

# Doktorandské přijímačky s výsledky

## Varianta 1

Najděte obě parciální derivace prvního řádu funkce  $z = z(x, y)$ , která je definována implicitně rovnicí  $x + y + z = e^z$ .

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1} \right]$$

---

Najděte integrál

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx .$$

$$\left[ \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c . \right]$$

---

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 - 18x_2, & x_1(0) &= -1, \\ x_2' &= 3x_1 - 8x_2, & x_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$\left[ x_1(t) = -9e^t + 8e^{-2t}, \quad x_2(t) = -3e^t + 4e^{-2t} . \right]$$

---

## Varianta 2

Napište rovnici tečny a normálové roviny ke křivce

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x + y + z = 0 \quad \text{v bodě } M = [1; -2; 1].$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{tečna:} \quad \quad \quad x = 1 + t, \quad y = -2, \quad z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \text{normálová rovina:} \quad x - z = 0. \end{array} \right]$$

---

Najděte integrál

$$\int \frac{(x+1) dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$\left[ \ln \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \right]$$

---

Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + x' - 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3.$$

$$\left[ x(t) = e^t - e^{-2t}. \right]$$

---