Geometrie ukrytá ve védských oltářích

Irena Sýkorová

Katedra matematiky
VŠE Praha
sykorova@vse.cz

XIV. seminář z historie matematiky pro vyučující
na středních školách
Poděbrady
19. 8. – 22. 8. 2019

Obsah

Historie

védy – posvátné nábožensko-filozofické spisy

- starší védská literatura (2. tisíciletí př. n. l.)
- mladší védská literatura (asi 1000 až 500 př. n. l.)
- dodatky k védám – *védángy* – pomocné vědy
  1. fonetika (*šikšá*)
  2. gramatika (*vjákarana*)
  3. etymologie (*nirukta*)
  4. prozódie (*čhandas*)
  5. astronomie včetně matematiky (*džjótiša*)
  6. pravidla pro obřady (*kalpa*)

texty – úsporná pravidla (*sútry*)
sbírky pravidel pro obřady – *kalpasútry*

Historie

pravidla pro stavbu oltářů – *šulbasútry*, *šulby*
šulba (*šulva*) – provaz, šňůra (také *radždžu*)

používané i ve smyslu měření, tj. geometrie

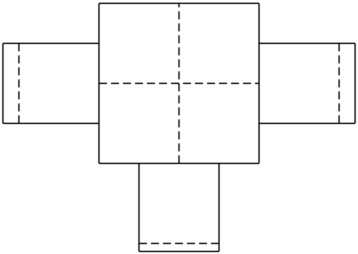
autoři sbírek:

- **Baudhájana** – asi 800 př. n. l.
- **Ápastamba** – asi 600 př. n. l.
- **Kátjájana** – asi 200 př. n. l.

Historie

obětní obřady – přesná pravidla

- domácí – každodenní
  v každém domě 3 typy oltářů – čtverec, kruh, půlkruh
- veřejné – sezónní
  oltáře různých tvarů, např. tvar primitivního sokola



matematické dovednosti

- sestrojení kolmice k dané přímce
- konstrukce základních geometrických útvarů – čtverců, obdélníků, rovnoramenných lichoběžníků, trojúhelníků, kruhů
- kombinace ploch – sestrojení čtverce, jehož obsah je součtem nebo rozdílem obsahů dvou různých čtverců
- konstrukce rovnoplochých útvarů – transformace obdélníku na čtverec a obrácený proces kvadratura kruhu, cirkulatura čtverce
- konstrukce stejných tvarů s vícenásobným obsahem

znalost jednoduchých tvrzení

- úsečku lze rozdělit na libovolný počet stejných dílů
- každá úhlopříčka půlí obdélník
- úhlopříčky obdélníku se navzájem půlí a dělí obdélník na čtyři díly, přičemž dva a dva protilehlé jsou shodné
- trojúhelník, který je vytvořen sousedními vrcholy čtverce a středem protilehlé strany, má poloviční obsah než čtverec
- maximální čtverec, který může být vepsán do kružnice, má vrcholy na kružnici

Pýthagorejské trojice

- základní:

$$(3, 4, 5)\,,\ (5, 12, 13)\,,\ (8, 15, 17)\,,\ (7, 24, 25)\,,\ (12, 35, 37)$$

- celočíselné násobky:

$$(12, 16, 20)\,,\ (15, 20, 25)$$

- racionální:

$$\left(2\frac{1}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{4}\right)\,,\ \left(1\frac{2}{3},\ 4,\ 4\frac{1}{3}\right)\,,\ \left(2\frac{1}{2},\ 6,\ 6\frac{1}{2}\right)\,,\ \left(7\frac{1}{2},\ 10,\ 12\frac{1}{2}\right)$$

Pýthagorova věta

- **Baudhájana:**
  Provaz natažený přes diagonálu čtverce vytváří dvakrát větší obsah.
- **Ápastamba:**
  Provaz natažený přes diagonálu obdélníku vytváří stejný obsah jako svislá a vodorovná strana dohromady.

Konstrukce čtverce

několik metod

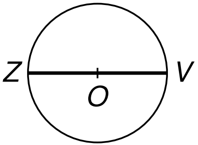
Baudhájana:
Chceš-li sestrojit čtverec, vezmi provaz dlouhý jako jeho strana, udělej na koncích uzly a označ střed. Poté, co nakreslíš čáru požadované délky [směrem východ – západ], *upevni tyč v jejím středu. Oba uzly přivaž na tyč a značkou* [uprostřed provazu] *nakresli kruh.*

Nyní upevni tyče na obou koncích průměru [východ – západ]. *Uvaž jeden uzel na východní tyč a nakresli kružnici druhým uzlem. Nakresli podobnou kružnici okolo západní tyče. Na spojnici průsečíků kružnic* [od severu k jihu] *bude nalezen druhý průměr.*

Poté, co upevníš oba uzly na východní tyč, opiš značkou kružnici. Podobně opiš kružnice okolo jižní, západní a severní tyče. Vnější průsečíky těchto kružnic určují čtverec.

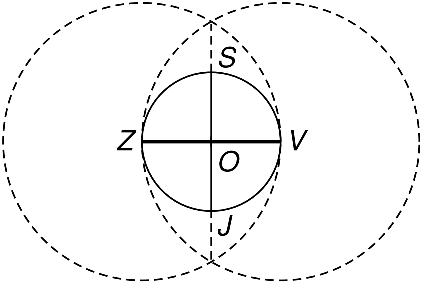
Konstrukce čtverce

Chceš-li sestrojit čtverec, vezmi provaz dlouhý jako jeho strana, udělej na koncích uzly a označ střed. Poté, co nakreslíš čáru požadované délky [směrem východ – západ], *upevni tyč v jejím středu. Oba uzly přivaž na tyč a značkou* [uprostřed provazu] *nakresli kruh.*



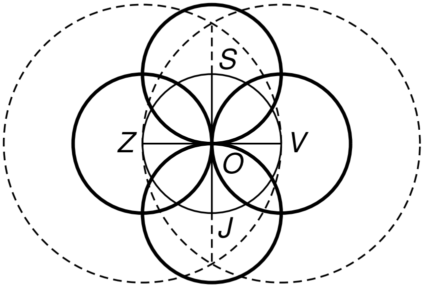
Konstrukce čtverce

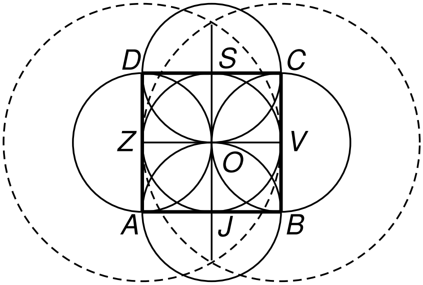
Nyní upevni tyče na obou koncích průměru [východ – západ]. *Uvaž jeden uzel na východní tyč a nakresli kružnici druhým uzlem. Nakresli podobnou kružnici okolo západní tyče. Na spojnici průsečíků kružnic* [od severu k jihu] *bude nalezen druhý průměr.*



Konstrukce čtverce

Poté, co upevníš oba uzly na východní tyč, opiš značkou kružnici. Podobně opiš kružnice okolo jižní, západní a severní tyče. Vnější průsečíky těchto kružnic určují čtverec.

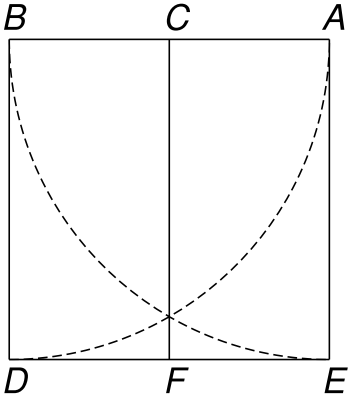




Konstrukce čtverce

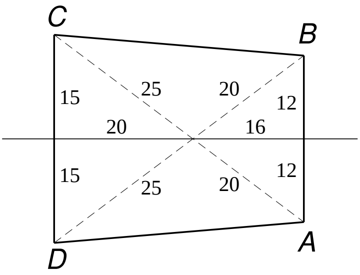
Ápastamba:
Na bambusové tyči udělej dvě díry [*A*, *B*] *ve vzdálenosti rovné výšce obětníka se vztyčenýma rukama a třetí* [*C*] *ve středu mezi nimi. Polož bambusovou tyč ve směru východ – západ a upevni kolíky do děr. Pak uvolni dva kolíky* [*C*, *B*] *a opiš kružnici* [otáčením bambusu] *jihovýchodním směrem dírou na konci. Pak upevni tyč na západě* [v původní poloze] *a opiš další kružnici jihozápadním směrem dírou na opačném konci. Nyní bambus* [zcela] *uvolni a upevni krajní díru na střední kolík* [*C*], *polož směrem k průsečíku kružnic a upevni kolík do nejvzdálenější díry* [*F*]. *Pak upevni na ten kolík střední díru bambusu a polož směrem ke krajům kružnic, upevni dva kolíky* [*E*, *D*] *do dvou* [krajních] *děr. To je čtverec* [*ABDE* mající stranu] *1 puruša.*

Konstrukce čtverce



Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

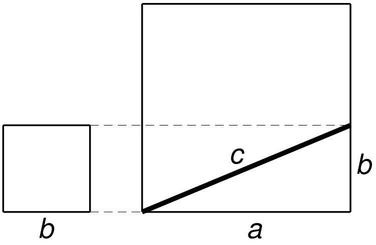
Ápastamba:
Diagonála obdélníku, jehož strany jsou 3 *a* 4 [*pada*], *je* 5. *S těmi zvětšenými o trojnásobek* [jsou určeny] *dva východní vrcholy védi. S těmi zvětšenými o čtyřnásobek* [jsou určeny] *dva západní vrcholy.*



Kombinace ploch

Konstrukce čtverce s obsahem rovným součtu obsahů dvou různých čtverců

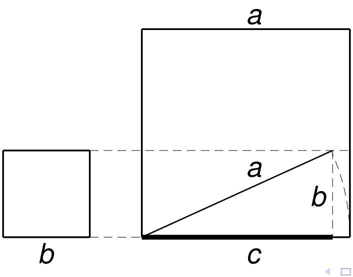
Ápastamba:
Odděl z většího [čtverce] *pruh o straně menšího čtverce. Diagonála odříznutého pruhu sjednocuje oba* [čtverce].



Kombinace ploch

Konstrukce čtverce s obsahem rovným rozdílu obsahů dvou různých čtverců

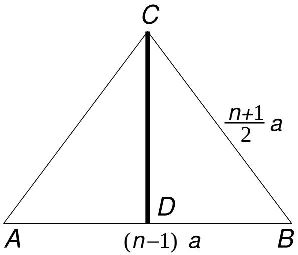
Ápastamba:
Chceš-li si odečíst od čtverce [jiný] *čtverec, tak odřízni pruh o straně toho čtverce, který chceš odečíst a táhni delší stranou odříznutého pruhu napříč ke druhé straně. Kde protne* [protilehlou stranu], *tento* [kus] *se odřízne. Tím je* [menší čtverec] *odečten.*



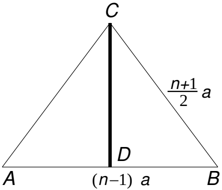
Kombinace ploch

Konstrukce čtverce, který má stejný obsah jako *n* stejných daných čtverců

Kátjájana:
Tolik [*n*] *čtverců* [stejně velkých o straně *a*], *kolik si přeješ sloučit v jeden; příčná čára* [základna] *bude* [rovna] *o jednu méně, dvojnásobná strana bude* [rovna] *o jednu více,* [takto] *vytvoř* [rovnoramenný] *trojúhelník. Jeho šipka* [výška] *to dává.*



Kombinace ploch



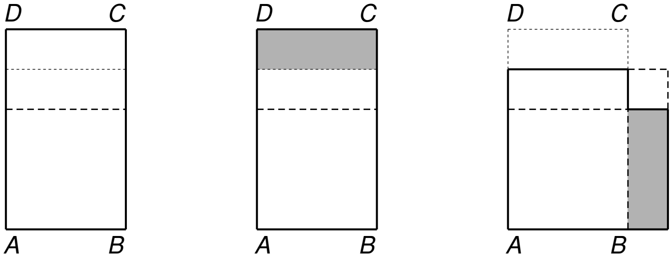
$$\left(\frac{n+1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}a\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{4}a^2 - \frac{n^2-2n+1}{4}a^2 = na^2$$

pro $n = m^2$
obecný tvar pýthagorejských trojic $(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2})$

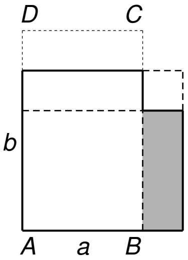
Transformace

Transformace obdélníku na čtverec

Ápastamba:
Chceš-li přeměnit obdélník na čtverec, odděl čtvercovou část o jeho šířce; rozděl zbytek na dva stejné díly, přesuň a otoč [vzdálenější z nich] *a připoj ke straně čtverce. Pak přidej* [čtvercový] *díl k zaplnění* [prázdného místa v rohu]. *To bylo učeno* [dříve] *jak odečíst* [připojený čtverec od nově vytvořeného].



Transformace



$|AB| = a$, $|BC| = b$
strana malého čtverce: $\frac{b-a}{2}$
strana velkého čtverce: $a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$

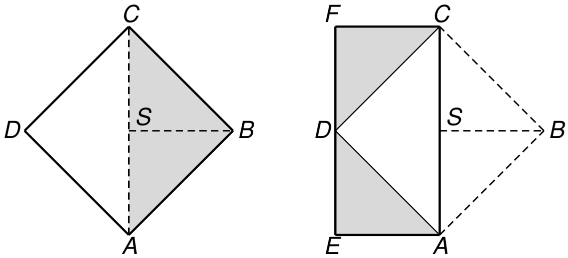
$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab$$

pro $a = n^2$, $b = m^2$
obecný tvar pýthagorejských trojic $(mn, \frac{m^2-n^2}{2}, \frac{m^2+n^2}{2})$

Transformace

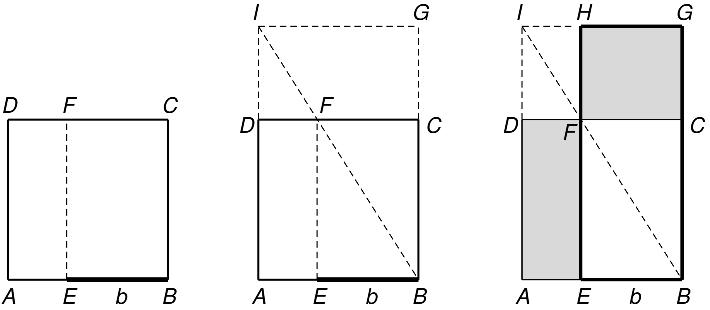
Transformace čtverce na obdélník

Baudhájana:
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník, rozděl ho diagonálou. Rozděl opět jednu z částí na dvě a připoj je vhodně tak, aby odpovídaly dvěma stranám [druhé poloviny].

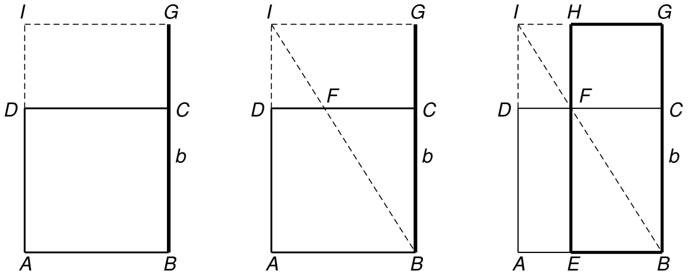


Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany

Ápastamba:
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník [odděl obdélníkový díl] *se stranou dlouhou jak si přeješ* [daná strana obdélníku]. *Co přebývá, mělo by se přidat* [k prvnímu] *tak, aby to pasovalo.*



Transformace



algebraický význam – geometrické řešení rovnice

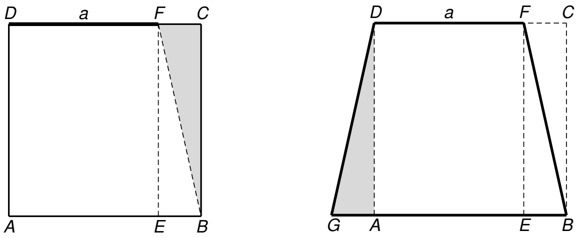
$$bx = a^2,$$

kde a je délka strany daného čtverce,
b je daná délka jedné strany obdélníku,
x je hledaná délka druhé strany

Transformace

Transformace čtverce nebo obdélníku na rovnoramenný lichoběžník s danou délkou kratší základny

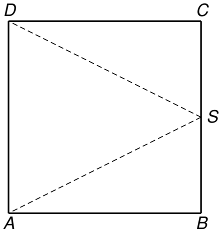
Baudhájana:
Chceš-li zkrátit čtverec nebo obdélník na jedné straně [odděl obdélníkový díl] *zkrácením délky strany. Rozděl zbytek diagonálou a připoj* [tyto dva díly] *k oběma stranám* [odděleného dílu] *po převrácení.*

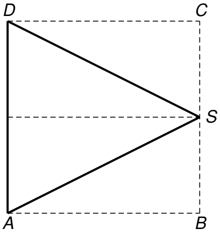


Transformace

Transformace čtverce nebo obdélníku na rovnoramenný trojúhelník

Baudhájana:
Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na trojúhelník, sestroj čtverec s dvojnásobnou plochou než plocha obrazce [který se má přeměnit]. *Upevni tyč uprostřed jeho východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem k západním vrcholům. Odřízni díly na druhé straně provazů.*

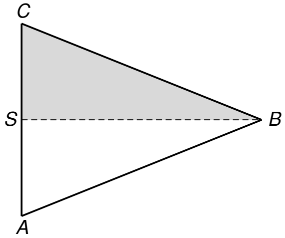


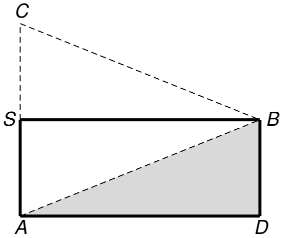


Transformace

Transformace rovnoramenného trojúhelníku na čtverec

Kátjájana:
Chceš-li přeměnit rovnoramenný trojúhelník na čtverec, odřízni jeho severní polovinu podle střední linky; pak ji překlop a polož k protější straně. Podle metody konstrukce čtverce se stejnou plochou jako obdélník sestroj čtverec. To je ta metoda konstrukce.

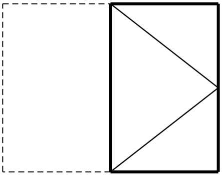


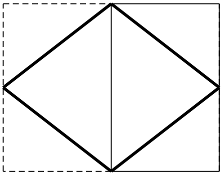


Transformace

Transformace čtverce nebo obdélníku na kosočtverec

Baudhájana:
Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na kosočtverec, sestroj obdélník s dvojnásobnou plochou [než původní útvar]. *Upevni tyč ve středu východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem ke středům severní a jižní strany* [obdélníku]. *Odřízni díly na druhé straně* [provazů]. *Tímto je také vysvětlena konstrukce druhého trojúhelníku.*

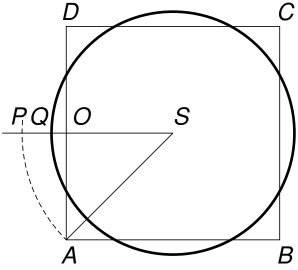




Transformace

Transformace čtverce na kruh

Ápastamba:
Chceš-li přeměnit čtverec na kruh, otoč polovinu diagonály směrem k přímce východ – západ; pak nakresli kružnici dohromady s jednou třetinou toho, co leží vně [čtverce].



Transformace

a – strana daného čtverce $ABCD$,

polovina úhlopříčky $|SA| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$|OQ| = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)a = \frac{\sqrt{2}-1}{6}a$,

poloměr hledaného kruhu $r = |SQ| = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{6}\right)a = \frac{2+\sqrt{2}}{6}a$,

průměr hledaného kruhu $d = \frac{2+\sqrt{2}}{3}a$,

odpovídající hodnota $\pi \approx 3{,}088$

Transformace

Transformace kruhu na čtverec

Baudhájana:
Chceš-li přeměnit kruh na čtverec, rozděl jeho průměr na osm dílů; pak rozděl jeden na dvacet devět dílů a z nich dvacet osm vynech a také šestinu dílu [z předchozího dělení] *zmenšenou o osminu.*

strana hledaného čtverce

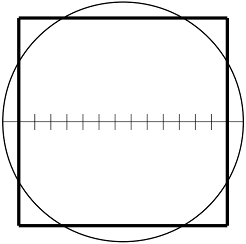
$$a = \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right) d$$

$\pi \approx 3{,}088$

Transformace

Transformace kruhu na čtverec

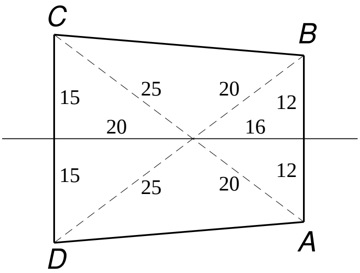
Ápastamba:
Rozděl [průměr] *na patnáct dílů a odstraň dva. To je zhruba strana* [stejného] *čtverce.*



$\pi \approx 3{,}00444$

Podobnost

oltář *mahávédi* – rovnoramenný lichoběžník

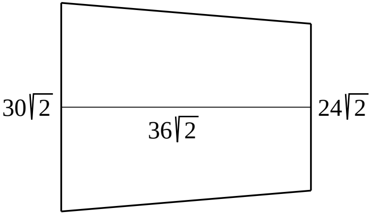


základna: 30 *padů* (nebo *prakramů*),
čelo: 24 *padů* (nebo *prakramů*),
výška: 36 *padů* (nebo *prakramů*),
obsah: $S = 972$

Podobnost

oltář *ašvamédhavédi* – rovnoramenný lichoběžník s dvojnásobným obsahem

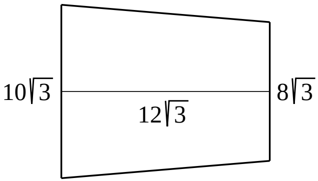
Ápastamba:
[Při konstrukci *védi* pro oběť koně] *se použije dvi-karaní prakrama místo prakrama.*



základna: $30\sqrt{2}$,
čelo: $24\sqrt{2}$,
výška: $36\sqrt{2}$,
obsah: $S = 1\,944$

Podobnost

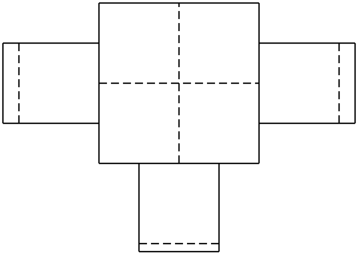
oltář *sautrámanívédi* – rovnoramenný lichoběžník s třetinovým obsahem



základna: $10\sqrt{3}$,
čelo: $8\sqrt{3}$,
výška: $12\sqrt{3}$,
obsah: $S = 324$

Podobnost

oltář ve tvaru primitivního sokola



tělo sokola – čtyři jednotkové čtverce, (strana čtverce 1 *puruša*)
křídla – dva obdélníky 1 krát $1\frac{1}{5}$,
ocas – jeden obdélníku 1 krát $1\frac{1}{10}$
obsah: $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*

Podobnost

nový oltář stejného tvaru s obsahem $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, atd. (čtverečných *purušů*)
obsah: $7\frac{1}{2} + m$

Baudhájana:
Rozděl to, co je rozdíl od původní [dané] *velikosti oltáře, na* 15 *dílů, přičti ke každé* [základní] *části daného tvaru dva z těchto dílů. Pak sestroj obrazec* [stejným způsobem jako původní] *se* $7\frac{1}{2}$ *těchto* [upravených] *jednotek.*

čtverec s obsahem m čtverečných *purušů* se rozdělil na 15 stejných dílů – obdélníků,
dva díly se sloučily s jednotkovým čtvercem $\Rightarrow$ nový čtverec o straně délky $\sqrt{1 + \frac{2m}{15}}$ *puruši*

$$7\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2m}{15}\right) = 7\frac{1}{2} + m \quad \text{(čtverečných } \textit{purušů}\text{)}$$

Odmocniny

odmocnina – *karaní*
$\sqrt{2}$ – *dvi-karaní*, $\sqrt{3}$ – *tri-karaní*, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ – *trtíja-karaní*,
diagonála čtverce – *savišéša* ($\sqrt{2}\, a$)

Ápastamba:
Zvětši míru [ke které má být nalezena $\sqrt{2}$] *o její třetinu a ještě čtvrtinu* [té třetiny] *a zmenši o jednu svou čtyřiatřicetinu. To je savišéša.*

$$\sqrt{2}\, a = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3 \cdot 4} - \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

pro $a = 1$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686\ldots$$

$$(\sqrt{2} \approx 1{,}414213562\ldots)$$

Odmocniny

podobně i pro $\sqrt{3}$:

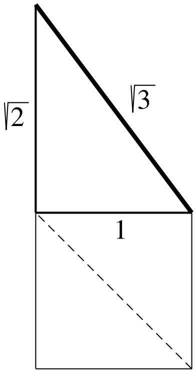
$$\begin{aligned}\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = \frac{1\,351}{780} \quad &\approx \quad 1{,}7320512\ldots \\ (\sqrt{3} \quad &\approx \quad 1{,}7230508\ldots)\end{aligned}$$

konstrukce délky $\sqrt{3}$

Ápastamba:
Míra [jednotka] *je šířka, dvi-karaní* [$\sqrt{2}$] *je délka. Provazec* [rovný] *přeponě je tri-karaní* [$\sqrt{3}$].

Pýthagorova věta $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$

Odmocniny



Děkuji vám za pozornost.