VARIANTA 1 – vzorové řešení

1. Určete bázi a dimenzi podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, který je generován vektory

$$\begin{aligned} u_1 &= (3,1,5,4),\\ u_2 &= (2,2,3,3),\\ u_3 &= (1,-1,2,1),\\ u_4 &= (1,3,1,2). \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4\\ 2 & 2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4\\ 0 & -4 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 0 & -8 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4\\ 0 & -4 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Postup řešení:

Vektory napíšeme do řádků matice (první matice) a provádíme řádkové elementární úpravy (nevedou ke změně hodnosti matice) tak dlouho, až získáme odstupňovaný tvar matice.

(1) První řádek opíšeme, první řádek vynásobíme 2, druhý řádek vynásobíme -3 a oba řádky sečteme, výsledek součtu napíšeme do druhého řádku. Třetí řádek vynásobíme -3 a sečteme s prvním řádkem, výsledek napíšeme do třetího řádku. Čtvrtý řádek vynásobíme -3 a sečteme s prvním řádkem, výsledek zapíšeme do čtvrtého řádku (druhá matice).

(2) Opíšeme první a druhý řádek, sečteme druhý a třetí řádek, výsledek napíšeme do třetího řádku. Druhý řádek vynásobíme -2 a sečteme se čtvrtým řádkem, výsledek zapíšeme do čtvrtého řádku (třetí matice).

Na základě úprav jsme obdrželi matici, jejíž hodnost je dvě (matice má dva lineárně nezávislé řádky). Tudíž dimenze podprostoru generovaného vektory u_1, u_2, u_3, u_4 je dvě. Báze tohoto podprostoru je například $B = \{u_1, u_2\}$.

2. Vypočtěte inverzní matici A^{-1} (pokud existuje), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Postup řešení:

Provádíme řádkové úpravy matice $(A|E)$ tak dlouho, až obdržíme matici $(E|A^{-1})$.

Zkouška:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \ = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} .$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 + 8 + 8 - 0 - 0 - 0) = -16.$$

Postup řešení:

(1) První řádek postupně přičteme k ostatním řádkům.
(2) Determinant rozvineme podle prvního sloupce.
(3) Použijeme Sarussovo pravidlo.

4. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + y + z \ &= 6 - r \\ 2x + 3y + 2z &= 11 + 5r \\ 2x + 2y + 3z &= 7 + 8r \,. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6-r \\ 2 & 3 & 2 & | & 11+5r \\ 2 & 2 & 3 & | & 7+8r \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6-r \\ 0 & 2 & 1 & | & 5+6r \\ 0 & 1 & 2 & | & 1+9r \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6-r \\ 0 & 2 & 1 & | & 5+6r \\ 0 & 0 & -3 & | & 3-12r \end{pmatrix}$$

Postup řešení:

Používáme *Gaussův eliminační algoritmus*. Matici soustavy (první matice) upravujeme na odstupňovaný tvar.

(1) První řádek opíšeme, od druhého řádku odečteme první a výsledek zapíšeme do druhého řádku, od třetího řádku odečteme první řádek a výsledek zapíšeme do třetího řádku (druhá matice).

(2) První a druhý řádek opíšeme, třetí řádek vynásobíme -2 a sečteme s druhým řádkem, výsledek zapíšeme do třetího řádku (třetí matice).

Nyní určíme hodnost matice soustavy a matice rozšířené.

$$h(A) = 3 \quad h(A|b) = 3\,.$$

Hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené, podle Frobeniovy věty je soustava řešitelná. Jelikož hodnost soustavy je 3 a počet neznámých je také 3, existuje právě jediné řešení.

Z posledního řádku třetí matice plyne

$$-3z = 3 - 12r.$$

Tedy

$$z = -1 + 4r, \quad \text{kde} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Ze druhého řádku poslední matice plyne

$$2y + z \ = 5 + 6r.$$

Po úpravách a dosazení za z je

$$y = 3 + r, \quad \text{kde} \quad r \in \mathbb{R}.$$

A konečně z prvního řádku poslední matice plyne

$$2x + y + z = 6 - r.$$

Po úpravách a dosazení za z a y je

$$x = 2 - 3r, \quad \text{kde} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice (bod)

$$[2-3r, 3+r, -1+4r], \quad \text{kde} \quad r \in \mathbb{R}\,.$$

5. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -6 & 7 & -6 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

I. Vlastní čísla:

Charakteristická matice:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 & -3 \\ -6 & 7-\lambda & -6 \\ -6 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda E) &= (-2-\lambda)(7-\lambda)(-5-\lambda) + 108 + 108 - 18(7-\lambda) + 36(-2-\lambda) + 18(-5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda - 2 \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice.

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Vlastní čísla

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 \\ \lambda_3 &= -2 \end{aligned}$$

II. Vlastní vektory

Dosadíme do vztahu $(A-\lambda)u = 0$ za $\lambda = \lambda_{1,2} = 1$ a vyřešíme homogenní soustavu tří lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K danému dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ příslušejí vlastní vektory $u_1 = (1,1,0)$ a $u_2 = (0,1,1)$. Příslušný podprostor je $[(1,1,0),(0,1,1)]$.

Nyní dosadíme do vztahu $(A-\lambda E)u = 0$ za $\lambda = \lambda_3 = -2$ a vyřešíme homogenní soustavu tří lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & 9 & -6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K danému vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ přísluší vlastní vektor $u_3 = (-1,-2,2)$. Příslušný podprostor je $[(-1,-2,2)]$.