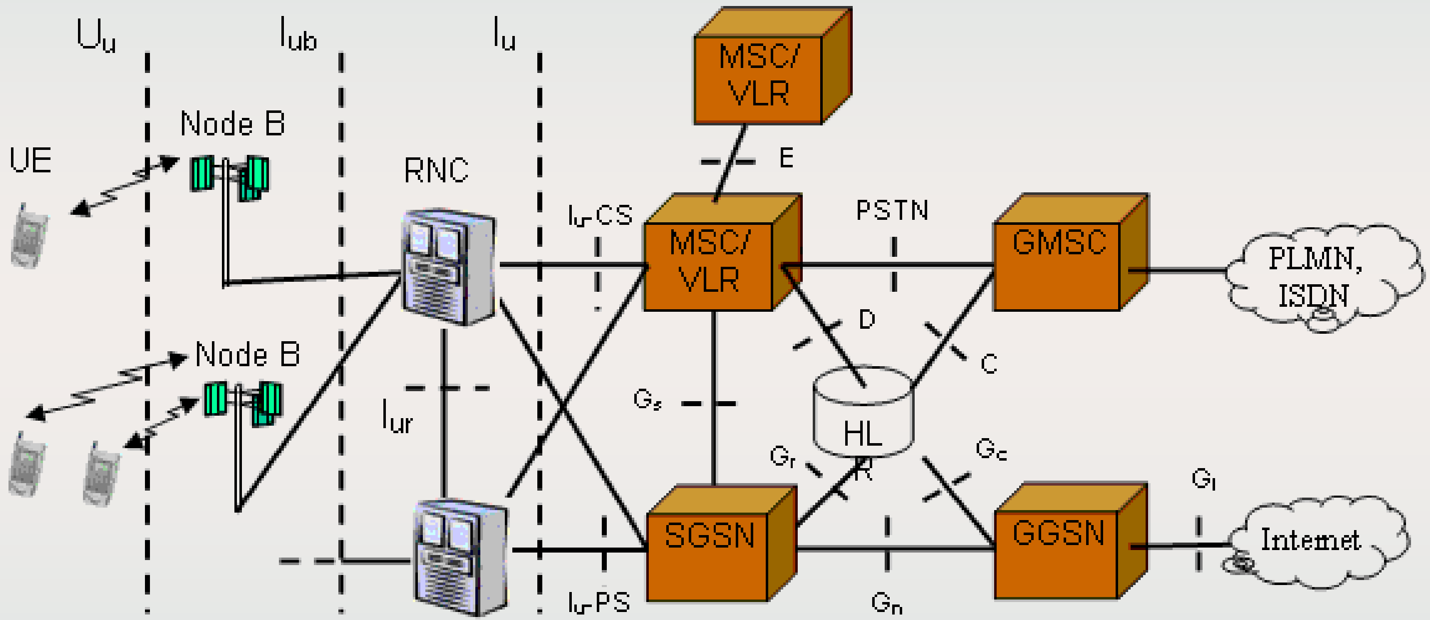
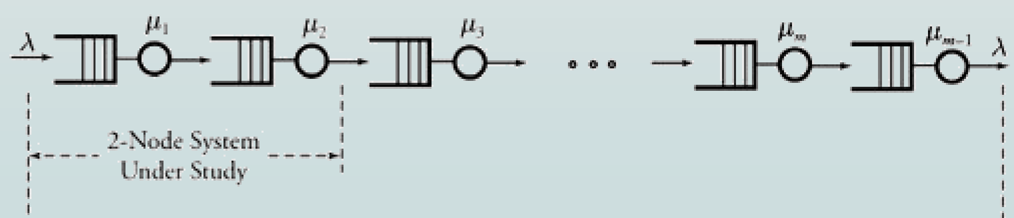
Obslužné sítě

Jacksonova síť systémů hromadné obsluhy

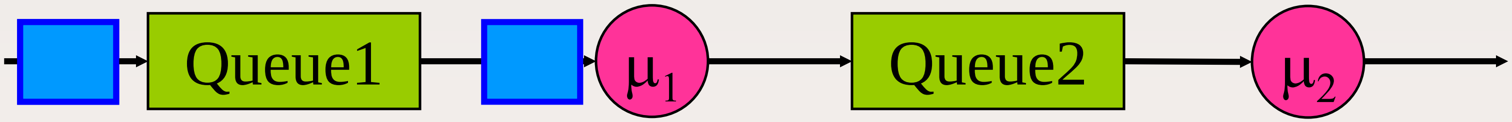


Universal Mobile Telecommunications System

Telekomunikační síť
Počítačová síť
Dopravní síť

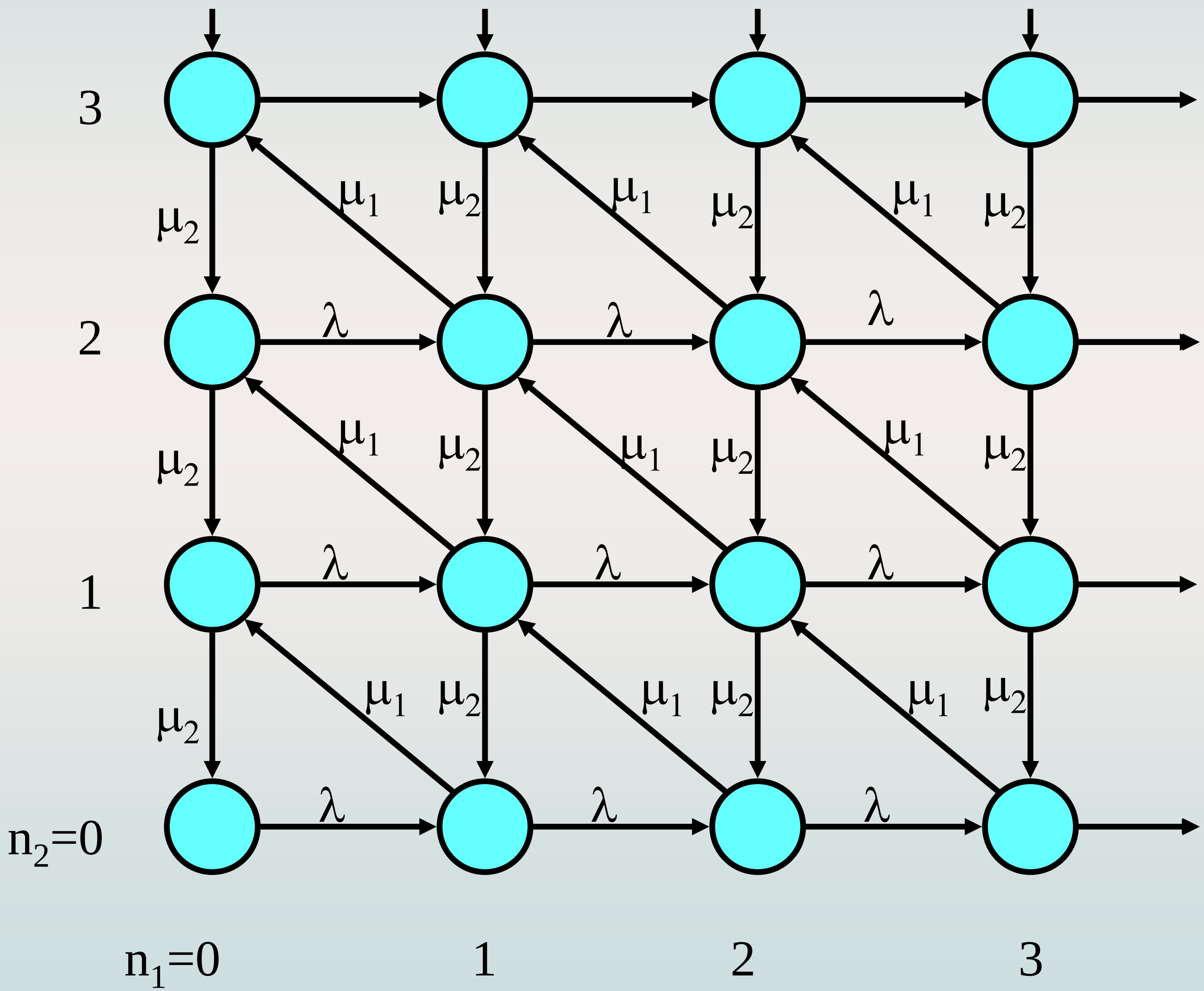


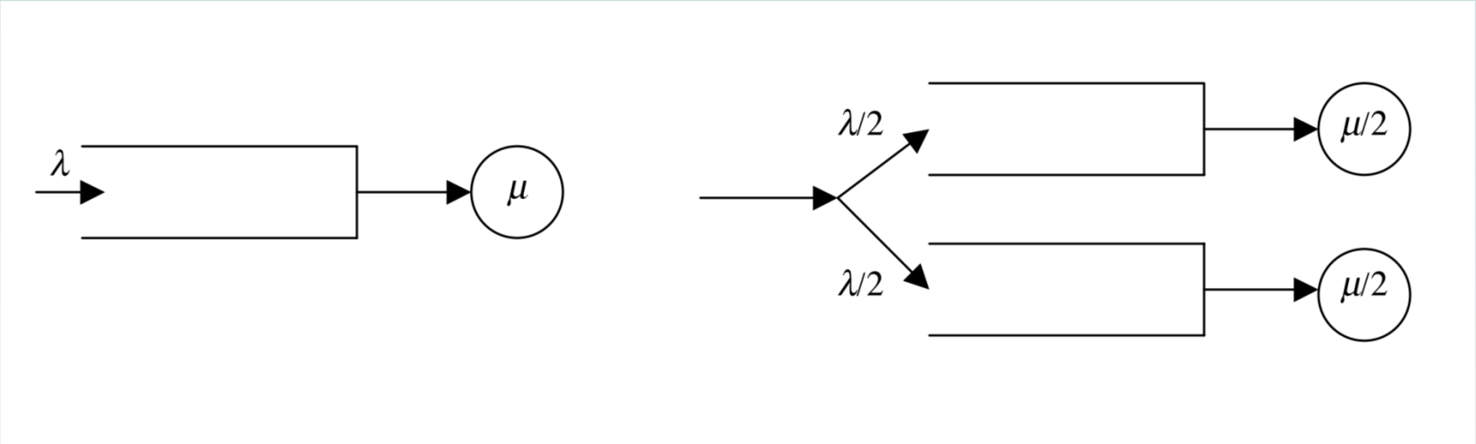
Sériové propojení dvou front



Stav systému je popsán uspořádanou dvojící $[X_1(t), X_2(t)]$ počtů zákazníků v systémech 1 a 2.

Sériové propojení dvou front





$$E\left[S\right]=\rho \qquad E[S_1]=\rho,\ E[S_2]=\rho$$

$$E[X]=\frac{\rho}{1-\rho} \qquad E[X_1]=E[X_2]=\frac{\rho}{1-\rho},$$

$$E[W]=\frac{E[X]}{\lambda} \qquad E[W_1]=E[W_2]=2\cdot\frac{E[X]}{\lambda}$$

$$P\left(X=n\right)=\left(1-\rho\right)\rho^n$$

$$P\left(X=n\right)=\sum_{k=0}^{n}P\left(X_1=k,\ X_2=n-k\right)=$$

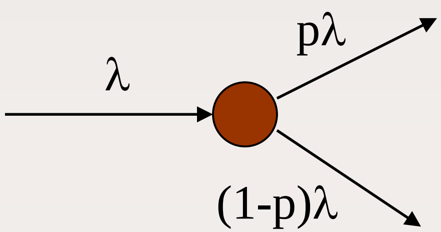
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\rho\right)\rho^k\cdot\left(1-\rho\right)\rho^{n-k}=\left(1-\rho\right)^2\sum_{k=0}^{n}\rho^k\rho^{n-k}=(n+1)\rho^n\left(1-\rho\right)^2$$

M_M_1_r.m

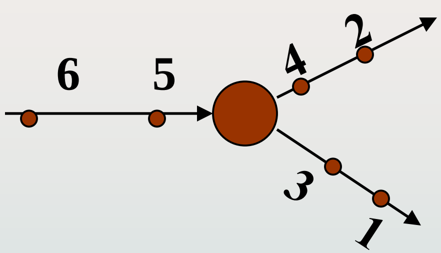
Základní pojmy

- Tok sítě je charakterizován intenzitou λ
- Obecně se hustota pravděpodobnosti výstupních toků nedá určit na základě informací o vstupních tocích

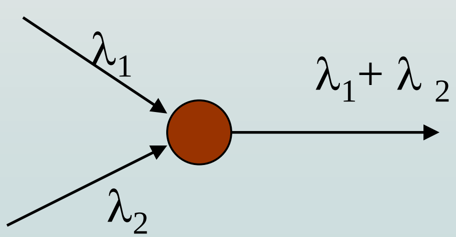
Pravidla pro spojování a rozdělování toků



Pokud je vstupní tok Poissonovský a rozdělování požadavků náhodné, je výstupní tok Poissonovský

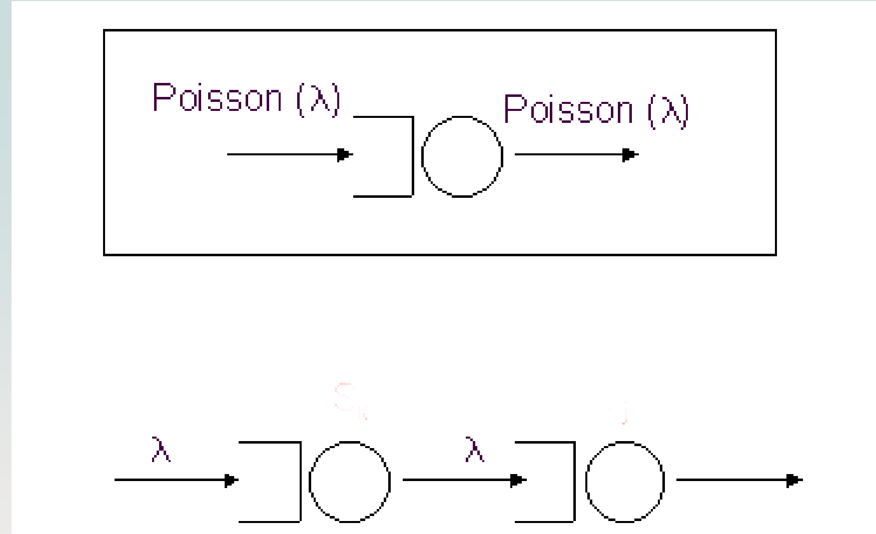


Pokud je vstupní tok Poissonovský a rozdělování požadavků pravidelné, je výstupní tok Erlangův

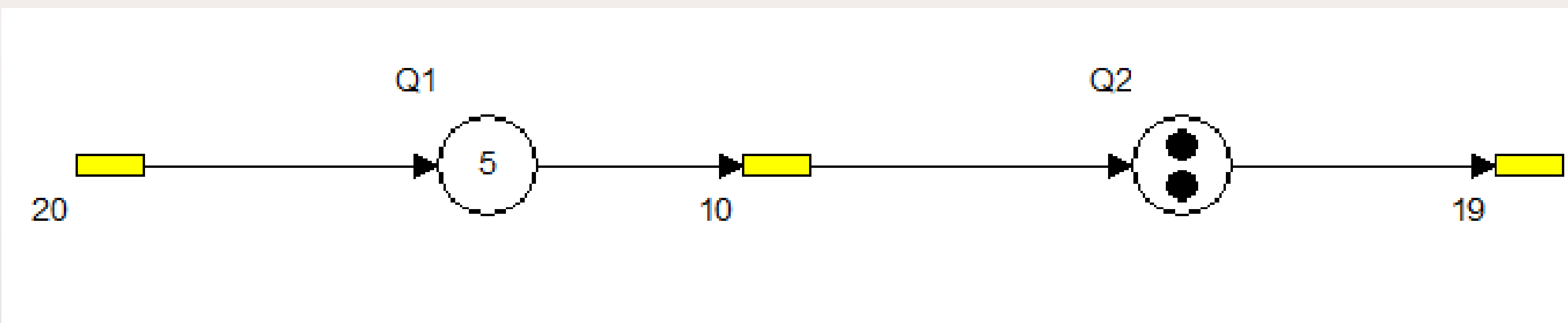


Jsou-li oba vstupní toky Poissonovské s intenzitou λ_i, je i výstupní tok Poissonovský s intenzitou $\sum_i \lambda_i$

Burkeho věta



Výstupní tok z ustáleného systému M/M/m/∞ je Poissonův, intenzita výstupního toku je rovna intenzitě vstupu.

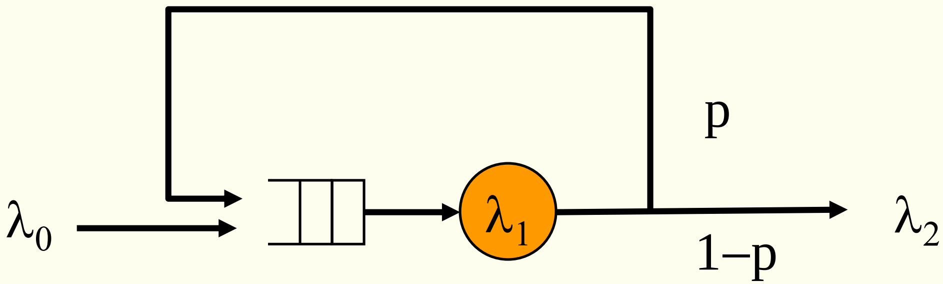


$$P\big([X_1, X_2] = [k_1, k_2]\big) = P(X_1 = k_1) \cdot P(X_2 = k_2)$$

tandem.hps

Fronty se zpětnou vazbou

- Zákazník může navštívit frontu vícekrát – potom Burkeho věta neplatí lokálně, zkoumáme-li intenzitu na uzlu. Pro vstupní a výstupní tok ustáleného obslužného systému platí, že $\lambda_0 = \lambda_2$.

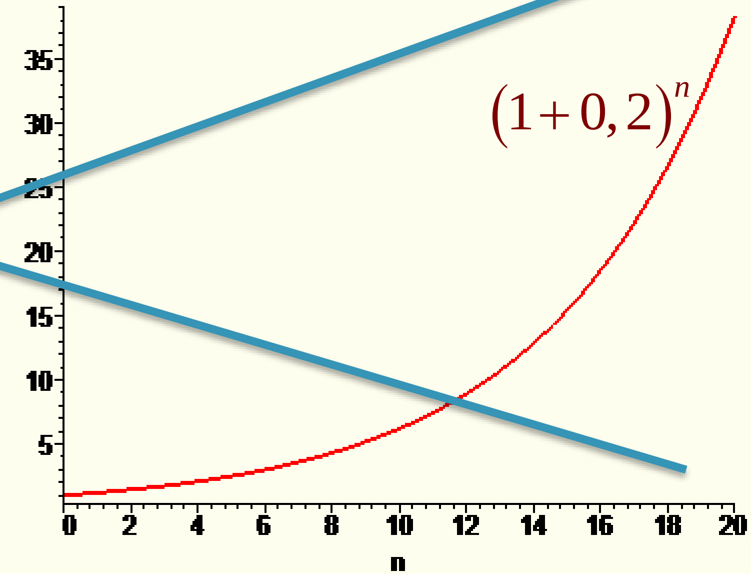


$$\lambda + p\lambda$$

$$\lambda + p\lambda + p\left(\lambda + p\lambda\right) = \lambda\left(1+p\right)^2$$

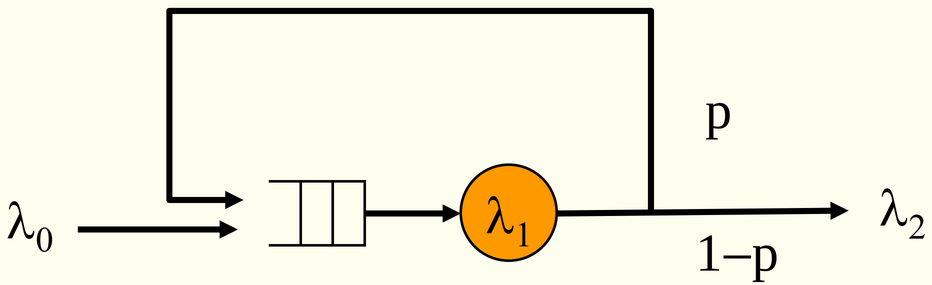
$$\ldots$$

$$\lambda\left(1+p\right)^n$$



Příklad: Fronty se zpětnou vazbou (MS Forms)

Linka 1 obsluhuje zákazníky, kteří přicházejí v Poissonově toku s intenzitou 20 zákazníků za hodinu. S pravděpodobností p = 0,3 požadují zákazníci opakování obsluhy, ostatní linku opouštějí ve výstupním toku λ2. Označte, při kterých intenzitách obsluhy μ neporoste fronta před první linkou M/M/1/∞ do nekonečna.



$$\lambda_1 = \lambda_0 + p\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1-p}$$

$$\lambda_2 = (1-p)\lambda_1 = \lambda_0$$

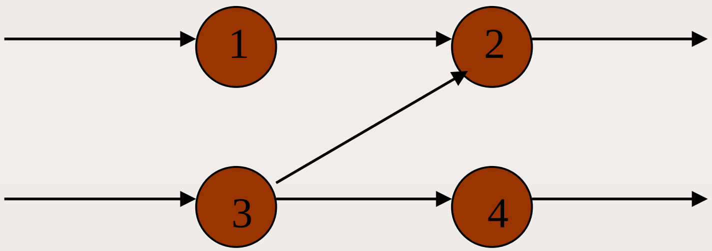
$$\lambda_0 = 20 \text{ zák./hod}$$

$$\lambda_1 = \frac{20}{0,7} \doteq 28,57$$

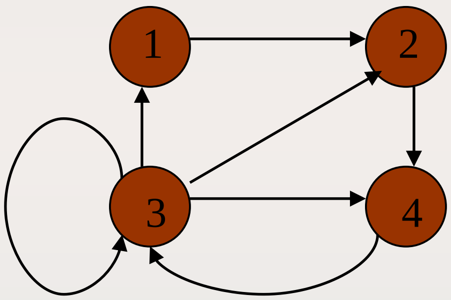
- Aby byl systém ustálený, musí být intenzita obsluhy větší než 28,57 zákazníků za hodinu.

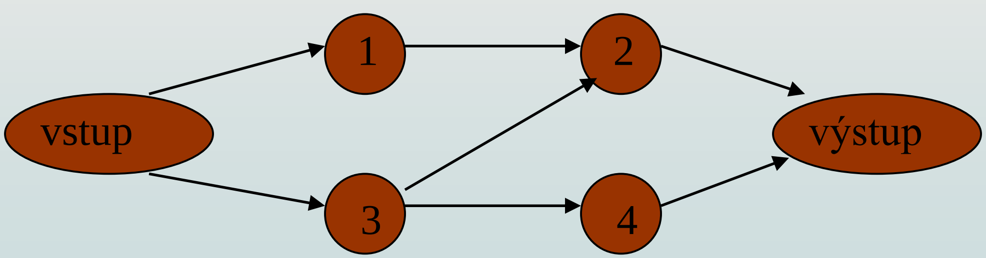
Síť: Systém stanic obsluhy, vzájemně propojených fyzickými i logickými vazbami.

otevřený



uzavřený





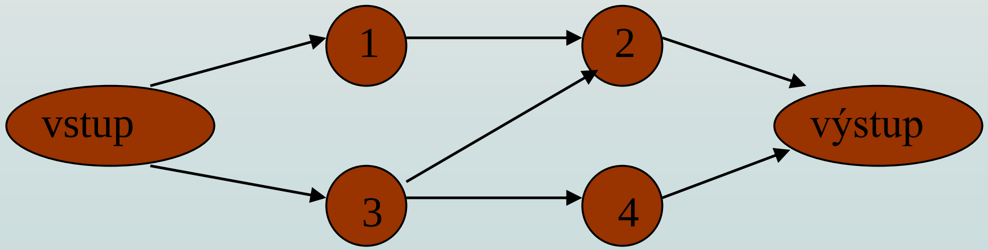
Př: konstantní počet procedur. Jakmile je ukončena obsluha jednoho požadavku je nahrazen požadavkem novým.

Jacksonova síť

Stochastická obslužná síť, která se skládá z *m* systémů, zdroje a spotřebiče, přičemž jsou dané psti p_{ij} vstupu požadavku z *i*-tého do *j*-tého systému.

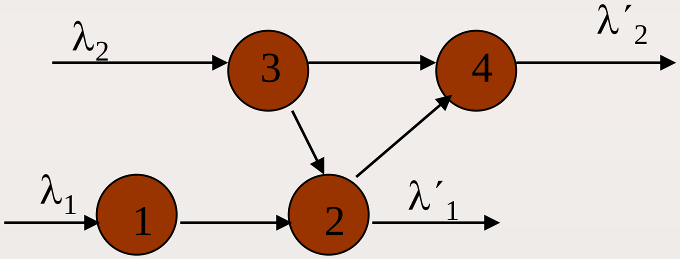
1. Čas obsluhy ve všech systémech má exponenciální rozdělení
   – doba obsluhy požadavku je v každém uzlu nezávislá
   – každý uzel má frontu FIFO s neomezenou délkou
2. Po ukončení obsluhy v uzlu i požadavek ihned postupuje do následujícího uzlu, který je vybrán náhodně, možné přechody mezi systémy jsou náhodné a nezávislé

Jsou-li splněny podmínky 1-2, pak je výstup ze zdroje Poissonovský a proces stavů systému je Markovův



Postup řešení obslužné sítě

1. **Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě**
2. Řešení jednotlivých uzlů jako samostatných SHO
3. Nalezení požadovaných charakteristik jednotlivých uzlů sítě
4. Nalezení charakteristik sítě



$$\Lambda_1 = \lambda_1$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + p_{32}\Lambda_3 = \lambda_1 + p_{32}\lambda_2$$

$$\Lambda_3 = \lambda_2$$

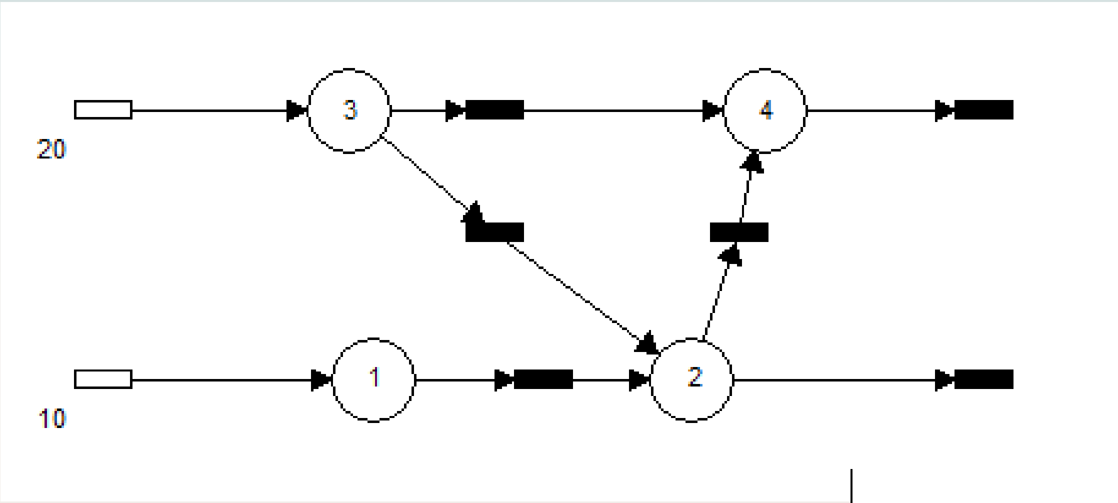
$$\Lambda_4 = p_{34}\Lambda_3 + p_{24}\Lambda_2 = \lambda_2\left(p_{34} + p_{32}p_{24}\right) + \lambda_1 p_{24}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1' + \lambda_2' = \Lambda_0$$

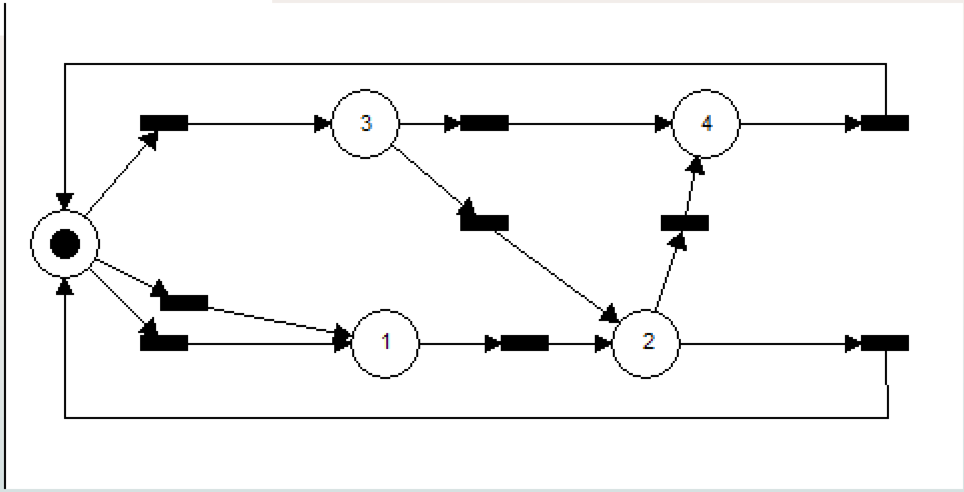
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \left(1 - p_{24}\right)\Lambda_2 + \Lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2$$

net.hps, net2.hps

1. Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě



$$\lambda_1 = 0{,}1\ s^{-1} = 6\min^{-1}$$
$$\lambda_2 = 0{,}05\ s^{-1} = 3\min^{-1},$$



$$\Lambda_1 = \lambda_1 = 6$$
$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + p_{32}\Lambda_3 = \lambda_1 + p_{32}\lambda_2 = 7{,}5$$
$$\Lambda_3 = \lambda_2 = 3$$
$$\Lambda_4 = p_{34}\Lambda_3 + p_{24}\Lambda_2 = \lambda_2\left(p_{34} + p_{32}p_{24}\right) + \lambda_1 p_{24} = 5.25$$

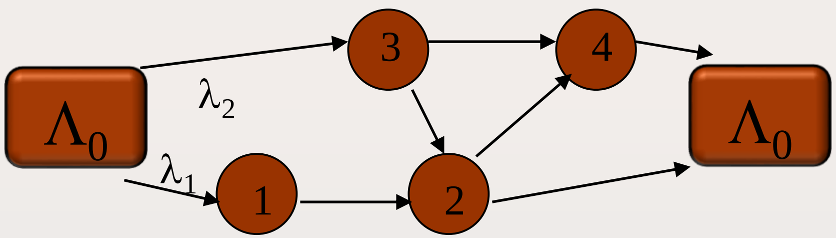
net.hps, net2.hps

Postup řešení obslužné sítě

1. Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \Lambda_0$$

$$p_{01} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \; p_{03} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & I/0 \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{24} & p_{20} \\ 0 & p_{32} & 0 & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_{01} & 0 & p_{03} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_0)$$

$$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$$

$$\Lambda_1 = p_{01}\Lambda_0$$
$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + p_{32}\Lambda_3$$
$$\Lambda_3 = p_{03}\Lambda_0$$
$$\Lambda_4 = p_{24}\Lambda_2 + p_{34}\Lambda_3$$
$$\Lambda_0 = p_{20}\Lambda_2 + \Lambda_4$$

LZ rovnice

$$\Lambda_1 = p_{01}\Lambda_0$$
$$\Lambda_2 = (p_{01} + p_{32}p_{03})\Lambda_0$$
$$\Lambda_3 = (p_{03})\Lambda_0$$
$$\Lambda_4 = (p_{24}p_{01} + p_{24}p_{32}p_{03} + p_{34}p_{03})\Lambda_0$$

Počet průchodů uzlem

Vektor intenzit uzlů splňuje soustavu rovnic: $\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$

Pokud je Markovův řetězec sítě ireducibilní, potom pro dané Λ_0 je jediné řešení systému tvaru.

$$\Lambda_i = \alpha_i \Lambda_0$$

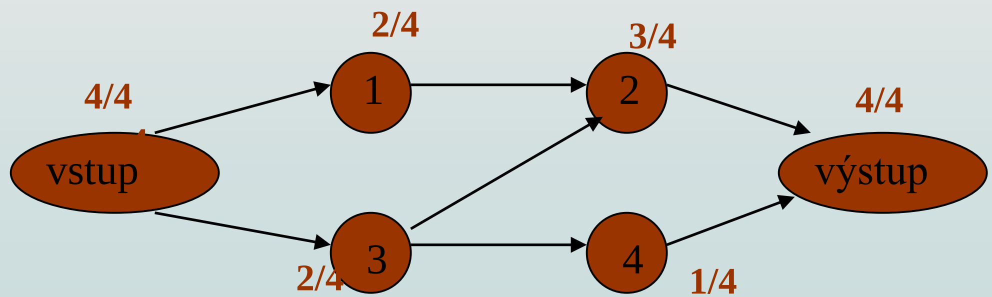
α_i - průměrný počet navštívení i-tého uzlu při průchodu zákazníka sítí

Pro stabilizovaný systém $\forall i;\ \Lambda_i < \mu_i \Rightarrow \alpha_i \Lambda_0 < \mu_i \Rightarrow \quad \Lambda_0 < \dfrac{\mu_i}{\alpha_i}$

$$P := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{I/0} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

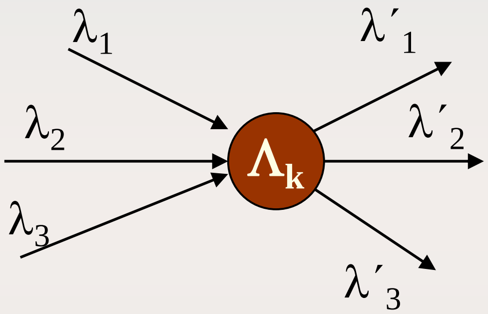
$$\Lambda_0 < \min_i \frac{\mu_i}{\alpha_i}$$

$$\Lambda := \left[\frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \Lambda_0\right]$$



Λ_k - Průměrná intenzita vstupu do k-tého uzlu

Λ_k střední hodnota počtu požadavků procházející uzlem sítě za časovou jednotku



$$\sum_i \lambda_i = \sum_j \lambda'_j = \Lambda_k$$

$$\Lambda_j = \sum_{i=0}^{m} \Lambda_i p_{ij}$$

$$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$$

Podmínka ustáleného stavu

Všechny systémy sítě musí být stabilní $\Rightarrow$ intenzity provozu všech systémů $\rho_k < 1$.

$$\frac{\Lambda_k}{n_k \mu_k} < 1 \Rightarrow \Lambda_k < \frac{n_k}{T_k}$$

n_k ... počet obslužných kanálů

T_k ... střední doba obsluhy

Jacksonův teorém

- X_i ... počet požadavků v i-tém uzlu
  počty požadavků X_i v různých uzlech sítě jsou nezávislé
- Vektor stavu $\vec{X} = \left(X_1, \ldots, X_m\right)$
- Vektor skutečných hodnot $\vec{k} = \left(k_1, \ldots, k_m\right)$

$$P(\vec{X} = \vec{k}) = P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_m = k_m) \cdot$$

- Označme pravděpodobnost, že v i–tém uzlu je k_i požadavků $p_i\left(k_i\right) = P(X_i = k_i)$

$$p\left(\vec{k}\right) = \prod_{i=1}^{m} p_i(k_i)$$

- Jsou-li všechny systémy sítě typu M / M / 1/∞.

$$p_i\left(k_i\right) = p_i\left(0\right)\rho_i^{k_i}; \quad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$$

Charakteristiky sítě systémů M/M/1/∞

Charakteristiky systému určíme jako součet charakteristik jednotlivých kanálů.

Střední počet zákazníků v i-tém uzlu $$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$$

Střední doba strávená v i-tém uzlu $$E[U_i] = \frac{E[X_i]}{\Lambda_i} = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$$

Střední délka fronty $$E[F_i] = \frac{\rho_i^2}{1-\rho_i} = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$$

Střední doba strávená ve frontě uzlu $$E[W_i] = \frac{E[F_i]}{\lambda_i} = \frac{\rho_i}{\mu_i - \Lambda_i}$$

Využití linky i-tého uzlu $$E[S_i] \cdot 100\% = \rho_i \cdot 100\%$$

Střední doba strávená v systému

- Střední počet průchodů *i*-tým uzlem α_i:

$$\alpha_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_0}$$

Střední počet zákazníků v i-tém uzlu $$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$$

Střední doba strávená v i-tém uzlu $$E[U_i] = \frac{E[X_i]}{\Lambda_i} = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$$

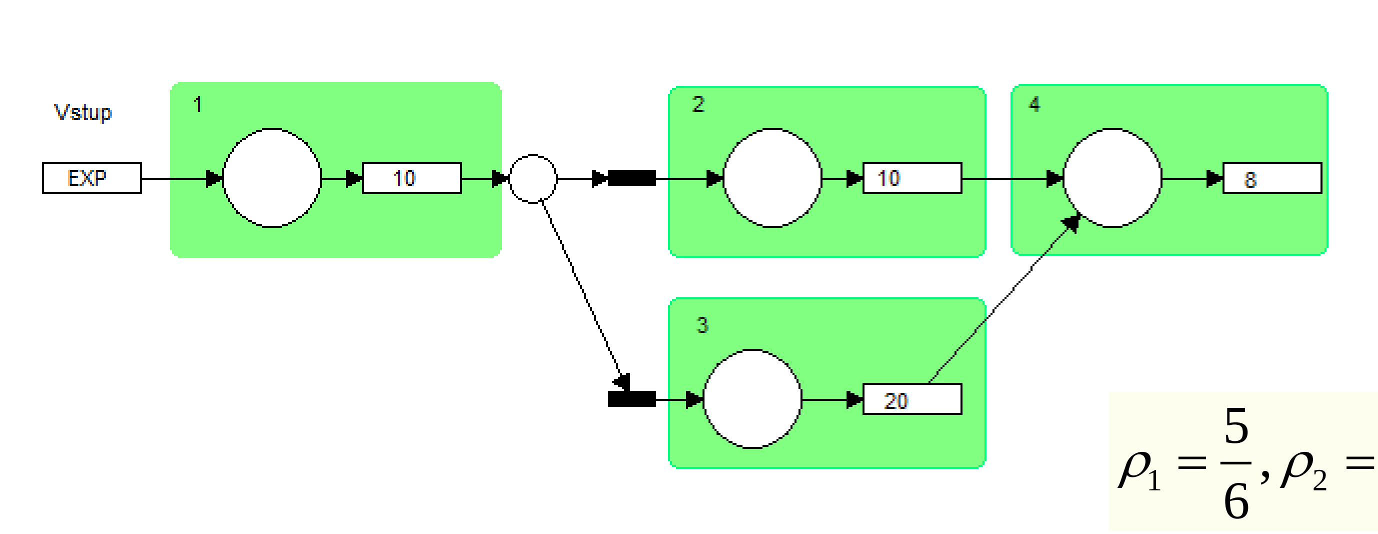
Střední doba strávená v systému

$$E[U] = \frac{E[X]}{\Lambda_0} = \frac{1}{\Lambda_0}\sum_{i=1}^{m} E[X_i] = \frac{1}{\Lambda_0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i} = \sum \alpha_i U_i$$

Určete celkový průměrný počet zákazníků

Otevřená Jacksonova sít čtyř linek M/M/1/∞. Průměrná délka obsluhy v první a druhé lince je 10 s, ve třetí lince 20 s a ve čtvrté lince 8 sekund. Průměrně vstupuje do první linky **5** zákazníků za minutu.

Pravděpodobnost přechodu z první do druhé linky p_{12} = ¾.



$$\Lambda_1 = \Lambda_4 = \Lambda_0$$

$$\Lambda_2 = \frac{3}{4}\Lambda_0$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{4}\Lambda_0$$

$$\rho_1 = \frac{5}{6}, \rho_2 = \frac{5}{8}, \rho_3 = \frac{5}{12}, \rho_4 = \frac{2}{3}$$

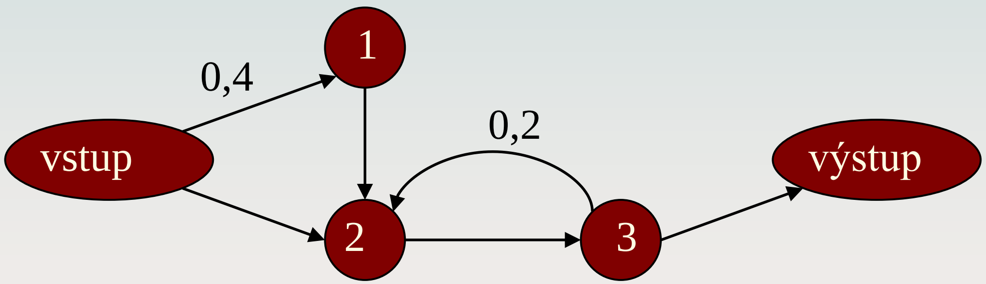
$$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] = 9\frac{8}{21};$$

$$E[X_1] = 5; E[X_2] = \frac{5}{3}; E[X_3] = \frac{5}{7}; E[X_4] = 2;$$

$$E[W] = \frac{E[X]}{\lambda} = 1{,}876\,\mathrm{min}$$

Analyzujte Jacksonovu síť systémů M/M/1/∞



$$\mu_1 = 5,\ \mu_2 = 10,\ \mu_3 = 8$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(P^T - E\right) \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$$

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{2}{5}\Lambda_0, \frac{5}{4}\Lambda_0, \frac{5}{4}\Lambda_0, \Lambda_0\right)$$

$$\Lambda_0 < \min \frac{\mu_i}{\alpha_i}$$

$$\Lambda_0 < \min\left(\frac{25}{2}, 8, \frac{32}{5}\right)$$

$$\Lambda_0 < 6{,}2$$

Jacksonovu síť systémů M/M/1/∞ - řešení

$$\mu_1 = 5,\ \mu_2 = 10,\ \mu_3 = 8 \qquad \vec{\Lambda} = \left(\frac{2}{5}\Lambda_0, \frac{5}{4}\Lambda_0, \frac{5}{4}\Lambda_0, \Lambda_0 \right)$$

Λ_0=	3		
	1.linka	2.linka	3.linka
α_i	0,4	1,25	1,25
λ_i	1,2	3,75	3,75
μ_i	5	10	8
ES_i	0,24	0,375	0,469
EF_i	0,076	0,225	0,414
EX_i	0,316	0,6	0,882
EW_i	0,063	0,06	0,11
EUi	0,263	0,16	0,235
EUi*αi	0,105	0,2	0,294
EX =	1,798		
EU =	0,6	0,599	

$$\Lambda_i = \alpha_i \Lambda_0$$

$$E[S_i] = \rho_i$$

$$E[F_i] = \frac{\rho_i^2}{1-\rho_i}$$

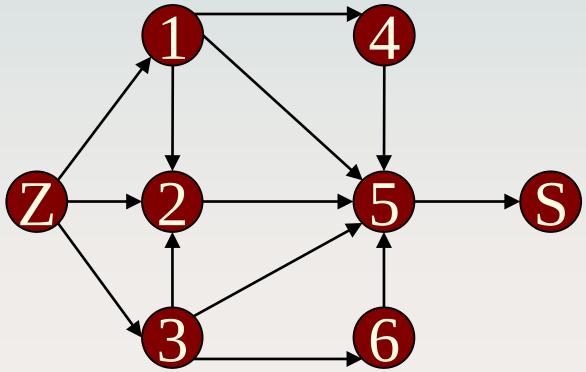
$$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

Střední doba strávená v systému

$$E[U] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U_i \qquad E[U_i] = \frac{E[X_i]}{\Lambda_i}$$

Příklad:

Určete průměrný počet zákazníků v síti 6 systémů M/M/1/∞:



$$\mu_i = \frac{1}{2}; i = 1 \ldots 6$$

1. Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$$

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{\Lambda_0}{3}, \frac{5\Lambda_0}{9}, \frac{\Lambda_0}{3}, \frac{\Lambda_0}{9}, \Lambda_0, \frac{\Lambda_0}{9}, \Lambda_0\right)$$

Podmínka ustáleného systému

Λ_0= 0,4

	1.linka	2.linka	3.linka	4.linka	5.linka	6.linka
α_i	1/3	5/9	1/3	1/9	1	1/9
λ_i	0,13	0,22	0,13	0,04	0,40	0,04
μ_i	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
ES_i	0,27	0,44	0,27	0,09	0,80	0,09
EF_i	0,10	0,36	0,10	0,01	3,20	0,01
EX_i	0,36	0,80	0,36	0,10	4,00	0,10
EW_i	0,73	1,60	0,73	0,20	8,00	0,20
EUi	2,73	3,60	2,73	2,20	10,00	2,20

EX = 5,72

EU = 14,31

$$E[U]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i U_i$$

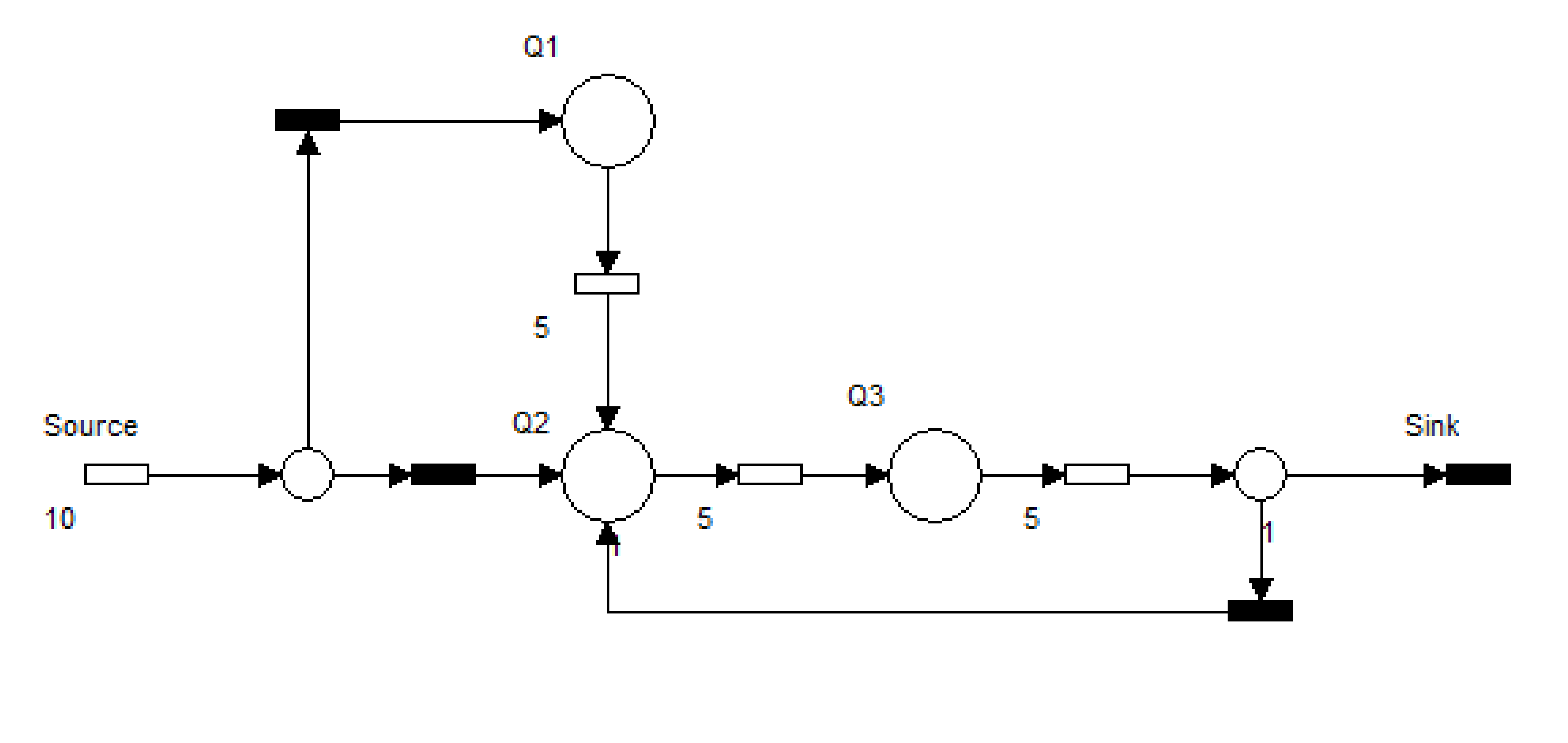
$$E[U_i]=\frac{E[X_i]}{\Lambda_i}$$

$$\vec{\Lambda}=\left(\frac{\Lambda_0}{3},\frac{5\Lambda_0}{9},\frac{\Lambda_0}{3},\frac{\Lambda_0}{9},\Lambda_0,\frac{\Lambda_0}{9},\Lambda_0\right)$$

$$\mu=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Lambda_0<\frac{1}{2}$$

Příklad 4b: Určete průměrný průchod uzly



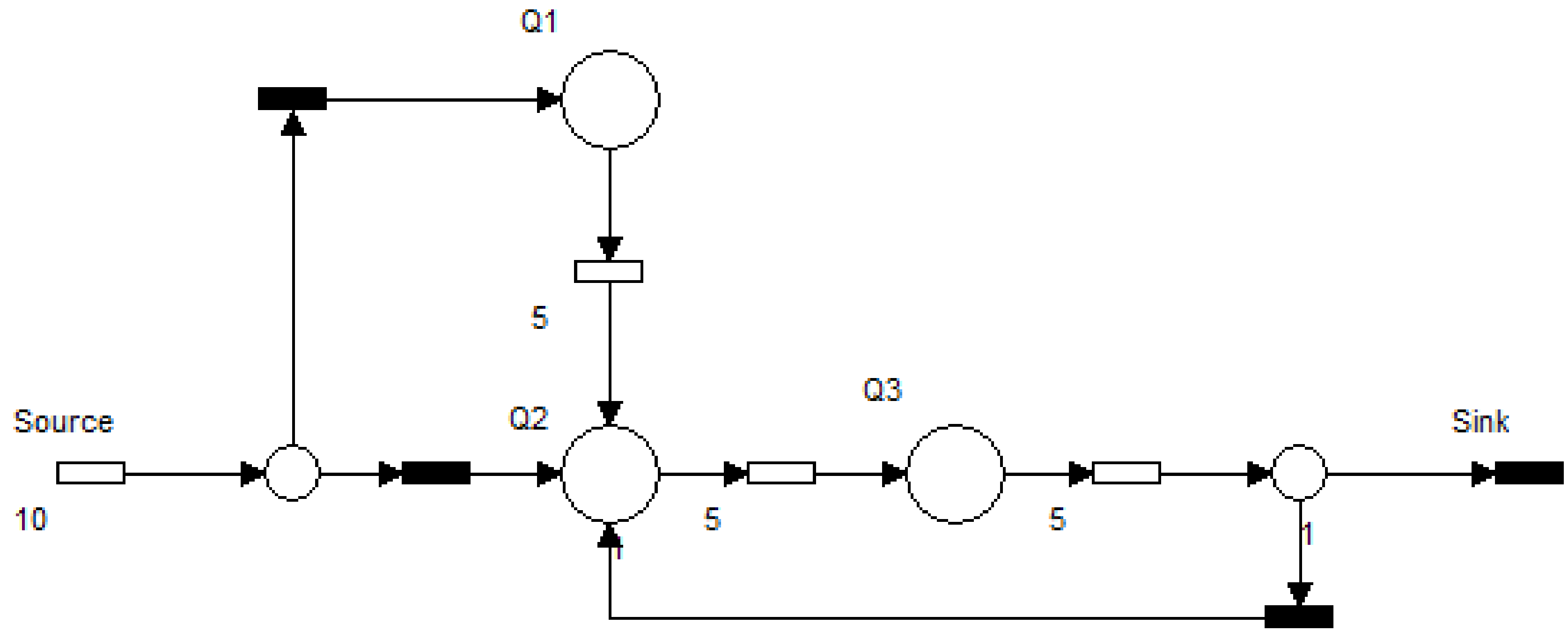
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_0, 2\Lambda_0, 2\Lambda_0, \Lambda_0 \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} p(n) \doteq (0.09,\ 0.36, 0.36, 0.18)$$

Feedback2.hps net.m Exercise 4

Příklad 4b: Určete průměrný průchod uzly



$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_0, 2\Lambda_0, 2\Lambda_0, \Lambda_0 \right)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{10}$$

$$\rho = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{5} \right)$$

Feedback2.hps net.m Exercise 4