VARIANTA 1

1. Určete bázi a dimenzi podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, který je generován vektory

$$\begin{aligned} u_1 &= (3,1,5,4),\\ u_2 &= (2,2,3,3),\\ u_3 &= (1,-1,2,1),\\ u_4 &= (1,3,1,2). \end{aligned}$$

2. Vypočtěte A^{-1} (pokud existuje), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} .$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 - r \\ 2x + 3y + 2z &= 11 + 5r \\ 2x + 2y + 3z &= 7 + 8r . \end{aligned}$$

5. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -6 & 7 & -6 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix} .$$

VARIANTA 2

1. Vypočtěte souřadnice vektoru u vzhledem k bázi M.

$$u = (-5, 17, -11) \quad M = \{(1,2,1),(3,-2,7),(11,-2,1)\}.$$

2. Vypočtěte součiny AB a BA, pokud existují, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Řešte rovnici s parametry a, $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & -b & b^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= a^2 + 3a \\ x + (a+1)y + z &= a^3 + 3a^2 \\ x + y + (a+1)z &= a^4 + 3a^3\,. \end{aligned}$$

5. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

VARIANTA 3

1. V závislosti na parametru a zjistěte, zda jsou vektory prostoru $\mathbb{R}^3$ u, v, w lineárně závislé či nezávislé.

$$\begin{aligned} u &= (a, -4, -1), \\ v &= (4, -6, -1), \\ w &= (1, 1, -a). \end{aligned}$$

2. Čtvercová matice A se nazývá nilpotentní, jestliže existuje přirozené číslo n tak, že $A^n = 0$. Zjistěte, zda je nilpotentní matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} .$$

3. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & 0 & a \\ -a & -a & 0 \end{vmatrix} .$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z \ - u &= 2 \\ 2x + 3y - z + 3u &= -1 \\ 4x + 2y + 2z + u &= 3 \\ x + 2y - z + u &= 1 . \end{aligned}$$

5. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

VARIANTA 4

1. Z následujících vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4 vyberte nějakou bázi podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, který tyto vektory generují

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 2, -3), \\ u_2 &= (3, 2, 1, -5), \\ u_3 &= (-1, 2, 1, -2), \\ u_4 &= (-3, 0, 2, 0). \end{aligned}$$

2. Vypočtete matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^4 .$$

3. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z \;\; + u - v &= 1 \\ 2x - y + 7z - 3u + 5v &= 2 \\ x + 3y - 2z + 5u - 7v &= 3 \\ 3x - 2y + 7z - 5u + 8v &= 3\,. \end{aligned}$$

5. Nalezněte Jordanův kanonický tvar matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

VARIANTA 5

1. Najděte bázi podprostoru $V = [u_1, u_2, u_3]$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, která obsahuje vektor v

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,3,5), \\ u_2 &= (3,9,15), \\ u_3 &= (1,0,2), \\ v &= (8,25,40). \end{aligned}$$

2. Vypočtěte obsah trojúhelníka, který má vrcholy $A = (-1, 18)$, $B = (1, 8)$ a $C = (2, 3)$.

3. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ (i je komplexní jednotka)

$$\begin{aligned} x + 2iy - iz &= 0 \\ ix + ay + z &= 0 \\ -ix + 2y + az &= 0\,. \end{aligned}$$

5. Nalezněte Jordanův kanonický tvar matice

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$