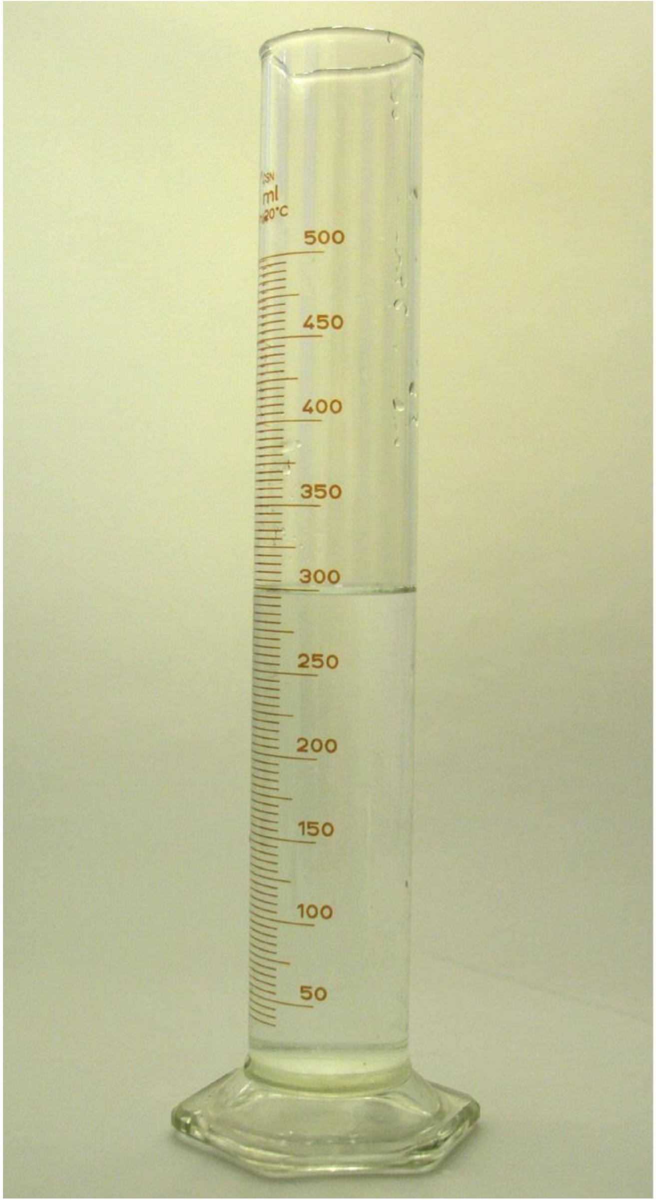
$$\boxed{V(C) = rst \cdot \overline{N}_{zasah}}$$

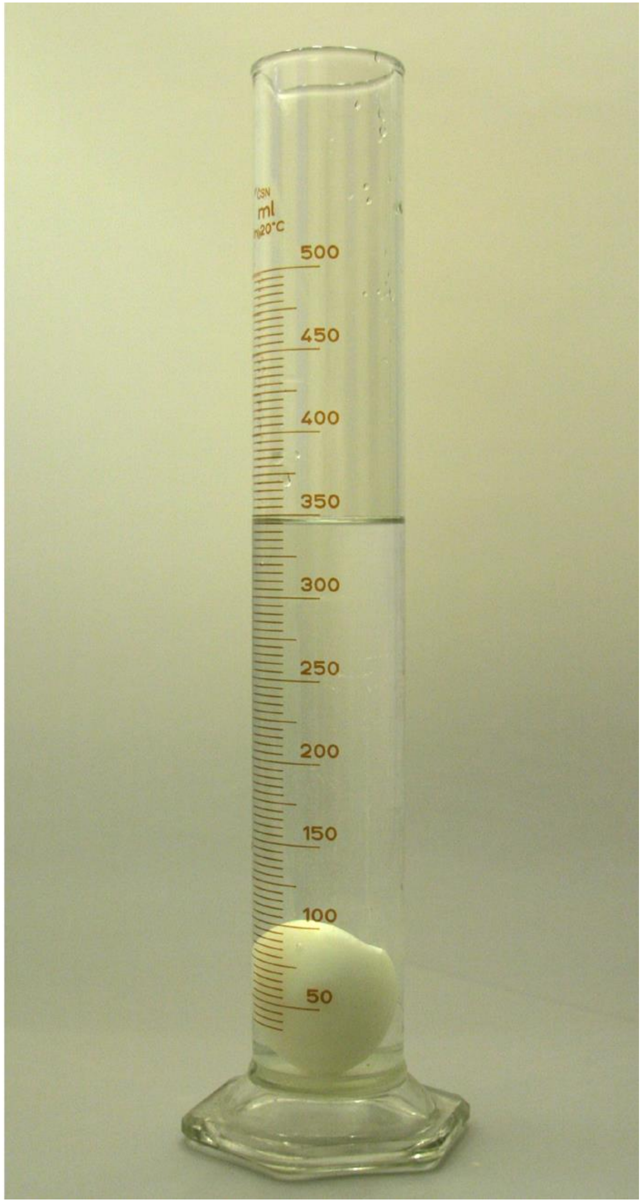
Body v rovině – odhad objemu

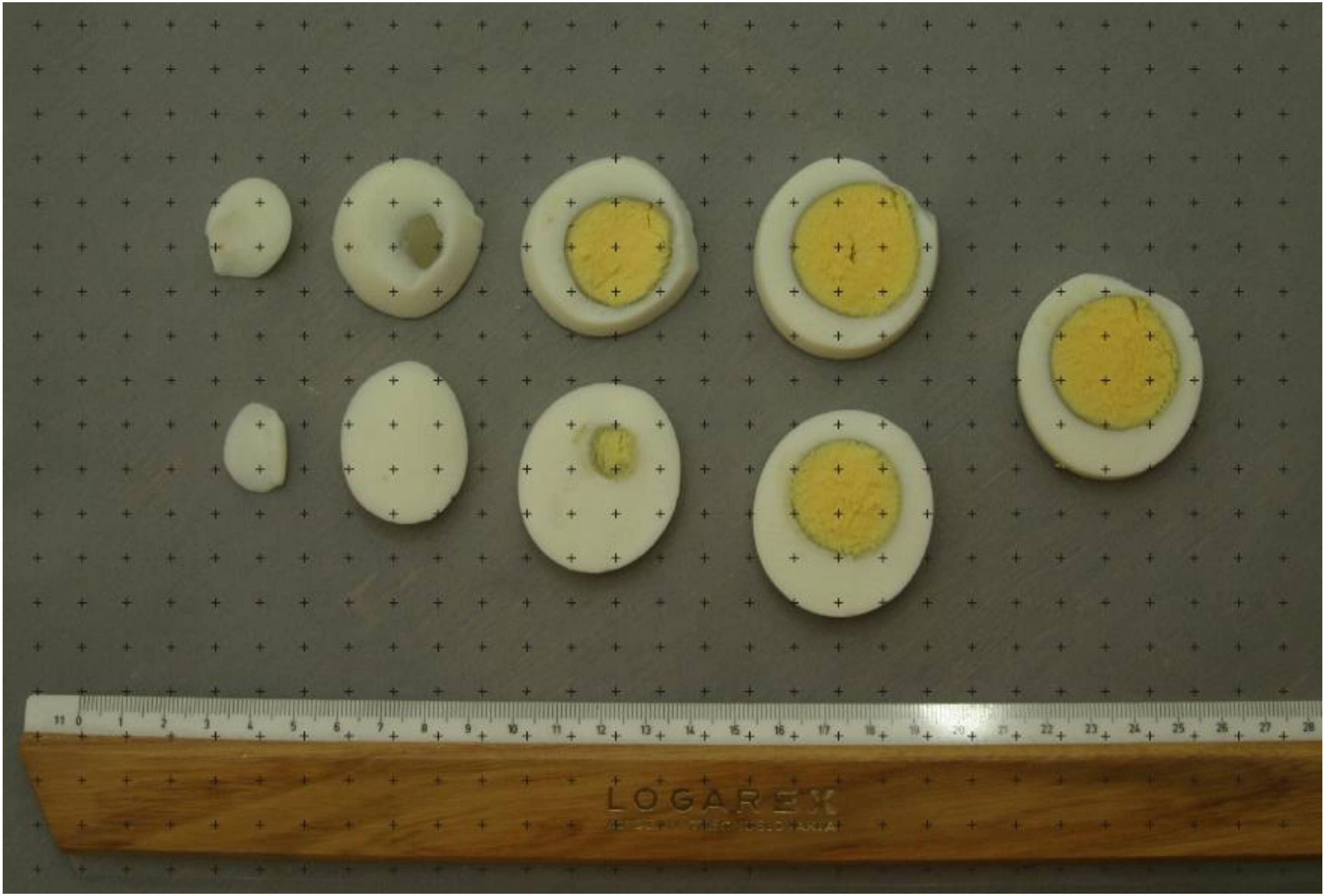


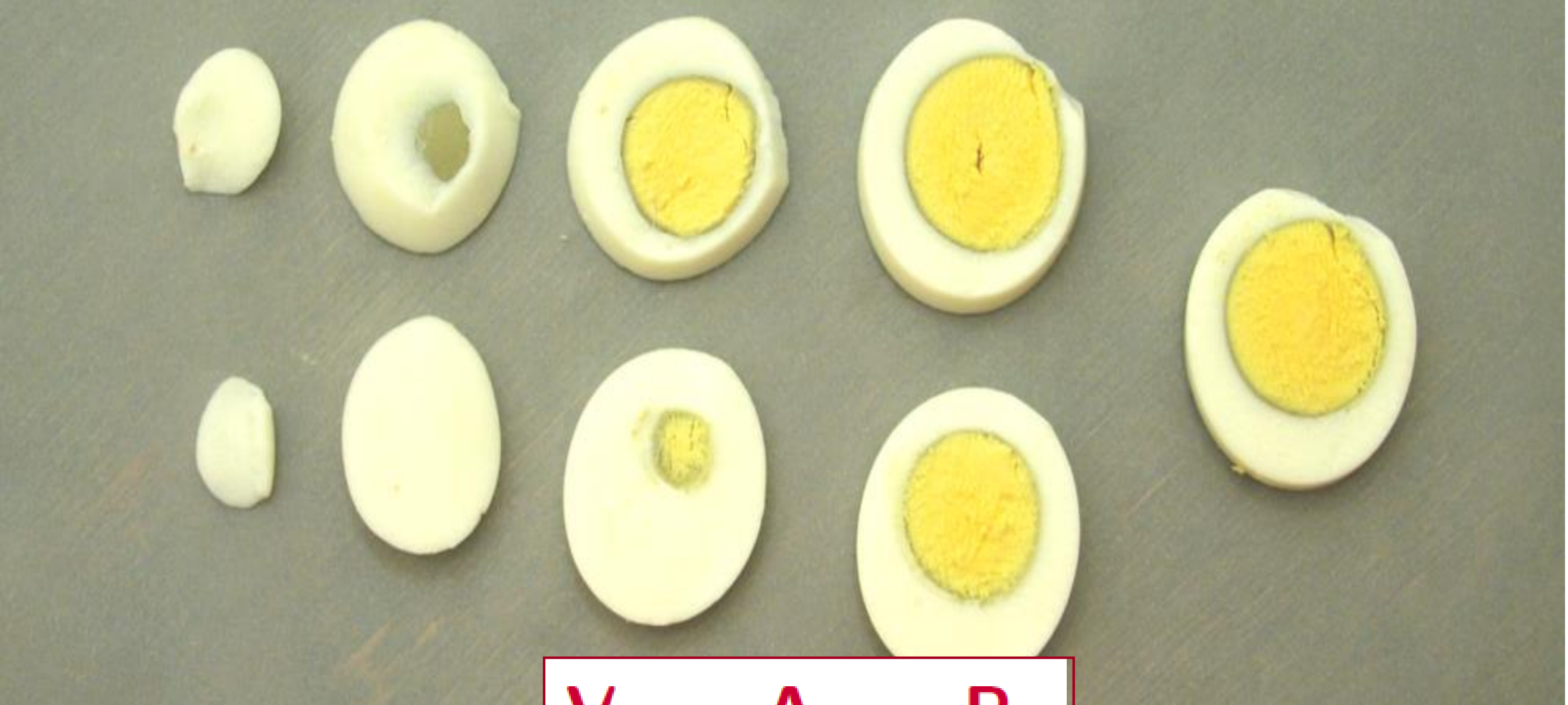
Příklad: Odhad objemu vajíčka:




CSN
ml
20°C
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50


CSN
ml
20°C
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50


LOGAREX



$$V_V = A_A = P_P$$

V_V ... průměrný objemový podíl žloutku

A_A ... průměrný obsahový podíl žloutku v rovinných řezech

P_P ... průměrný podíl testovacích bodů zasahujících žloutek

KOŘENY TEORIE GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

- Isaac Newton (1642 – 1727), 1664 – 1666
- Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707 – 1788), 1733/1777

  Úloha o jehle a několik dalších problémů (dlaždice, mřížka)

- Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827), 1812
- Isaac Todhunter (1820 – 1884), 1857
- Od roku 1860: Francouzští matematikové:

  Gabriel Lamé (1795 – 1870)
  Joseph Bertrand (1822 – 1900)
  Joseph-Émile Barbier (1839 – 1889)

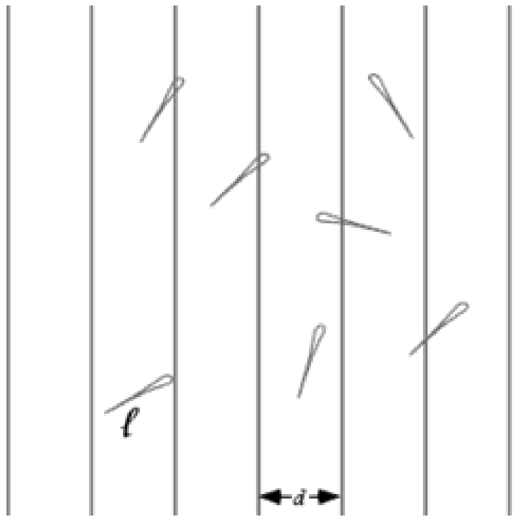
- Od roku 1865: British journal *Mathematical Questions with Their Solutions from the 'Educational Times'*: různé problémy a úlohy týkající se geometrické pravděpodobnosti

  James Joseph Sylvester, Morgan William Crofton,
  Thomas Archer Hirst, Arthur Cayley a další

- První monografie: Emanuel Czuber, 1884

Buffonova úloha o jehle, 1777 (prez. 1733)

Podlaha je rozdělena rovnoběžnými spárami. Vzdálenost libovolných dvou sousedních spár je rovna d. Tyčka (jehla) délky $l < d$ je vyhozena do vzduchu a nechá se dopadnout na podlahu. Jeden hráč sází na to, že tyčka protne některou ze spár, druhý sází na to, že tyčka žádnou spáru neprotne. Jaké jsou jejich šance na výhru? Za jakých podmínek je hra spravedlivá?



Šance hráčů na výhru:

$$\left(1-\frac{2l}{\pi d}\right):\left(\frac{2l}{\pi d}\right)$$

spravedlivá hra: $l/d = \pi/4$

Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827), 1812

Buffonova úloha bez Buffonova jména

poznámka, že teorii pravděpodobnosti lze využít k určování délek křivek a obsahů ploch

$\rightarrow$ od Todhuntera (1857) citováno jako využití pravděpodobnosti $2l/\pi d$ k odhadu čísla π

O. C. Fox, 1864:

při zotavování se z válečného zranění zkoušel pro rozptýlení Buffonův pokus s jehlou

1620 krát, odhady: 3,1780; 3,1423; 3,1416

experiment s 1 620 hody

$\Rightarrow$ výsledky v rozmezí 3,065 až 3,218

- **Isaac Todhunter (1820 – 1884), 1857**

  místo jehly eliptický disk s hlavní poloosou délky $l < d$

- **Gabriel Lamé (1795 – 1870)**

  diskuse o zobecněné Buffonově úloze pro kruh, elipsu a pravidelné mnohoúhelníky zahrnul do přednášek na Université de Paris (jeden ze studentů: Joseph-Émile Barbier)

- **Joseph-Émile Barbier (1839 – 1889), 1860**

→ rozšířil na libovolnou konvexní rovinnou oblast

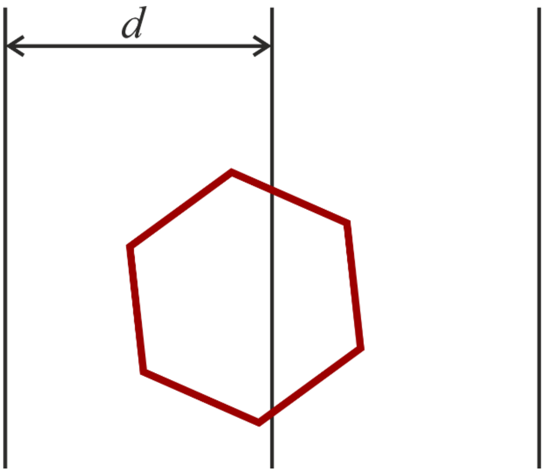
→ na libovolnou nepřerušenou křivku

Elegantní řešení Buffonovy úlohy bez integrálů

Využití k odhadu délek křivek

Konvexní mnohoúhelník

m shodných stran, může protnout nejvýš jednu rovnoběžku



Hra m hráčů:

každému patří 1 strana

dopadne na ni disk $\Rightarrow$ odměna

očekávaná výhra: pro každého E

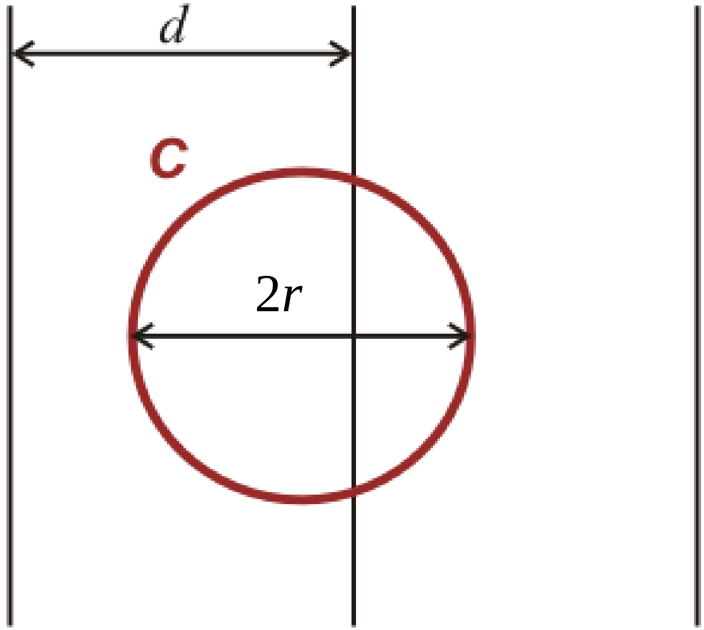
hráč koupí n stran $\Rightarrow$ očekávaná výhra nE

$\rightarrow$ pravděpodobnost zasažení rovnoběžky přímo úměrná počtu stran

$\rightarrow$ i po deformaci zachovávající délky stran a konvexnost

$\rightarrow$ aproximace pomocí m-úhelníků $\Rightarrow$ pravděpodobnost zasažení je stejná pro všechny konvexní rovinné útvary o stejném obvodu a o průměru menším než d

Určení konstanty úměrnosti:



Kruh o poloměru $r < d/2$

Obvod: $L = 2\pi r$

kruh protne rovnoběžku, je-li od ní střed vzdálen o méně než r

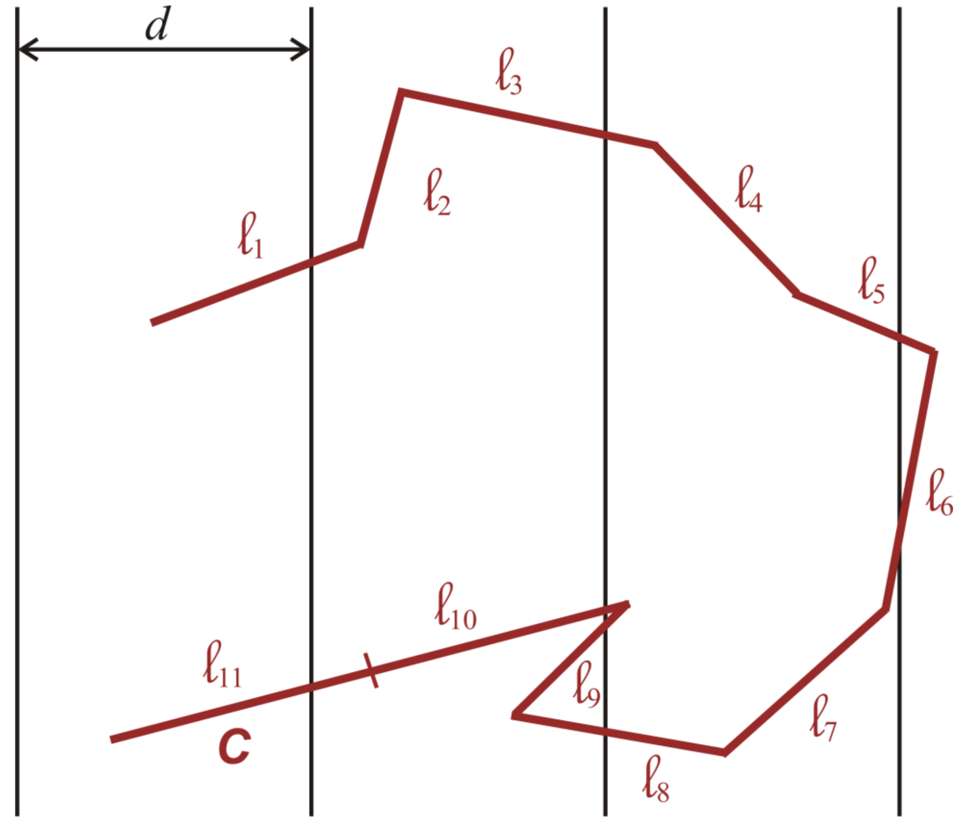
$\Rightarrow$ **pravděpodobnost zasažení:**

$$P = \frac{r}{d/2} = \frac{2r}{d} = \frac{2\pi r}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}$$

tenká tyčka délky l ~ limitní případ eliptického disku s nulovou vedlejší poloosou a s obvodem $L = 2l$

$$P = \frac{2l}{\pi d}$$

Lomená čára délky *l*:



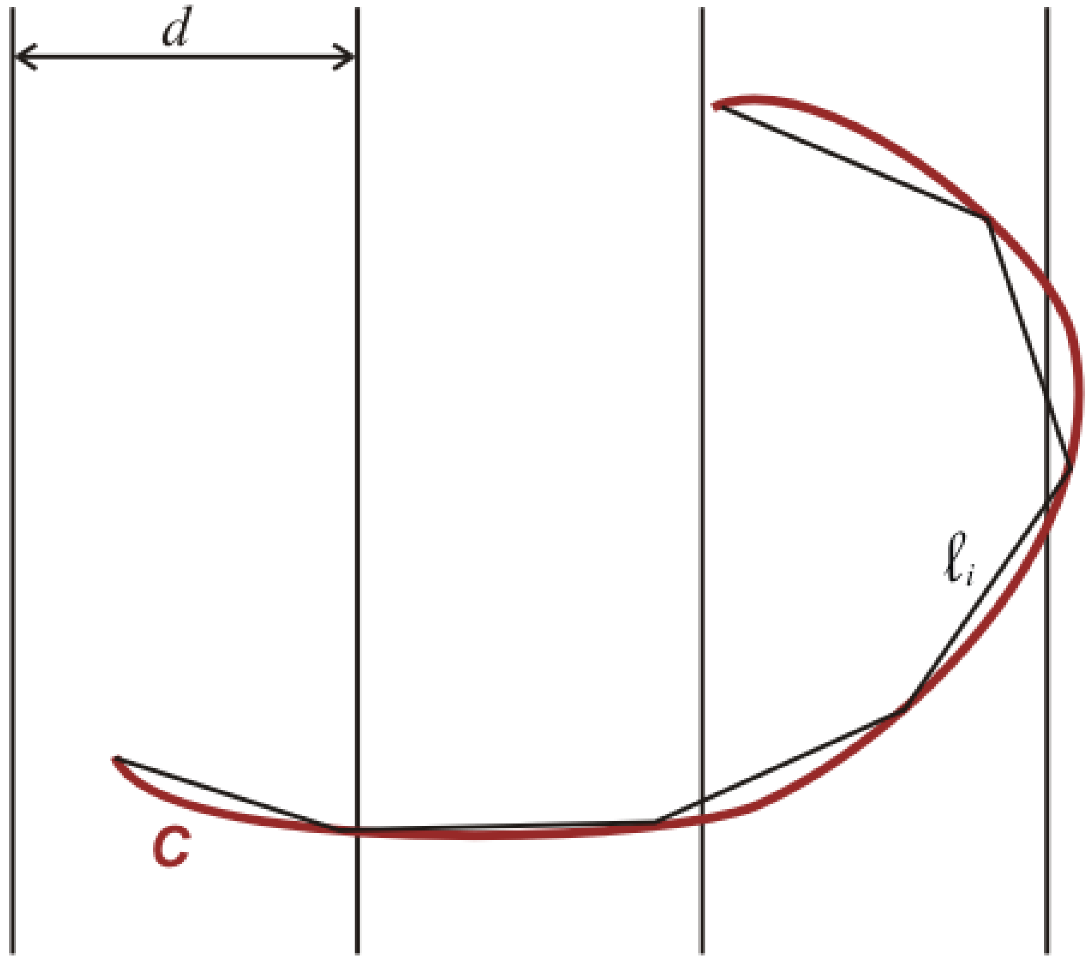
N **... počet průsečíků**

Střední hodnota:

$$E(N)=\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot 1=\sum_{i=1}^{n} \frac{2l_i}{\pi d}=\frac{2}{\pi d}\sum_{i=1}^{n} l_i=\frac{2l}{\pi d}$$

Libovolná křivka libovolné délky *l*:

$$l_i \to 0$$



Střední hodnota počtu průsečíků:

$$E(N) = \frac{2l}{\pi d}$$

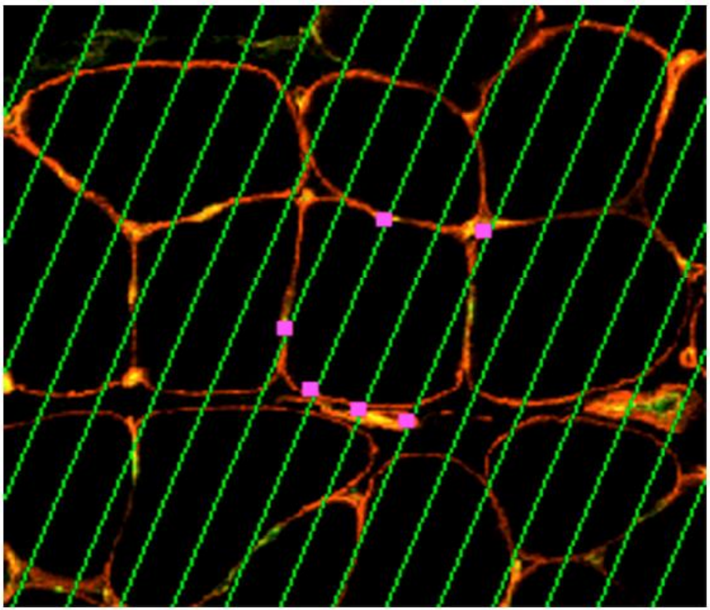
Odhad délky čárového systému

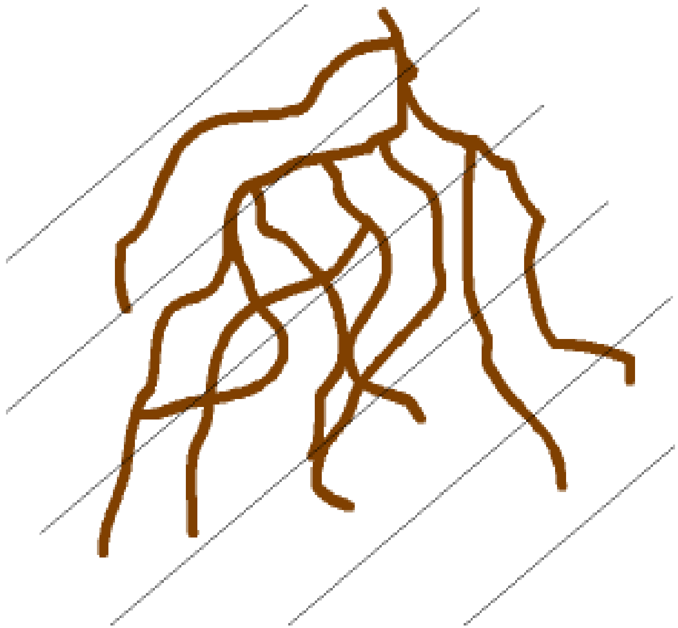
$$E(N) = \frac{2}{\pi d} \cdot l$$

$$[l] = \frac{\pi d}{2} \cdot N$$

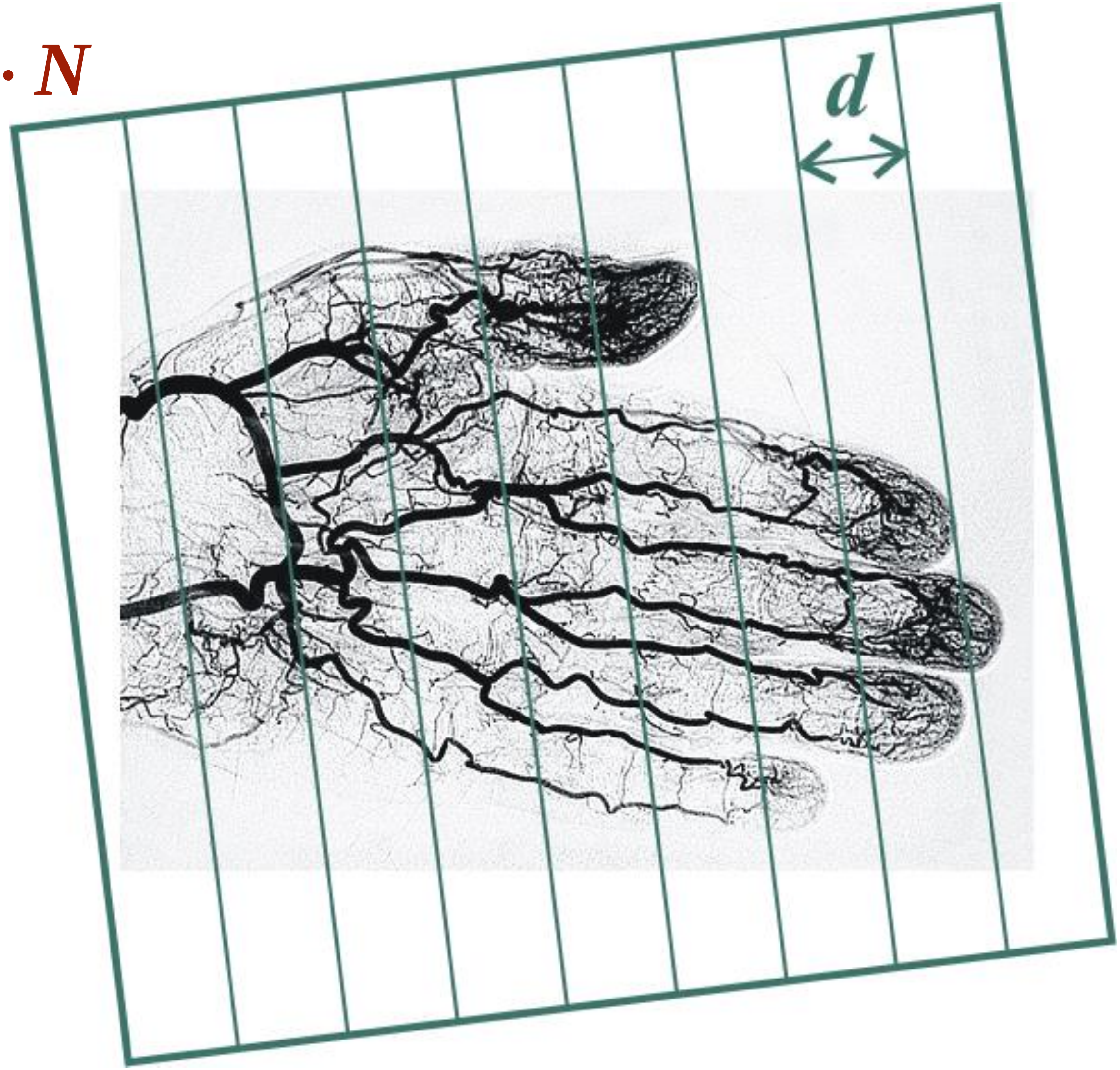
popř.

$$[l] = \frac{\pi E(d)}{2} \cdot N$$





$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot N$$



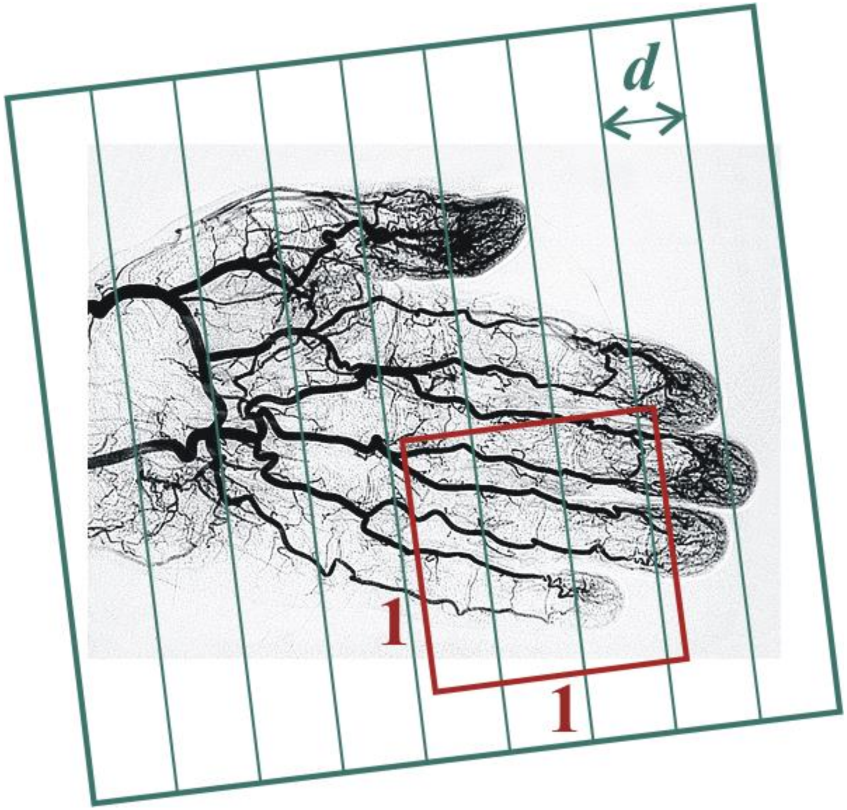
Délka systému testovacích čar připadající na jednotku obsahu:

$$L_A = \frac{1}{d}$$

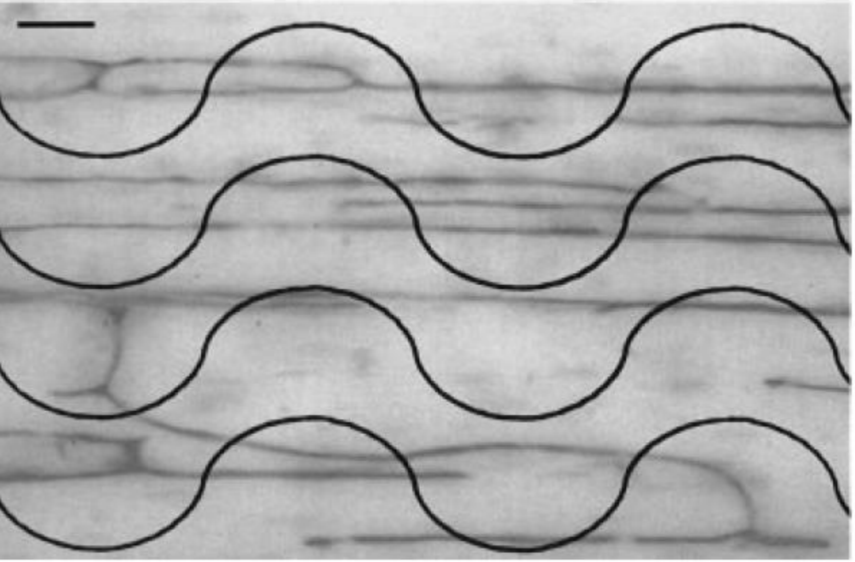
(Délková intenzita)

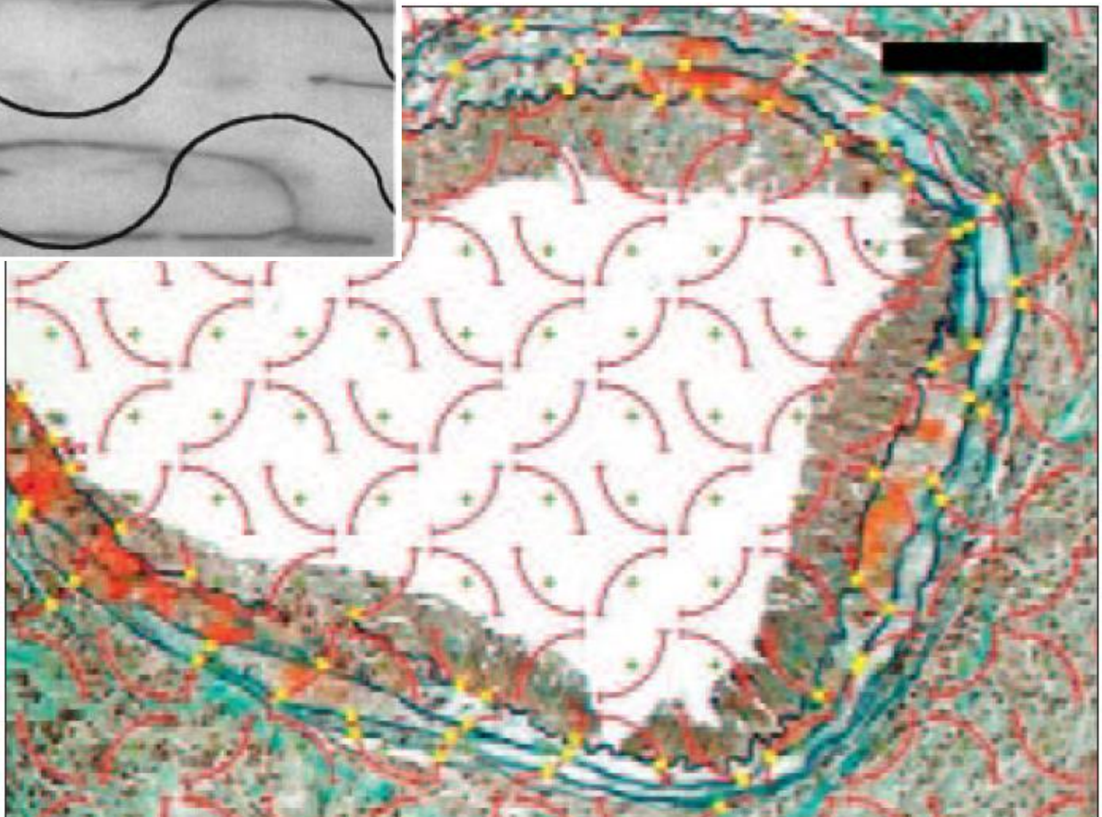
$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L_A} \cdot N$$

$$[l_A] = \frac{\pi}{2} \cdot N_L$$



→ **místo rovnoběžek systém křivek**





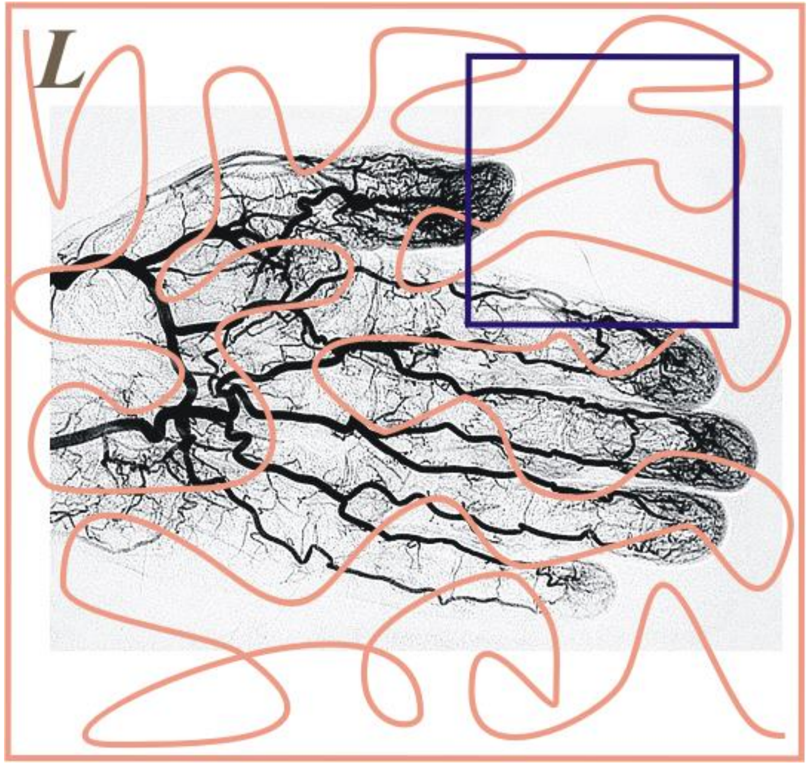
↪ libovolná křivka délky L, konstantní délkové intenzity

$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L_A} \cdot N$$

$$L_A = \frac{L}{A}$$

$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{L} \cdot N$$

$$[l_A] = \frac{\pi}{2} N_L$$

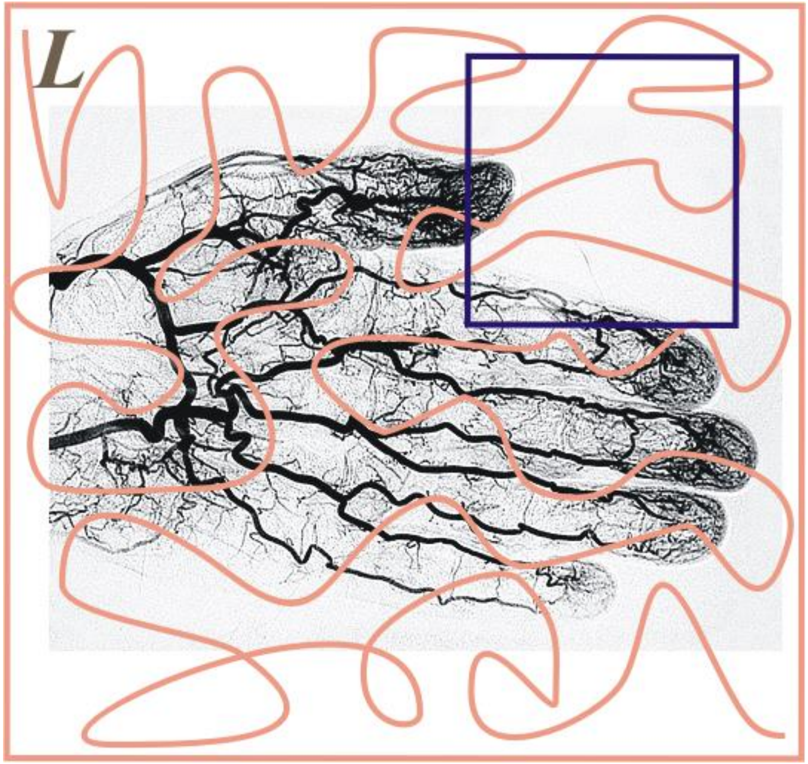


↪ libovolná křivka délky L, konstantní délkové intenzity

$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L_A} \cdot N$$

$$L_A = \frac{L}{A}$$

$$[l] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{L} \cdot N$$



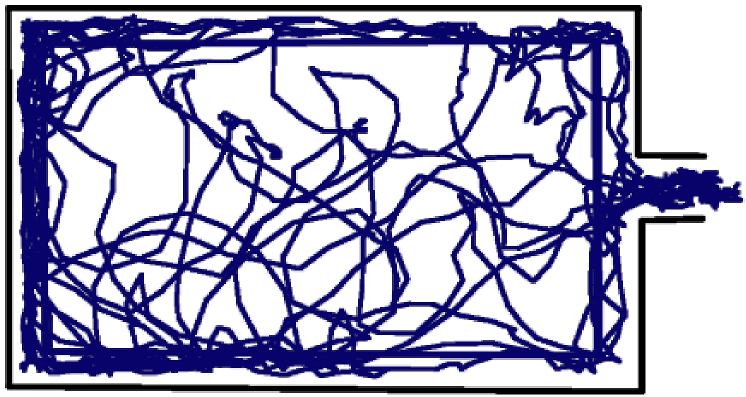
$$[l_A] = \frac{\pi}{2} N_L$$

$$[A] = \frac{2lL}{\pi N}$$

Ants estimate area using Buffon's needle

Eamonn B. Mallon, Nigel R. Franks, 2000

L^S

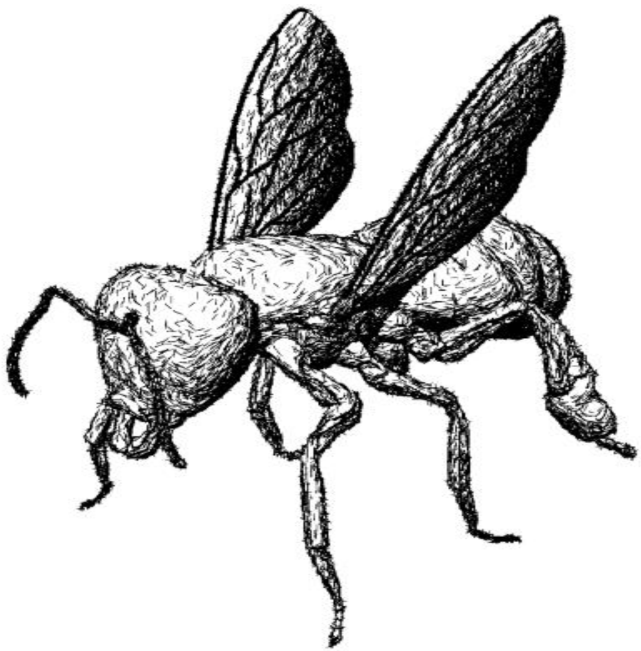


$$[A] = \frac{2lL}{\pi N}$$

l

How Might Individual Honeybees Measure Massive Volumes?

Nigel R. Franks, Anna Dornhaus



Jak mohou jednotlivé včely měřit velké objemy možných míst pro hnízdo pomocí zobecněné „Buffonovy metody“

J. É. Barbier, 1860

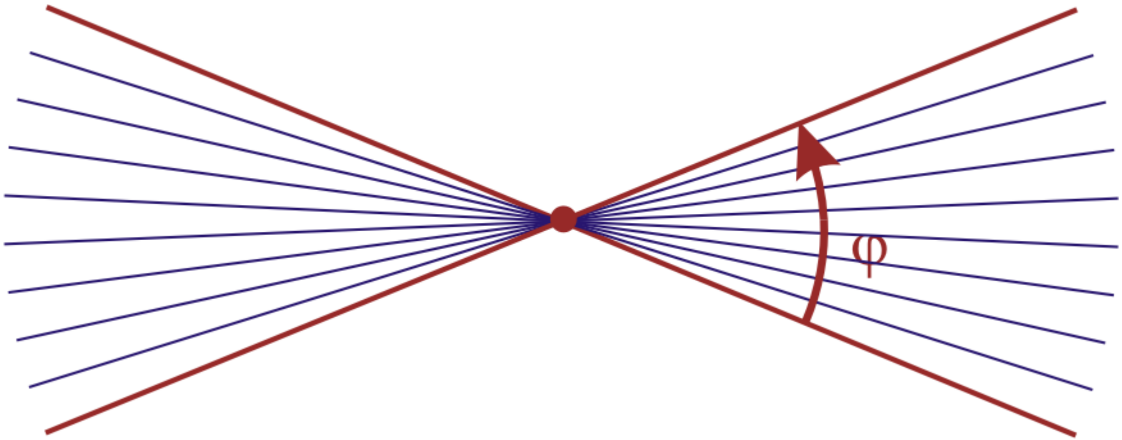
interakce ploch a křivek v prostoru, další formule pro odhad délek a plošných obsahů

Morgan William Crofton, 1868

Přímky v rovině

Míra přímek procházejících daným bodem a ležících mezi dvěma přímkami (paprsky):

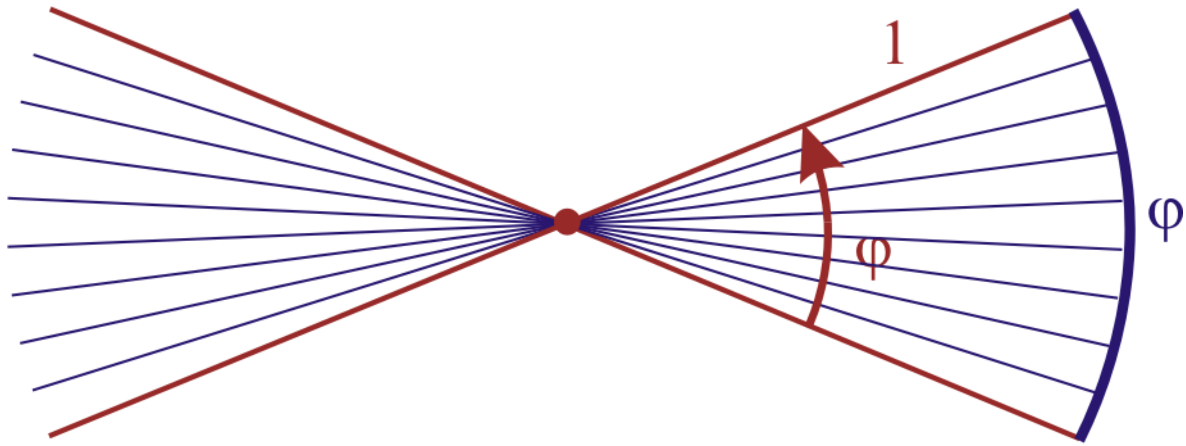
úhel mezi těmito přímkami (paprsky)



Přímky v rovině

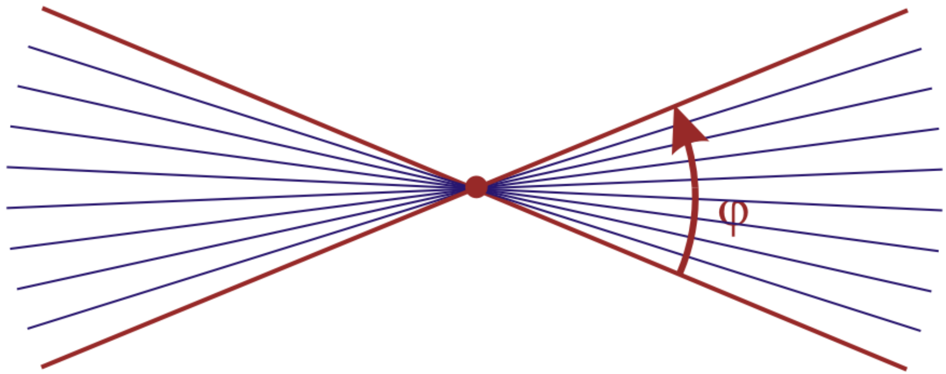
Míra přímek procházejících daným bodem a ležících mezi dvěma přímkami (paprsky):

úhel mezi těmito přímkami (paprsky)

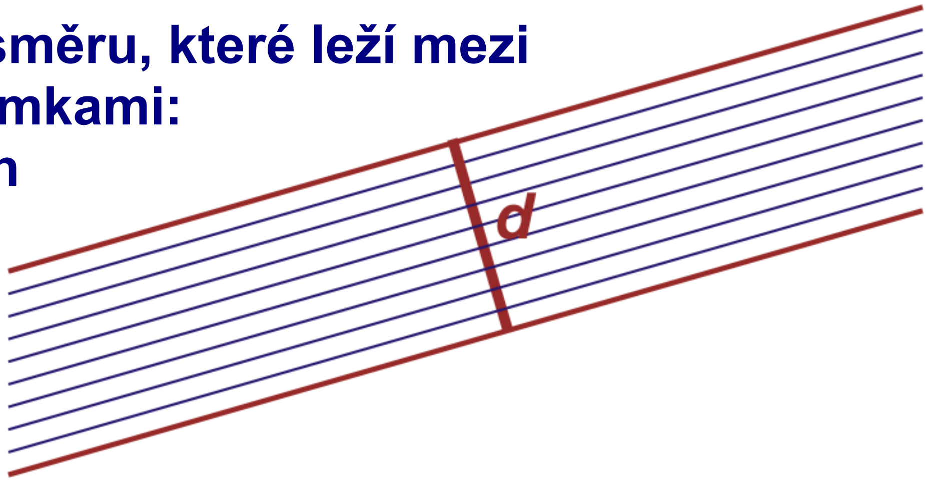


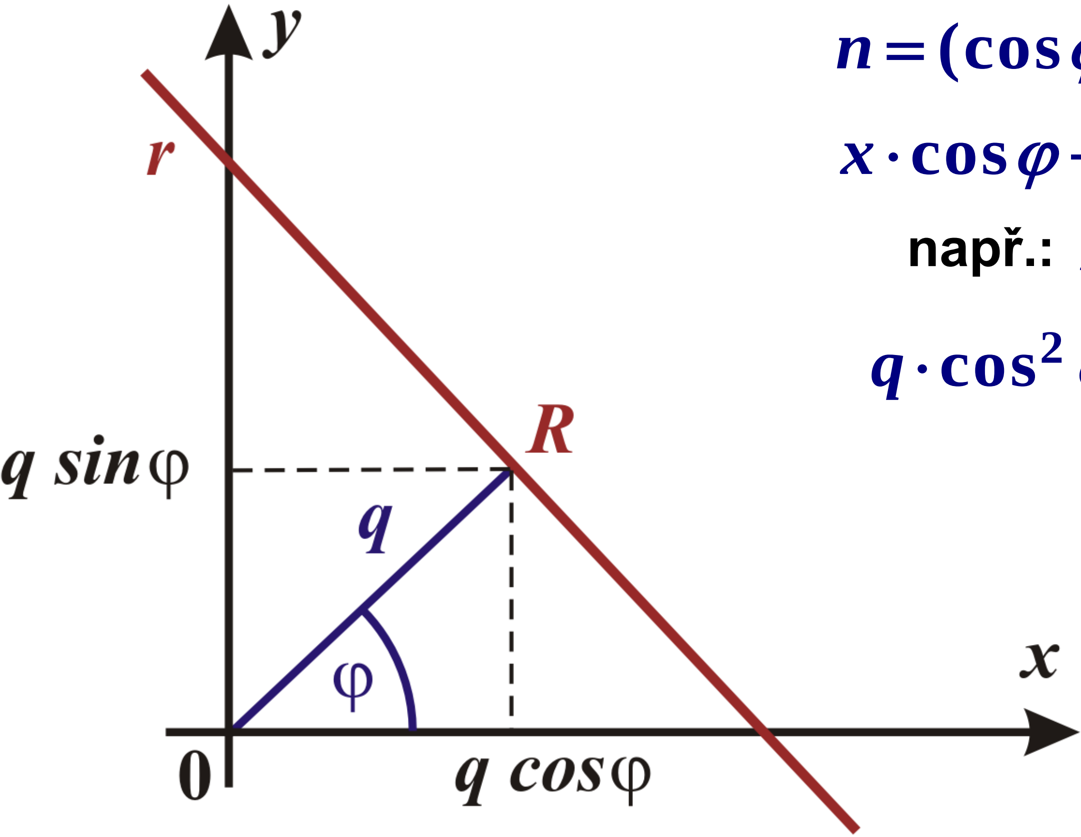
Přímky v rovině

Míra přímek procházejících daným bodem a ležících mezi dvěma přímkami: úhel mezi těmito přímkami



Míra přímek daného směru, které leží mezi dvěma hraničními přímkami: vzdálenost hraničních přímek





$$n = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - c = 0$$

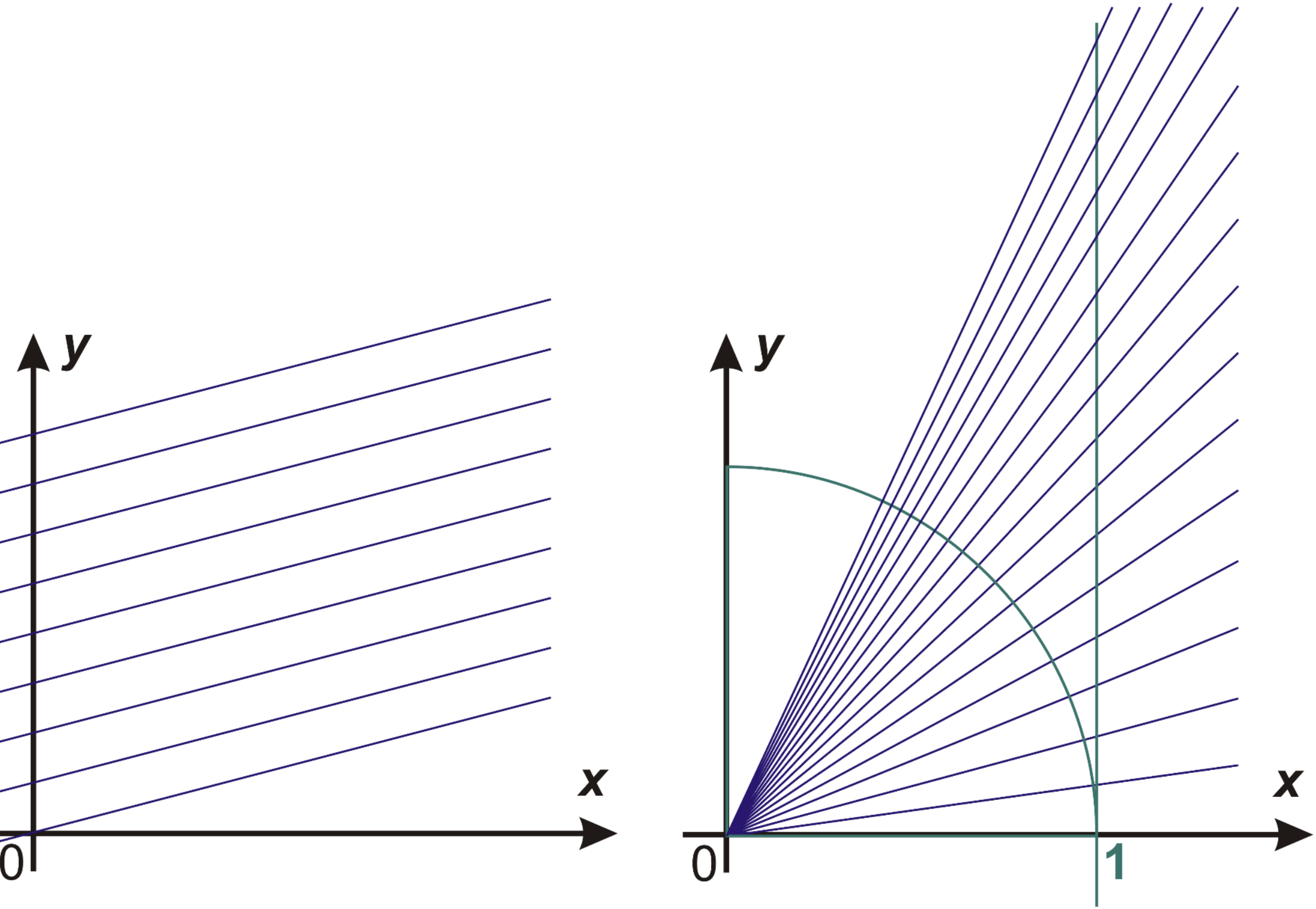
např.: $R \in r$

$$q \cdot \cos^2\varphi + q \cdot \sin^2\varphi = c$$

$$q = c$$

$$r: \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - q = 0$$

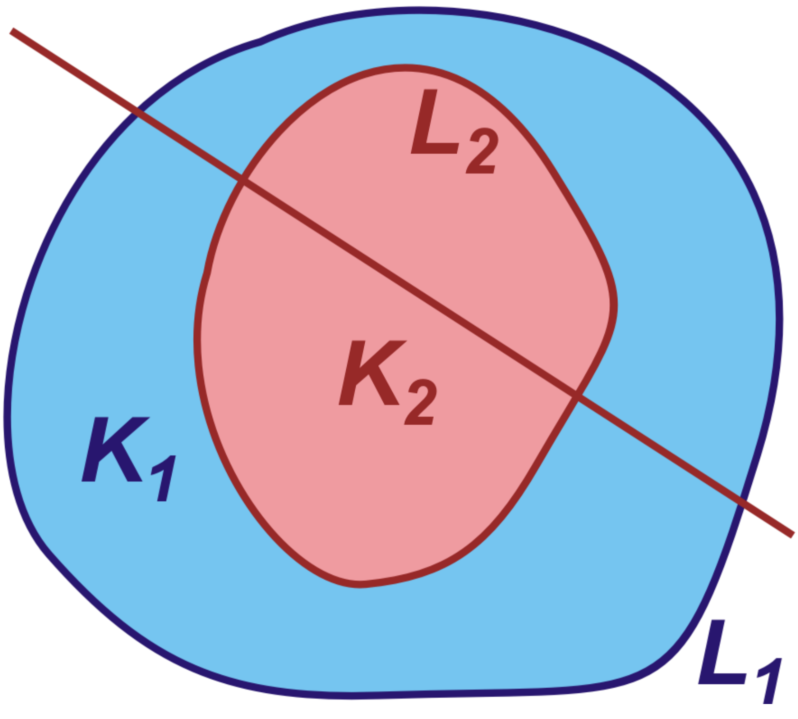
$$r: \quad y = kx + q$$



Věta:

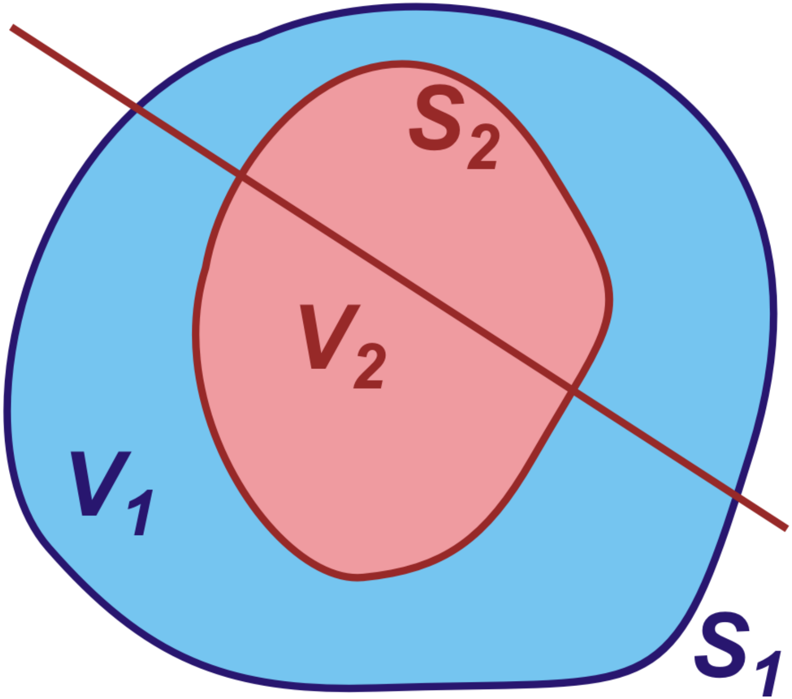
Pravděpodobnost p, že přímka, protínající rovinnou konvexní oblast K_1 o obvodu L_1, protíná současně jinou konvexní oblast K_2, jež leží uvnitř K_1 a má obvod L_2:

$$p = \frac{L_2}{L_1}.$$



Věta:

Pravděpodobnost p, že přímka, protínající konvexní plochu K_1 o plošném obsahu S_1, protíná současně jinou konvexní plochu K_2, jež leží uvnitř K_1



a má plošný obsah S_2, je

$$p = \frac{S_2}{S_1}.$$

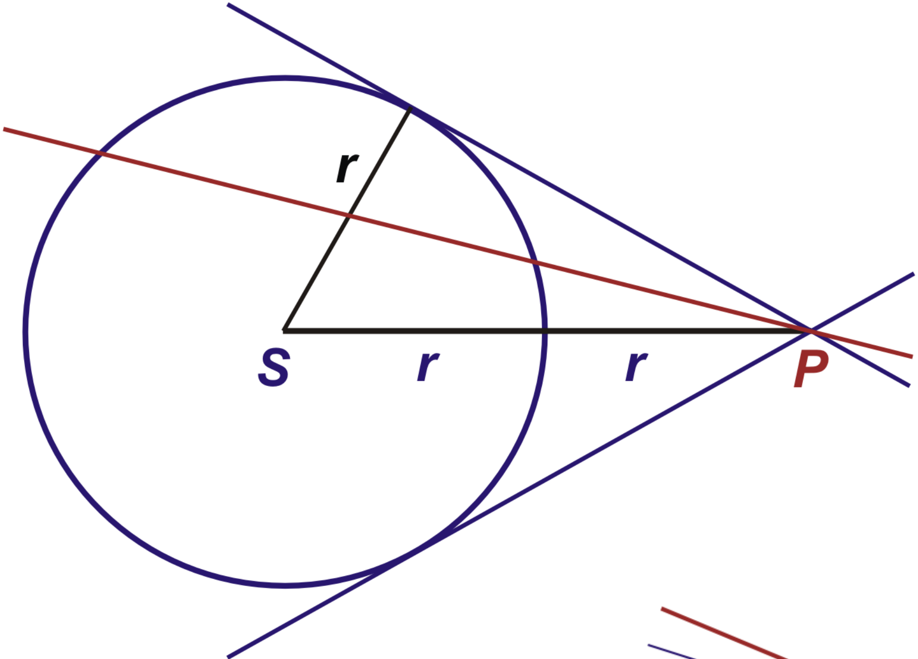
Fr. Hromádko, Al. Strnad, 1902

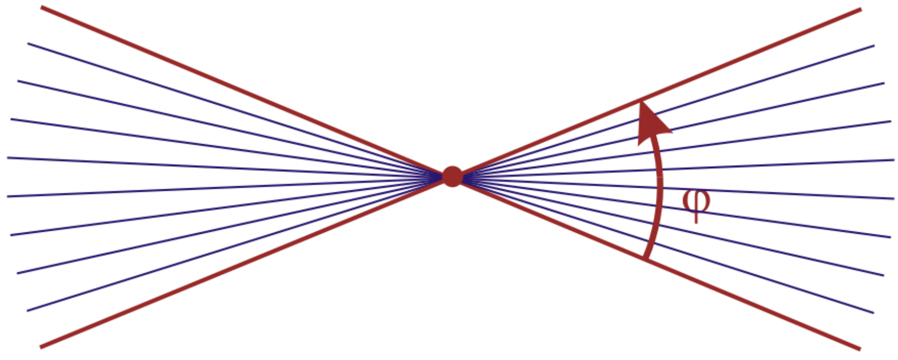
Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol

Pravděpodobnost: 53 úloh, z toho 6 GP

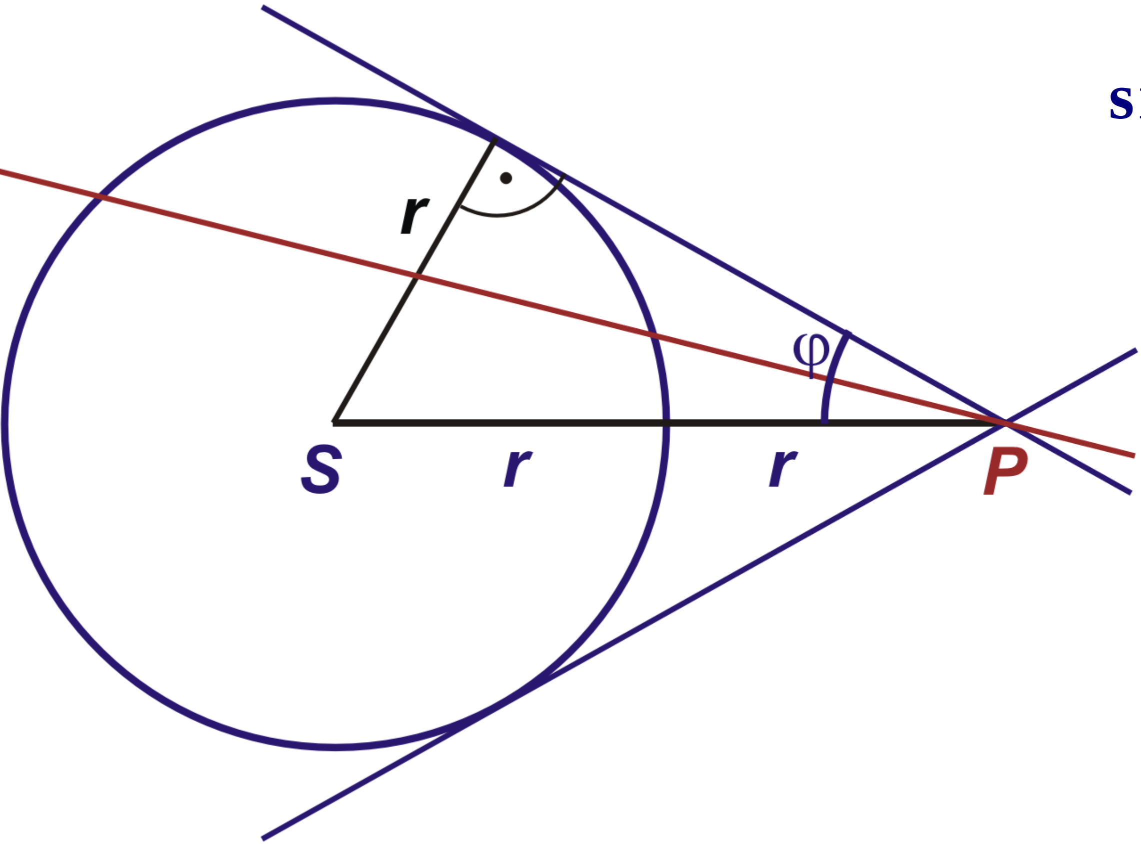
48. Která jest pravděpodobnost, že protíná kružnici libovolná přímka jdoucí bodem, jehož vzdálenost od středu rovna jest průměru kružnice?

48. Která jest pravděpodobnost, že protíná kružnici libovolná přímka jdoucí bodem, jehož vzdálenost od středu rovna jest průměru kružnice?





48. Která jest pravděpodobnost, že protíná kružnici libovolná přímka jdoucí bodem, jehož vzdálenost od středu rovna jest průměru kružnice?

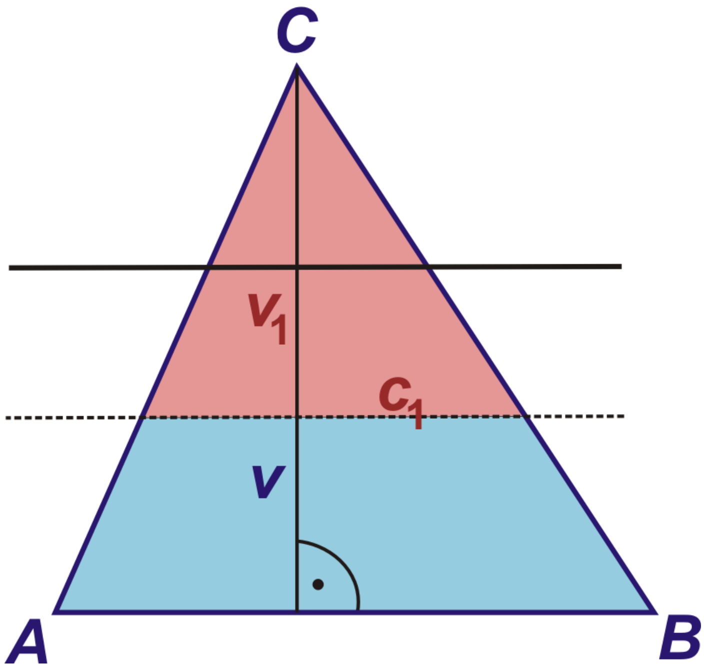


$$\sin\varphi = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$p = \frac{2\varphi}{\pi} = \frac{1}{3}$$

53. Která jest pravděpodobnost, že libovolná příčka rovnoběžná k straně trojúhelníka odděluje od tohoto trojúhelník menší než jest polovice trojúhelníka daného?



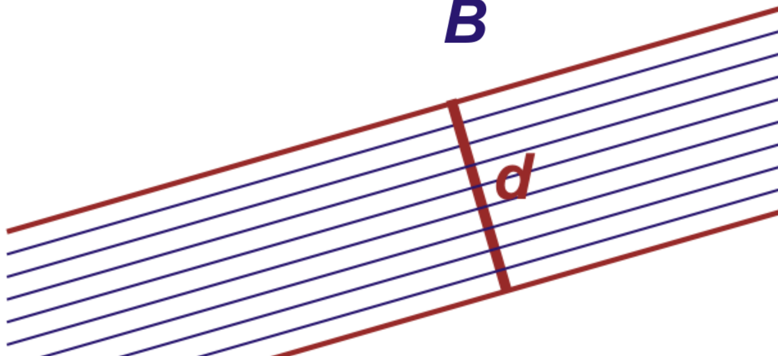
$$\frac{c_1 \cdot v_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot v}{2}$$

$$\frac{c}{c_1} = \frac{v}{v_1}$$

$$\frac{c v_1 \cdot v_1}{2v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot v}{2}$$

$$v_1^2 = \frac{1}{2} v^2$$

$$p = \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Jan Sommer, Václav Hübner: Maturitní otázky z mathematiky, 1905

Pravděpodobnost: 16 úloh, z toho 5 GP

530. **Jaká jest pravděpodobnost, že přímka jdoucí bodem (2,13) protíná kružnici**

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \quad ?$$

530. Středem křivky

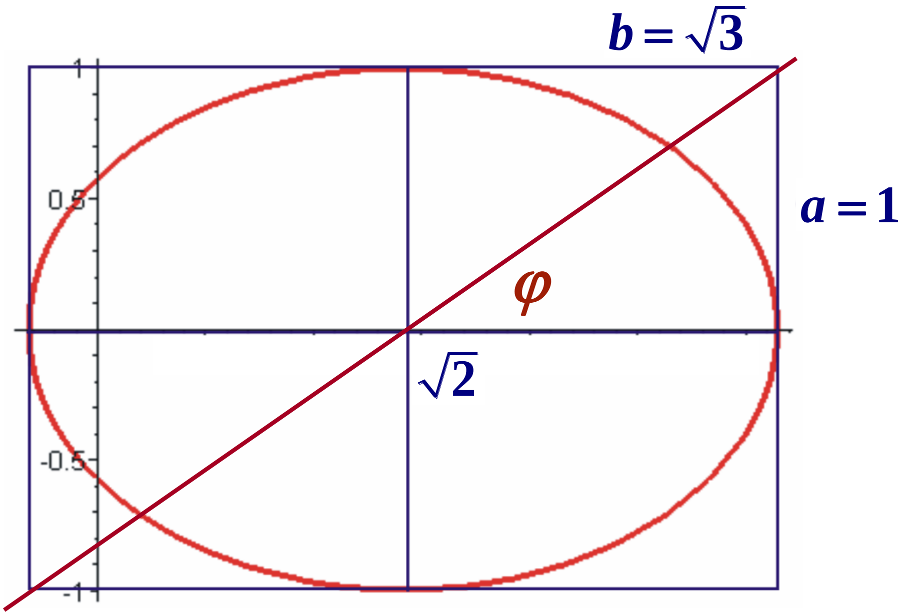
$$r = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\cos\varphi}$$

veden jest paprsek; která jest pravděpodobnost, že paprsek protíná stranu *a* opsaného obdélníka, jehož strany jsou rovnoběžné s osami křivky; která jest pravděpodobnost, že bude proťata strana druhá *b*?

531 Středem křivky

$$r=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\varphi}$$

veden jest paprsek; která jest pravděpodobnost, že paprsek protíná stranu *a* opsaného obdélníka, jehož strany jsou rovnoběžné s osami křivky; která jest pravděpodobnost, že bude proťata strana druhá *b*?



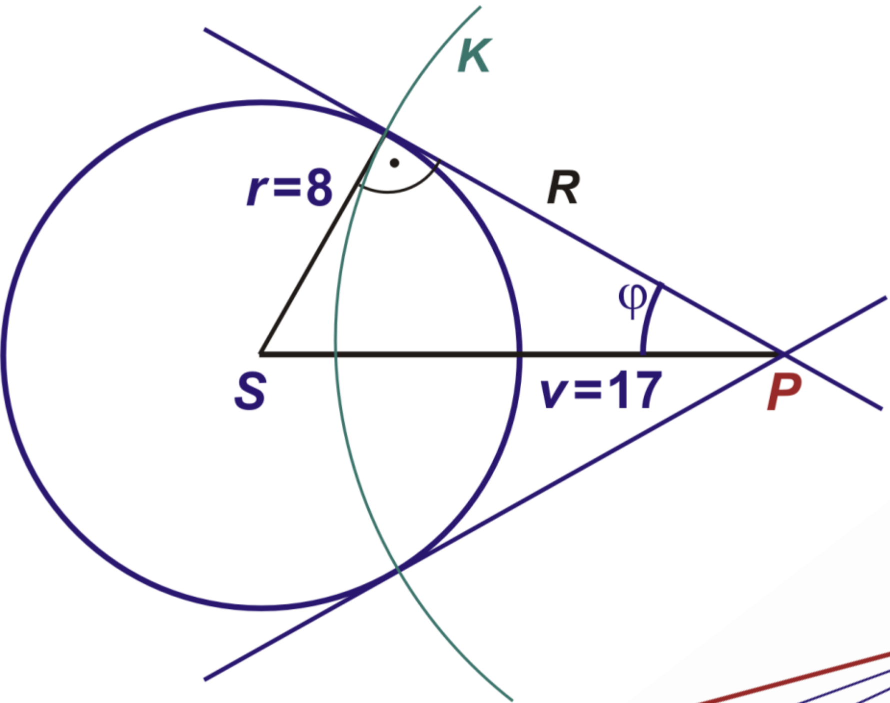
$$tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

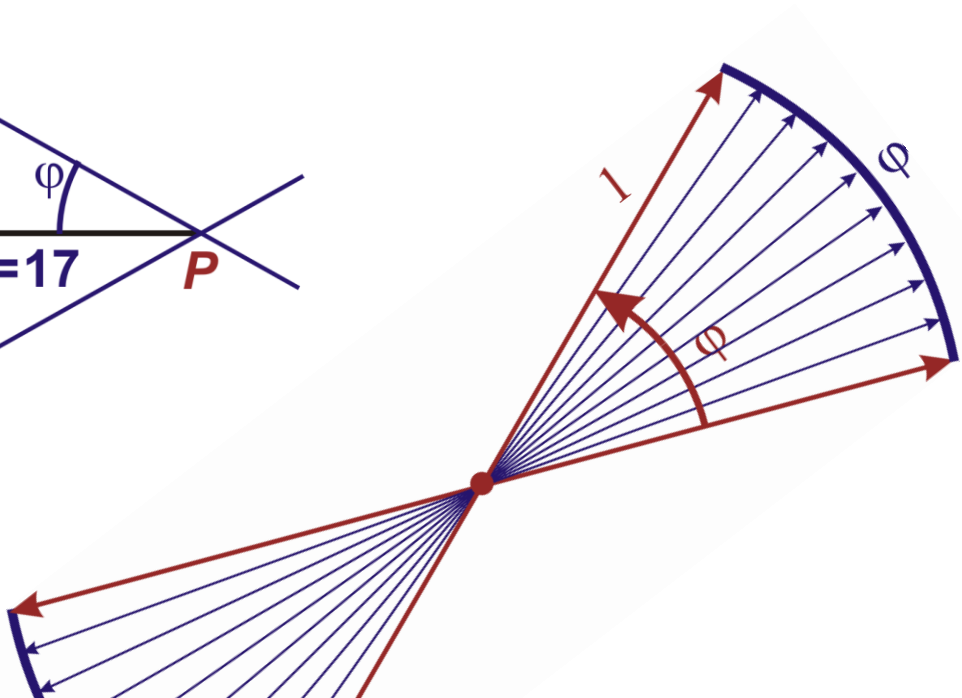
$$\varphi=\pi/6$$

$$p_a=\frac{2\varphi}{\pi}=\frac{1}{3}$$

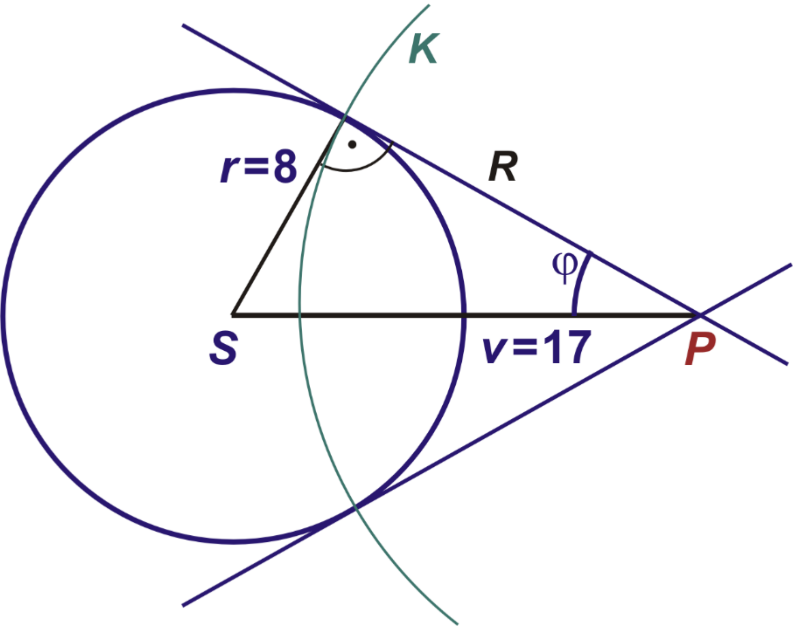
$$p_b=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

533 Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek z bodu S vycházející dopadne na kouli, jejíž střed jest od svítícího bodu vzdálen o v = 17 cm a má-li koule poloměr r = 8 cm?





533 Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek z bodu P vycházející dopadne na kouli, jejíž střed jest od svítícího bodu vzdálen o v = 17 cm a má-li koule poloměr r = 8 cm?



$$S_K = 4\pi R^2, \quad R = \sqrt{v^2 - r^2} = 15$$

$$S_V = 2\pi R^2 (1 - \cos\varphi) = \frac{4}{17} \cdot \pi R^2$$

$$p = \frac{S_V}{S_K} = \frac{1}{17}$$

„K čemu to je?“

Anatomie
Histologie
Neurofyziologie
Patologie
Dermatologie
Nefrologie
Onkologie
Kardiologie
Biologie
Metalurgie
Geologie
Petrologie