Přírodovědecká fakulta

Univerzita Palackého v Olomouci

# MARKOVOVY ŘETĚZCE A JEJICH APLIKACE

Kamila Fačevicová, Karel Hron, Pavla Kunderová

Olomouc 2018

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

# MARKOVOVY ŘETĚZCE A JEJICH APLIKACE

Kamila Fačevicová, Karel Hron, Pavla Kunderová

Olomouc 2018

**Oponenti:** doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.
doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

**Kolektiv autorů:** Mgr. Kamila Fačevicová, Ph.D.
doc. RNDr. Karel Hron, Ph.D.
doc. RNDr. Pavla Kunderová, CSc.

Výkonný redaktor: Mgr. Miriam Delongová
Odpovědný redaktor: Bc. Otakar Loutocký
Technická redakce: RNDr. Miloslav Závodný
Návrh obálky: Bc. Karina Pavlíková

Publikace neprošla ve vydavatelství redakční a jazykovou úpravou.

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
web: www.vydavatelstvi.upol.cz
e-shop: www.vydavatelstvi.upol.cz
e-mail: vup@upol.cz

Olomouc 2018
Ediční řada – Skripta
VUP 2018/0362

**2., doplněné vydání** (1. vydání v roce 2012)



**ISBN 978-80-244-5432-0** (online : PDF)

# Předmluva

V teorii pravděpodobnosti je náhodný proces, někdy též nazývaný jako stochastický proces, protějšek k deterministickému procesu. Místo jediné možnosti vývoje procesu v čase (jak se s tím můžeme setkat např. při řešení obyčejných diferenciálních rovnic) se u náhodných procesů vyskytuje jistá neurčitost v budoucím vývoji popsaná pomocí rozdělení pravděpodobností. To znamená, že i když je počáteční podmínka (nebo úvodní stav systému) známá, je zde mnoho možností, kterými se proces může vydat, přitom některé z nich jsou více pravděpodobné než jiné. V nejjednodušším případě (v diskrétním čase) je náhodný proces posloupností náhodných veličin známou jako časová řada, vede ale i k zavedení námi studovaných Markovových řetězců.

Teorie náhodných procesů vznikla jako důsledek tvorby matematických modelů fyzikálních procesů. Tato teorie dnes tvoří nedílnou součást teorie pravděpodobnosti a nachází velké uplatnění v aplikacích. Některé úlohy, které se řeší ve vědě a technice, vedou ke studiu posloupností nezávislých náhodných veličin. To je dáno tím, že reálné procesy studované pomocí pravděpodobnostních metod jsou ve své podstatě spojeny s takovými posloupnostmi jevů, jejichž délky jsou náhodné (např. zálohované systémy automatických strojů, ve kterých se v náhodných okamžicích vyměňují vadné součástky).

Aplikace náhodných procesů nacházíme v biologii, ekologii, fyzice, medicíně, psychologii, sociologii, v operační analýze (např. v teorii hromadné obsluhy, v teorii zásob), v provozní spolehlivosti systémů a v dalších odvětvích. Můžeme si představit i dvě zcela konkrétní situace, které se v praxi často vyskytují. V první bývá úkolem optimalizovat počet otevřených pokladen v supermarketu, a to tak, aby se na jedné straně před nimi nevytvářely dlouhé fronty, a na straně druhé, aby byly všechny pokladny dostatečně využity. V druhém případě uvažujme dílnu s automatickými stroji, které potřebují čas od času seřídit. Úkolem je zjistit, kolik pracovníků–seřizovačů mít v pohotovosti, aby nedocházelo ani k prostojům strojů, čekajících na seřízení, ani k prostojům seřizovačů. Přestože musíme při modelování uvedených problémů pomocí Markovových řetězců přijmout některá zjednodušující omezení, dosažené výsledky jsou většinou vyhovující a odpovídají potřebám zadavatelů.

Cílem tohoto textu je uvést čtenáře do problematiky části teorie náhodných procesů, kterou tvoří Markovovy řetězce s diskrétním a spojitým časem. Základy k teorii Markovových procesů položil A. A. Markov (1856–1932), žák zakladatele petrohradské školy teorie pravděpodobnosti P. L. Čebyševa (1821–1894).

Markovovy řetězce jsou nejjednoduššími modely pro popis chování náhodných jevů, které probíhají v čase. Třída Markovových řetězců je dostatečně bohatá na to, aby mohla být využita v mnohých praktických aplikacích včetně výše uvedených. Po prostudování této úvodní příručky by měl být čtenář schopen studovat odborné monografie z uvedeného oboru. Metody, které jsou demonstrovány na jednoduchých příkladech, budou užitečné i v situacích složitějších.

Skriptum je určeno jako studijní opora k jednosemestrální přednášce „Markovovy řetězce“, při čtení textu se předpokládá znalost základů teorie pravděpodobnosti v rozsahu standardního vysokoškolského kurzu. V prvních dvou kapitolách se seznámíte s teoretickými základy Markovových řetězců, které budou následně využity v kapitole o aplikacích. V těchto kapitolách se proto setkáte s matematickou strukturou textu, tedy rozdělením na definice, věty, důkazy, příklady a vysvětlující poznámky. Kapitola třetí má již naopak podobu souvislého textu, pojednávajícího o jednotlivých aplikacích Markovových řetězců a proloženého ilustrativními příklady. V úvodech jednotlivých kapitol se setkáte s následujícími ikonami, které by měly usnadnit práci s předloženým textem:

*Cíle:* Na začátku každé kapitoly naleznete konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím získáte přehled o tom, co budete po nastudování příslušného tématického celku umět, znát, co budete schopni dělat a čemu budete rozumět.

*Motivace:* Odstavec, v němž by mělo být vysvětleno, proč se danou problematikou vůbec hodláme zabývat. Má motivovat k tomu, abyste studovali právě tuto pasáž.

Ve druhém vydání byly opraveny překlepy a faktické nesrovnalosti, které byly nalezeny v původním textu. Mimo to byly doplněny kapitoly o absorpčních a skrytých Markovových řetězcích a byla rozšířena kapitola 2.1 o základních pojmech Markovových řetězců se spojitým časem a jejich vlastnostech.

Autoři děkují doc. RNDr. Evě Fišerové, Ph.D. a doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za podrobné pročtení rukopisu a za cenné odborné připomínky, RNDr. Marii Budíkové, Dr. za poskytnuté materiály a RNDr. Miloslavu Závodnému za grafickou úpravu učebního textu a zhotovení obrázků. Poděkování náleží také projektu FRUP_2018_048 Inovace vybraných předmětů na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky, s jehož podporou byla skripta vydána.

listopad 2018

*Autoři*

# Obsah

# Úvod, náhodný proces

Náhodný proces, též stochastický proces, si lze představit jako zobecnění pojmu náhodná veličina. Zatímco výsledkem realizace náhodné veličiny je jedno číslo, např. výsledek hodu kostkou, je realizací náhodného procesu funkce jedné proměnné (specielně i posloupnost). Roli (nenáhodné) nezávisle proměnné nejčastěji představuje čas, ale, jak uvidíme dále, není to rozhodně jediná možnost. Při zavedení následujících pojmů využijeme znalostí ze základního kurzu teorie pravděpodobnosti, zejména kapitoly o vlastnostech pravděpodobnosti a náhodných veličinách diskrétního typu.

Podívejme se na celou situaci podrobněji. Nechť $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť $\mathsf{T} \subset \mathbb{R}_1$. Systém (rodina) náhodných veličin $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$ definovaných na $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ se nazývá *náhodný proces*. V případě, že $\mathsf{T} = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ mluvíme o *procesu s diskrétním časem* nebo o časové řadě. Je-li $\mathsf{T} = \langle a, b \rangle$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$ je *proces se spojitým časem.*

Označme $\mathsf{S}$ množinu hodnot náhodných veličin $X_t$. Pokud náhodné veličiny $X_t$ nabývají pouze diskrétních hodnot ($\mathsf{S}$ je konečná nebo nekonečná spočetná), říkáme, že $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$ je *proces s diskrétními stavy.* Nabývají-li $X_t$ hodnot z nějakého intervalu ($\mathsf{S}$ je nespočetná), mluvíme o *procesu se spojitými stavy.*

Náhodný proces $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$ je vlastně funkce dvou proměnných, lze psát $X_t = \Psi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathsf{T}$. Pro pevné $t_0 \in \mathsf{T}$ závisí $X_{t_0} = \Psi(\omega, t_0)$ pouze na $\omega$ (tzv. průsek náhodného procesu v bodě $t_0$). Pro pevné $\omega_0 \in \Omega$ závisí $X_t = \Psi(\omega_0, t)$ pouze na čase, představuje nenáhodnou funkci (je to tzv. trajektorie procesu nebo realizace procesu).

Náhodné procesy lze rozdělit do čtyř skupin:

(1) proces se spojitým časem a spojitými stavy (např. $X_t$ je sekundový průtok vody na určitém toku v určitém místě v čase $t$);

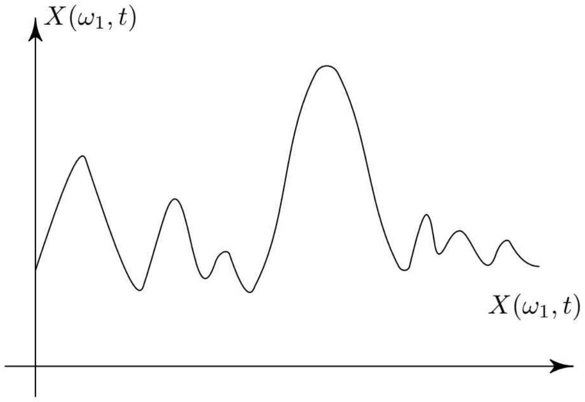
(2) proces se spojitým časem a diskrétními stavy (např. $X_t$ je počet aut čekajících na opravu v určité opravně v čase $t$);

(3) proces s diskrétním časem a spojitými stavy (např. $X_n$ je finanční hotovost určité banky na konci $n$-tého dne);

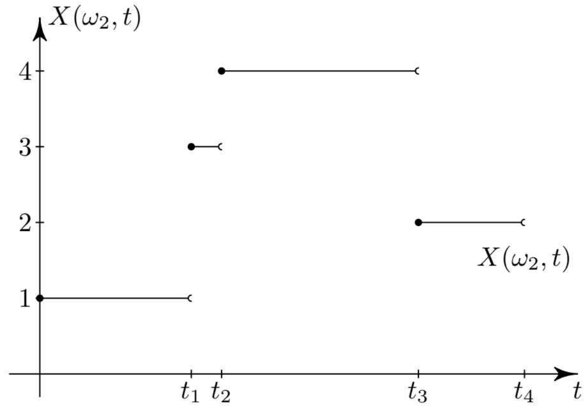
(4) proces s diskrétním časem a diskrétními stavy (např. $X_n$ je kapitál hazardního hráče po $n$-té hře, vyhrává-li nebo prohrává-li v každé hře jednotkovou částku, např. 1 korunu).

Příklady zmíněných procesů (1)–(4) jsou uvedeny v obrázku na konci této sekce.

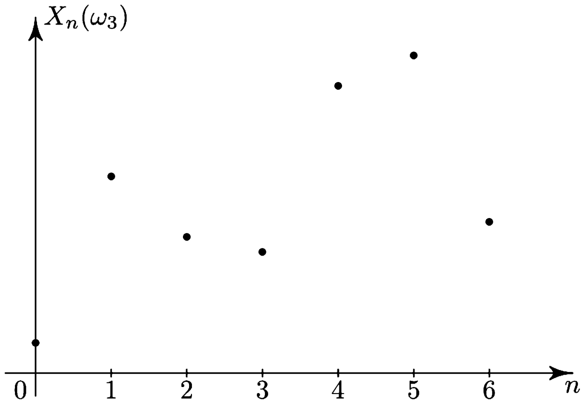
V učebním textu se budeme zabývat náhodnými posloupnostmi, tj. náhodnými procesy s diskrétními stavy, které mají tzv. markovskou vlastnost (popisuje ji definice 1.1). Náhodné posloupnosti s markovskou vlastností nazýváme *Markovovy řetězce.*



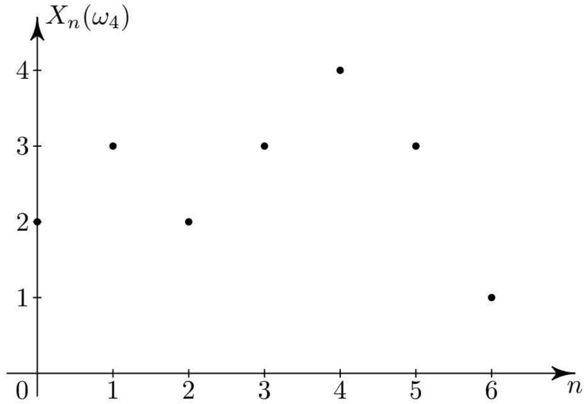

Ad 1.




Ad 2.




Ad 3.




Ad 4.

# 1 Markovovy řetězce s diskrétním časem

Abyste se mohli co nejdříve věnovat konkrétním aplikacím, objasníme si v této kapitole v přehledném souhrnu potřebné teoretické aspekty Markovových řetězců. Na úvod si vysvětlíme pojem Markovova řetězce s diskrétním časem jako speciálního případu náhodného procesu. Zformulujeme definice a dokážeme důležitá tvrzení, která povedou ke klasifikaci stavů Markovových řetězců. To nám dovolí následně klasifikovat samotné řetězce. Zejména se při tom zastavíme u tzv. stacionárního rozdělení Markovových řetězců, které umožňuje zkoumat chování řetězce v jeho ustálené podobě, sledujeme-li ho dostatečně dlouhou dobu. Stacionární rozdělení oceníte, až budeme aplikovat Markovovy řetězce s diskrétním časem třeba při simulacích rozdělení pravděpodobností metodou MCMC. V této kapitole získané teoretické znalosti budeme ilustrovat na příkladech, a také je použijeme při řešení několika praktických úloh, zejména z ekonomické oblasti. Naučíte se například, jak vytvořit fungující model havarijního pojištění nebo jak modelovat vývoj tržních podílů v maloobchodě.

## 1.1 Definice, pravděpodobnosti přechodu

Již víme, co si matematicky představit pod pojmem náhodný proces, nyní je ovšem nutno přesněji specifikovat samotný Markovův řetězec. Jedná se vlastně o náhodný proces *bez paměti*: stav systému v budoucnu závisí pouze na současném stavu a nikoli na minulosti systému. Uvedená speciální vlastnost se nazývá *markovská* – ukážeme si nyní, že je klíčová pro řešení mnoha praktických úloh. Nejprve se ale na celou situaci podívejme blíže z matematického hlediska.

Nechť $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť $X_0, X_1, X_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny na tomto prostoru, které nabývají pouze celočíselných hodnot. Nechť $\mathsf{S}$ je množina celých čísel $i$ takových, že $i \in \mathsf{S}$, právě když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $P(X_n = i) > 0$. Množina $\mathsf{S}$ může být konečná nebo nekonečná, bez omezení obecnosti lze předpokládat $\mathsf{S} = \{0, \ldots, N\}$ nebo $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$.

**Definice 1.1** Řekneme, že posloupnost diskrétních náhodných veličin $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, které nabývají hodnot v množině $\mathsf{S}$, tvoří *Markovův řetězec s diskrétním časem*, jestliže platí

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \end{aligned} \tag{1.1}$$

pro každé $n \in \{0, 1, \ldots\}$ a každé $i_0, i_1, \ldots i_{n-1}, i, j \in \mathsf{S}$ pro které

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0.$$

**Poznámka 1.1** a) Často se interpretuje Markovův řetězec následovně. Uvažujeme nějakou fyzikální nebo jinou soustavu (stavový systém), kterou pozorujeme v okamžicích $n = 0, 1, \dots$ Soustava se může nacházet z náhodných příčin ve stavech patřících do množiny $\mathsf{S}$ (množiny stavů). Náhodná veličina $X_n$ popisuje stav této fyzikální soustavy v čase $n$. Je-li soustava v čase $n$ ve stavu $k \in \mathsf{S}$, řekneme, že nastal náhodný jev $(X_n = k)$. Prvky množiny stavů jsme označili nezápornými celými čísly. Tato čísla budou sloužit jako „kódy“ pro rozličné stavy soustav, které můžeme v reálném světě studovat. Budeme užívat terminologii, která nám usnadní vyjadřování, např. budeme říkat, že „řetězec je v čase $n$ ve stavu $k$“, je-li soustava v čase $n$ ve stavu $k$. Změní-li se časový okamžik o jednotku, např. $n$ na $n + 1$, budeme mluvit o „přechodu za jeden krok“.

b) Vztah (1) vyjadřuje tzv. *markovskou vlastnost* náhodné posloupnosti, kterou lze interpretovat následovně. Uvažujme časový okamžik $n$ jako přítomnost, $n + 1$ jako budoucnost a okamžiky $0, 1, \dots, n - 1$ jako minulost. Pravděpodobnost budoucího stavu systému, je-li znám jeho stav přítomný a stavy minulé, je stejná, jako je-li znám jen stav přítomný. Názorně řečeno systém nemá paměť, nepamatuje si, kde byl v minulosti. Pouze přítomný stav systému může ovlivnit jeho budoucí stav. Ukažme si to na příkladu.

Sledujme opakované hazardní hry dvou hráčů takové, že v každé hře vyhraje s pravděpodobností $p$ hráč A nebo s pravděpodobností $1-p$ hráč B (nerozhodný výsledek je vyloučen). Hráč, který prohraje, zaplatí druhému jistou, předem dohodnutou částku $x$, která se během hry nemění. „Stav systému v čase $n$“ bude kapitál hráče A po $n$-té hře. Je zřejmé, že má-li hráč A např. po 25. hře kapitál $K$, bude mít po 26. hře s pravděpodobností $p$ kapitál $K+x$ nebo s pravděpodobností $1-p$ kapitál $K-x$ a s nulovou pravděpodobností ostatní částky, tj. pravděpodobnost budoucího stavu systému je určena pouze stavem v přítomnosti, nikoliv minulým průběhem hry.

Podmíněná pravděpodobnost (je-li definována)

$$p_{ij}(n, n+1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in \mathsf{S}, \; n = 0, 1, \dots,$$

se nazývá *pravděpodobnost přechodu prvního řádu* (pravděpodobnost přechodu za jeden krok), tj. pro dané $i, j \in \mathsf{S}$ pravděpodobnost toho, že v čase $n+1$ je systém ve stavu $j$ za podmínky, že v čase $n$ byl ve stavu $i$.

Pravděpodobnosti přechodu obecně závisí na časovém parametru $n$. Např. budeme-li pravidelně sledovat (např. každých 10 minut) počet zákazníků, kteří jsou v určité prodejně (stavem systému je počet zákazníků), potom pravděpodobnost přechodu ze stavu 20 na 25 bude jiná v dopoledních hodinách (kdy přichází zákazníků méně) než v odpoledních hodinách.

**Definice 1.2** Markovův řetězec s diskrétním časem se nazývá *homogenní*, jestliže pravděpodobnosti přechodu nezávisí na $n$ (na čase, ve kterém přechod nastává), tj. jestliže

$$p_{ij}(n, n+1) = p_{ij}, \quad i, j \in \mathsf{S}.$$

*Upozornění:* V dalším textu budeme uvažovat pouze homogenní řetězce!

Pro pravděpodobnosti přechodu homogenního řetězce platí

$$0 \le p_{ij} \le 1, \quad i, j \in \mathsf{S}, \quad \sum_{j \in \mathsf{S}} p_{ij} = 1, \quad i \in \mathsf{S}. \tag{1.2}$$

Dokážeme druhý vztah. Označme $\mathsf{A}_j = (X_{n+1} = j)$, $\mathsf{B} = (X_n = i)$. Platí $\bigcup_{j \in \mathsf{S}} \mathsf{A}_j = \Omega$, jevy $\mathsf{A}_j$, $j \in \mathsf{S}$, jsou disjunktní a

$$(X_n = i) = \Big(\bigcup_{j \in \mathsf{S}} \mathsf{A}_j\Big) \cap \mathsf{B} = \bigcup_{j \in \mathsf{S}} (\mathsf{A}_j \cap \mathsf{B}) = \bigcup_{j \in \mathsf{S}} (X_{n+1} = j, X_n = i).$$

Potom

$$\sum_{j \in \mathsf{S}} p_{ij} = \sum_{j \in \mathsf{S}} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \sum_{j \in \mathsf{S}} \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i)}{P(X_n = i)} =$$
$$= \frac{1}{P(X_n = i)} \sum_{j \in \mathsf{S}} P(X_{n+1} = j, X_n = i) = 1.$$

Protože pro každé $i \in \mathsf{S}$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $P(X_n = i) > 0$, jsou podmíněné pravděpodobnosti $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ definovány a můžeme je sestavit do tzv. *matice pravděpodobností přechodu*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00}, & p_{01}, & p_{02}, & \dots \\ p_{10}, & p_{12}, & p_{12}, & \dots \\ p_{20}, & p_{21}, & p_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (p_{ij})_{i,j \in \mathsf{S}},$$

která je čtvercová s konečným nebo nekonečným počtem řádků podle toho, zda množina stavů $\mathsf{S}$ je konečná nebo nekonečná. Prvky této matice jsou nezáporná čísla a součet každého řádku je roven jedné (viz vztah (1.2)). Matici s touto vlastností nazýváme *stochastická matice.*

**Příklad 1.1** (*Ehrenfestův pokus*) [Dupač (1975), str. 63]. Nechť je $a$ molekul rozděleno do dvou nádob A, B. Molekuly jsou vzájemně rozlišitelné, můžeme je např. očíslovat $1, 2, \dots, a$. V každém kroku se náhodně zvolí se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{a}$ jedna molekula (ze všech molekul) a přemístí se do opačné nádoby. Stav systému bude počet molekul v nádobě A, tedy $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \dots, a\}$. Řekneme, že systém je v čase $n$ ve stavu $i$, je-li po $n$-tém přemístění (kroku) v nádobě A právě $i$ molekul.

Je-li v čase $n$ v nádobě A právě $i$ molekul, pak v čase $n+1$ bude v nádobě A s pravděpodobností $\frac{a-i}{a}$ právě $i+1$ molekul (je-li zvolená molekula z nádoby B) a s pravděpodobností $\frac{i}{a}$ právě $i-1$ molekul (je-li zvolená molekula z nádoby A). Tedy obecně

$$p_{01} = p_{a,a-1} = 1, \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{a}, \quad p_{i,i+1} = \frac{a-i}{a}, \quad i = 1, 2, \dots, a-1.$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{a-2}{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

○

**Příklad 1.2** V osudí máme celkem $m$ lístků, na každém lístku je napsáno jedno z přirozených čísel $1, 2, \dots, m$. Postupně vybíráme po jednom lístku z osudí, vždy si zapíšeme vybrané číslo, po každém výběru lístek do osudí vrátíme. Stavem systému bude nejvyšší tažené číslo, tj. $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots, m\}$. Jev $(X_n = j)$ nastane, je-li po $n$-tém výběru nejvyšší tažené číslo rovno číslu $j \in \mathsf{S}$, tj. systém je v čase $n$ ve stavu $j \in \mathsf{S}$, je-li nejvyšší číslo vybrané v $n$ tazích právě číslo $j$. Proto $p_{1j} = \frac{1}{m}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Ze stavu 2 není možný přechod do stavu 1, proto $p_{21} = 0$. Systém v dalším kroku setrvá ve stavu 2, je-li druhé tažené číslo buď 1 nebo 2, tj. $p_{22} = \frac{2}{m}$. Systém přejde ze stavu 2 do libovolného stavu $j > 2$ se stejnou pravděpodobností, tj. $p_{2j} = \frac{1}{m}$, $j = 3, 4, \dots, m$. Obecně

$$p_{ii} = \frac{i}{m}, \quad p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i > j, \\ \frac{1}{m}, & \text{pro } i < j. \end{cases}$$

Matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}, & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m}, & \dots & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m} \\ 0, & \frac{2}{m}, & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m}, & \dots & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m} \\ 0, & 0, & \frac{3}{m}, & \frac{1}{m}, & \dots & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m} \\ 0, & 0, & 0, & \frac{4}{m}, & \dots & \frac{1}{m}, & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots & \frac{m-1}{m}, & \frac{1}{m} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

○

K tomu, abychom mohli určit, s jakou pravděpodobností se homogenní Markovův řetězec nachází v určitém stavu v daném čase, musíme mít informaci o tom, ve kterém stavu řetězec začal. Je nutno znát tzv. *počáteční rozdělení*

$$p_i^{(0)} = P(X_0 = i), \quad i \in \mathsf{S}. \tag{1.3}$$

Protože náhodné jevy $\mathsf{A}_i = (X_0 = i)$, $i \in \mathsf{S}$, tvoří úplnou skupinu jevů (úplný systém jevů), platí pro počáteční rozdělení Markovova řetězce vztahy

$$0 \le p_i^{(0)} \le 1, \quad \sum_{i \in \mathsf{S}} p_i^{(0)} = 1. \tag{1.4}$$

Pro zjednodušení zápisů budeme počáteční pravděpodobnosti pokládat za složky řádkového vektoru

$$\mathbf{p}^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots).$$

Tento vektor je tzv. pravděpodobnostní vektor, protože součet všech jeho složek je roven jedné. Určuje rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny $X_0$, tj. pravděpodobnosti toho, v jakém stavu se systém nachází v okamžiku 0.

**Věta 1.1** *Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je náhodný proces s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, \ldots\}$. Nechť $\mathbf{p}^{(0)} = \{p_i^{(0)}, \ i \in \mathsf{S}\}$ je vektor splňující (1.4) a $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathsf{S}}$ je stochastická matice. Potom $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$, právě když pro všechny konečné posloupnosti $X_0, X_1, \ldots, X_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, platí*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) = p_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{k-1} i_k},$$

*pro všechna $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathsf{S}$ a všechna $k \in \mathbb{N}_0$.*

*Důkaz:* Není obtížný, užívá se v něm markovská vlastnost a věta o násobení pravděpodobností, kvůli délce učebního textu jej neuvádíme. Viz [Norris, str. 3; Prášková, str. 17]. □

**Příklad 1.3** (*Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami*) Uvažujme částici, která se náhodně pohybuje na reálné přímce po celočíselných bodech $\mathsf{S} = \{0, 1, \ldots, m\}$. V každém kroku se s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ přemístí o jednotku vpravo nebo s pravděpodobností $q = 1 - p$ o jednotku vlevo, jednotlivé kroky jsou vzájemně nezávislé. Dostane-li se částice do bodu 0 nebo do bodu $m$, již v tomto stavu zůstane (říkáme, že částice je ve stavu 0 nebo ve stavu $m$ pohlcená). Často se takto modeluje stav kapitálu určitého hazardního hráče, který při opakovaných partiích hry dvou hráčů má pravděpodobnost $p$, že v jedné hře na svém protivníkovi vyhraje určitou jednotkovou částku – a tedy pravděpodobnost $q = 1 - p$, že stejnou částku v jedné partii prohraje, nerozhodná hra je vyloučena. Celkový kapitál obou hráčů je roven částce $m$, počáteční kapitál sledovaného hráče je $s \in \mathsf{S}$. Jestliže hráč všechny své peníze prohraje nebo vyhraje-li všechny protivníkovy peníze, hra končí.

Určíme počáteční rozdělení a matici pravděpodobností přechodu. Množina stavů systému je $\mathsf{S} = \{0, 1, \dots, m\}$. Je-li systém v čase 0 ve stavu $s$ (hráč má na začátku kapitál $s$), je

$$p_s^{(0)} = 1, \quad p_i^{(0)} = 0, \quad \forall i \neq s, \ i \in \mathsf{S}.$$

Pravděpodobnosti přechodu jsou zřejmě

$$p_{00} = 1, \quad p_{mm} = 1, \quad p_{i,i-1} = 1 - p = q, \quad p_{i,i+1} = p, \ i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Matice pravděpodobností přechodu je tedy

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ q, & 0, & p, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & q, & 0, & p, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & q, & 0, & p \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme uvažovat také *náhodnou procházku s odrážejícími stěnami.* Předpokládejme, že mezi body 0 a 1 a mezi body $m-1$ a $m$ (např. v bodech $\frac{1}{2}$ a $m - \frac{1}{2}$) jsou tzv. odrážející stěny. Částice, která se bude z bodu 1 pohybovat vlevo, se opět vrátí do bodu 1 a částice, která se z bodu $m-1$ bude pohybovat vpravo, se vrátí zpět do bodu $m-1$. Množina stavů je potom $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots, m-1\}$. V interpretaci hry dvou hráčů to znamená, že po hře, ve které přišel hráč (nebo jeho soupeř) o všechen kapitál, dostane hráč (nebo jeho soupeř) od protihráče jednotkovou částku (např. jednu korunu, jeden dolar) a hra pokračuje dále, nikdy nekončí. ○

**Poznámka 1.2** Pohybuje-li se částice na přímce v celočíselných bodech $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ bez omezení (není pohlcena v žádném bodě), má matice pravděpodobností přechodu tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, & p, & q, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ q, & 0, & 0, & p, & 0, & 0, & \dots \\ p, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & \dots \\ 0, & q, & 0, & 0, & 0, & p, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Je-li počáteční rozdělení $p_s^{(0)} = 1, \ p_i^{(0)} = 0, \ \forall i \neq s, \ i \in \mathsf{S}$, je v čase 0 částice v bodě $s \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

**Definice 1.3** Je-li $m$ libovolné celé nezáporné číslo, nazýváme podmíněnou pravděpodobnost

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i), \ i, j \in \mathsf{S}, \tag{1.5}$$

*pravděpodobností přechodu Markovova řetězce ze stavu $i$ do stavu $j$ za $n$ kroků* (tzv. pravděpodobnost přechodu $n$-tého řádu).

Pro libovolné přirozené číslo $n$ a libovolná $i, j \in \mathsf{S}$ platí vztahy

$$0 \le p_{ij}^{(n)} \le 1, \qquad \sum_{j \in \mathsf{S}} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

První vztah plyne z vlastností pravděpodobnosti, druhý vztah dokážeme takto: označme $\mathsf{B} = (X_m = i)$, $i \in \mathsf{S}$, $m$ libovolné přirozené číslo, $\mathsf{A}_j = (X_{m+n} = j)$, $j \in \mathsf{S}$. Náhodné jevy $\mathsf{A}_j$, $j \in \mathsf{S}$, tvoří úplnou skupinu, a proto

$$P(X_m = i) = P(\mathsf{B}) = P(\mathsf{B} \cap (\cup_{j \in \mathsf{S}} \mathsf{A}_j)) = \sum_{j \in \mathsf{S}} P(\mathsf{B} \cap \mathsf{A}_j) = \sum_{j \in \mathsf{S}} P(X_m = i, X_{m+n} = j),$$

$$\sum_{j \in \mathsf{S}} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in \mathsf{S}} P(X_{m+n} = j | X_m = i) = \sum_{j \in \mathsf{S}} P(\mathsf{A}_j | \mathsf{B}) = \sum_{j \in \mathsf{S}} \frac{P(\mathsf{A}_j \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})} =$$
$$= \frac{1}{P(X_m = i)} \sum_{j \in \mathsf{S}} P(X_{m+n} = j, X_m = i) = 1.$$

Také pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků zapisujeme do stochastické matice, kterou označíme takto

$$\mathbf{P}_n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j \in \mathsf{S}}.$$

**Poznámka 1.3** Je zřejmé, že $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Je zvykem dodefinovat

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ je-li } & i = j, \\ 0, \text{ je-li } & i \ne j. \end{cases}$$

**Věta 1.2** *Pro libovolná nezáporná celá čísla $n$, $k$ a libovolné $i, j \in \mathsf{S}$ platí*

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{r \in \mathsf{S}} p_{ir}^{(n)} p_{rj}, \tag{1.6}$$

$$p_{ij}^{(n+k)} = \sum_{r \in \mathsf{S}} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(k)}. \tag{1.7}$$

*Důkaz:* a) Nechť $m$ je libovolné celé nezáporné číslo. Podle (1.5) platí

$$p_{ij}^{(n+1)} = P(X_{m+n+1} = j \mid X_m = i).$$

Označme pro daná $i$,$j$ náhodné jevy

$$\mathsf{A} = (X_{m+n+1} = j), \quad \mathsf{C} = (X_m = i), \quad \mathsf{A}_r = (X_{m+n} = r), \quad r \in \mathsf{S}.$$

Jevy $\mathsf{A}_r, r \in \mathsf{S}$, tvoří úplný systém, proto platí

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{C}) = \frac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{C})}{P(\mathsf{C})} = \frac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{C} \cap (\cup \mathsf{A}_r))}{P(\mathsf{C})} = \frac{\sum_{r \in \mathsf{S}} P(\mathsf{A} \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{A}_r)}{P(\mathsf{C})} =$$

$$= \sum_{r \in \mathsf{S}} \frac{P(\mathsf{A}_r \cap \mathsf{C})}{P(\mathsf{C})} \cdot \frac{P(\mathsf{A}_r \cap \mathsf{A} \cap \mathsf{C})}{P(\mathsf{A}_r \cap \mathsf{C})} = \sum_{r \in \mathsf{S}} P(\mathsf{A}_r|\mathsf{C}) P(\mathsf{A}|\mathsf{A}_r \cap \mathsf{C}).$$

Užijeme-li v tomto vztahu markovskou vlastnost a zavedená označení

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{C}) = p_{ij}^{(n+1)}, \quad P(\mathsf{A}_r|\mathsf{C}) = p_{ir}^{(n)},$$

$$\begin{aligned} P(\mathsf{A}|\mathsf{A}_r \cap \mathsf{C}) &= P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = r, X_m = i) = \\ &= P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = r) = p_{rj}, \end{aligned}$$

dostaneme vztah (1.6).

b) Vztah (1.7) dokážeme matematickou indukcí. Platnost tohoto tvrzení jsme dokázali pro $k = 1$ v první části důkazu. Předpokládejme, že vztah (1.7) platí pro libovolné, pevně zvolené přirozené číslo $k$ a všechna $n, i, j$. Potom ze vztahu (1.6) užitím $n \to n + k$ dostaneme

$$p_{ij}^{(n+k+1)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_{is}^{(n+k)} p_{sj},$$

odkud užitím indukčního předpokladu a opět vztahu (1.6)

$$p_{ij}^{(n+k+1)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} \left( \sum_{r \in \mathsf{S}} p_{ir}^{(n)} p_{rs}^{(k)} \right) p_{sj} = \sum_{r \in \mathsf{S}} p_{ir}^{(n)} \left( \sum_{s \in \mathsf{S}} p_{rs}^{(k)} p_{sj} \right) = \sum_{r \in \mathsf{S}} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(k+1)}.$$

□

**Poznámka 1.4** Pro libovolné přirozené číslo $n$ a pro libovolné přirozené číslo $r$, pro které $1 \leq r \leq n - 1$, platí

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_{is}^{(r)} p_{sj}^{(n-r)}. \tag{1.8}$$

Důkaz je obdobný důkazu tvrzení (1.6). Označme

$$\mathsf{A} = (X_{m+n} = j), \ \mathsf{C} = (X_m = i), \ \mathsf{A}_s = (X_{m+r} = s), \ s \in \mathsf{S}.$$

Užijeme-li následující rovnost (viz první část důkazu věty 1.2)

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{C}) = \sum_{s\in\mathsf{S}} P(\mathsf{A}_s|\mathsf{C})P(\mathsf{A}|\mathsf{A}_s \cap \mathsf{C}),$$

dostaneme pro libovolné celé nezáporné $m$ opět s užitím markovské vlastnosti

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j|X_m = i) =$$

$$= \sum_{s\in\mathsf{S}} P(X_{m+r} = s|X_m = i)P(X_{m+n} = j|X_{m+r} = s, X_m = i) =$$

$$= \sum_{s\in\mathsf{S}} P(X_{m+r} = s|X_m = i)P(X_{m+n} = j|X_{m+r} = s) = \sum_{s\in\mathsf{S}} p_{is}^{(r)} p_{sj}^{(n-r)}.$$

Vztahy (1.6), (1.7), (1.8) nazýváme *Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnosti.*

**Příklad 1.4** [Piatka, str. 142] Určitá oblast v rovině je rozdělena do 5 částí, které mají stejný plošný obsah. Do oblasti umisťujeme 5 bodů, postupně po jednom. Jejich umístění je náhodné, pravděpodobnost „zasáhnout“ každou z částí je stejná, rovna $\frac{1}{5}$. Řekneme, že systém je ve stavu $j$, je-li právě $j$ oblastí obsazených (je-li v každé z nich aspoň jeden bod). Počáteční rozdělení je zřejmě $p_0^{(0)} = 1$, $p_i^{(0)} = 0$, $\forall i \neq 0$, $i \in \mathsf{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete matici $\mathbf{P}$ pravděpodobností přechodu a pravděpodobnost toho, že se po rozmístění dvou nových bodů počet obsazených oblastí změní ze 3 na 4.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Druhým úkolem je určit pravděpodobnost přechodu za dva kroky ze stavu 3 do stavu 4. Podle (1.6)

$$p_{34}^{(2)} = \sum_{k=0}^{5} p_{3k}^{(1)} p_{k4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{25}.$$

○

**Věta 1.3** *Nechť $n \geq 2$ je libovolné přirozené číslo, $i,\ j \in \mathsf{S}$ libovolné stavy homogenního Markovského řetězce. Pro pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků platí*

$$\mathbf{P}_n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j \in \mathsf{S}} = \mathbf{P}^n,$$

*kde $\mathbf{P}^n$ je $n$-tá mocnina matice pravděpodobností přechodu za jeden krok.*

*Důkaz:* $\mathbf{P}_n$ je matice pravděpodobností přechodu za $n$ kroků. Vztah (1.8) lze zapsat pro $r = 1$ pomocí matic $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_n$ takto:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_{n-1}.$$

Postupným dosazováním dostaneme

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}_{n-2} = \mathbf{P}^3 \cdot \mathbf{P}_{n-3} = \ldots = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P}_{n-[n-1]} = \mathbf{P}^n. \qquad \square$$

Máme-li zadánu úlohu určit pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků, předem si rozmyslíme, který vzorec užijeme a která čísla budeme k výpočtu potřebovat. Uvidíme to na příkladech.

**Příklad 1.5** Vraťme se k příkladu 1.2. Máme určit pravděpodobnost toho, že po vybrání tří dalších lístků z osudí bude nejvyšší tažené číslo rovno 4 za předpokladu, že předtím bylo nejvyšším taženým číslem číslo 2, tj. máme určit pravděpodobnost $p_{24}^{(3)}$ přechodu za tři kroky ze stavu 2 do stavu 4. Pro výpočet můžeme užít dva vztahy

$$p_{24}^{(3)} = \sum_{k=0}^{m} p_{2k}^{(1)} p_{k4}^{(2)} = \sum_{k=0}^{m} p_{2k}^{(2)} p_{k4}^{(1)}.$$

Protože ve čtvrtém sloupci matice $\mathbf{P}$ jsou pouze čtyři nenulová čísla, je výhodnější zvolit druhý vzorec. Potom stačí určit ve druhém řádku matice $\mathbf{P}^2$ jen první čtyři čísla: $0, \frac{4}{m^2}, \frac{5}{m^2}, \frac{7}{m^2}$. Tedy

$$p_{24}^{(3)} = 0 \cdot \frac{1}{m} + \frac{4}{m^2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{5}{m^2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{7}{m^2} \cdot \frac{4}{m} = \frac{37}{m^3}.$$

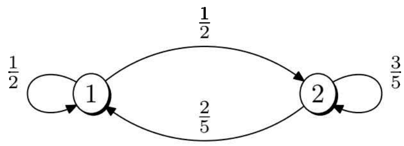
○

Je-li množina stavů $\mathsf{S}$ konečná, lze počítat prvky matice $\mathbf{P}^n$ podle Perronova vzorce – viz Dodatek, vztah (4.1).

**Příklad 1.6** [Unčovský, str. 30] Podnik dodává na trh výrobek, u kterého rozeznává dva stavy. Výrobek je úspěšný (stav 1), výrobek je neúspěšný (stav 2), úspěšnost na trhu sleduje v určitých, stále stejných, časových obdobích (např. týden, měsíc, rok) a posuzuje ji podle počtu prodaných kusů ve sledovaném období. Dosavadní průběh prodeje umožňuje odhadnout, že byl-li výrobek úspěšným v předcházejícím období, zůstal v 50 % úspěšným. Byl-li v předcházejícím období neúspěšným, zůstal neúspěšným v 60 %. V tomto případě $\mathsf{S} = \{1, 2\}$ a matice pravděpodobností přechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnosti přechodu mezi oběma stavy lze znázornit následujícím schématem:




Matici $\mathbf{P}^n$ vypočteme pomocí Perronova vzorce. Rovnice

$$\mathbf{P}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5}, & \lambda - \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{5} = 0,$$

má řešení $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{10}$. Tedy

$$\mathbf{B}(\lambda) = \operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{5}, & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}, & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4, 5 \\ 4, 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}, & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5, & 5 \\ 4, & -4 \end{pmatrix}.$$

$\psi_1(\lambda) = \lambda - \frac{1}{10}$, $\psi_2(\lambda) = \lambda - 1$, tj. $\psi_1(\lambda_1) = \frac{9}{10}$, $\psi_2(\lambda_2) = -\frac{9}{10}$. Proto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4, 5 \\ 4, 5 \end{pmatrix}\frac{1}{\frac{9}{10}} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5, & 5 \\ 4, & -4 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{\frac{9}{10}}\right) = \\ &= \frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 4, 5 \\ 4, 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} -5, & 5 \\ 4, & -4 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Tedy například

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{9}\left[4 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^n\right].$$

○

Někdy je možné určit pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků úvahou. Ukážeme si to na následujících příkladech.

**Příklad 1.7** Uvažujme posloupnost nezávislých hodů hrací kostkou. Označme $X_n$ maximální počet bodů dosažených do $n$-tého hodu včetně, pak je $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, \ldots, 6\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ 0, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ 0, 0, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ 0, 0, 0, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ 0, 0, 0, 0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnosti přechodu $n$-tého řádu lze určit takto: žádným hodem nelze přejít ze stavu vyššího do stavu nižšího, tj. $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro $i > j$. Jestliže jsme v některém hodu dosáhli maxima $j \in \mathsf{S}$ a má-li být systém po $n$ hodech opět ve stavu $j$, znamená to, že v každém z těchto $n$ nezávislých hodů může padnout nejvýš $j$ bodů, proto $p_{jj}^{(n)} = (\frac{j}{6})^n$. Náhodný jev „po $n$ hodech přejde systém ze stavu $i$ do stavu $j$, $i < j$“ lze vyjádřit jako rozdíl dvou jevů: jevu „v každém z $n$ nezávislých hodů padne nejvýš $j$ bodů“ a jevu „v každém z $n$ nezávislých hodů padne nejvýš $j-1$ bodů“. Proto

$$p_{ij}^{(n)} = \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n, \ i < j.$$

○

**Příklad 1.8** (*Série zdařilých pokusů*) [Dupač (1975), str. 64] Uvažujme posloupnost nezávislých bernoulliovských pokusů (pokusů, které mají dva výsledky: úspěch (zdar), nastávající s pravděpodobností $p \in (0,1)$, a neúspěch (nezdar), který nastává s pravděpodobností $q = 1 - p$). Řekneme, že v čase $n$ je systém ve stavu $k$, jestliže v $n$-tém pokuse dosáhla nepřetržitá série úspěchů délky $k$. Tedy v čase $n$ je systém ve stavu 0, jestliže $n$-tý pokus skončil neúspěchem; v čase $n$ je systém ve stavu $n$, jestliže každý z $n$ provedených pokusů byl úspěšný. V čase $n$ je systém ve stavu $k$, jestliže $(n-k)$-tý pokus skončil neúspěchem a všechny pokusy od $(n-k+1)$-tého až po $n$-tý pokus skončily úspěchem. Množina stavů je nekonečná $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Matice pravděpodobností přechodu za jeden krok:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q, p, 0, 0, 0, \ldots \\ q, 0, p, 0, 0, \ldots \\ q, 0, 0, p, 0, \ldots \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme pravděpodobnosti $p_{ij}^{(2)}$ přechodu za dva kroky. Ze stavu $j$ přejde systém za dva kroky do stavu 0, je-li druhý pokus neúspěšný (bez ohledu na výsledek prvního pokusu), tj. $p_{j0}^{(2)} = pq + qq = q$. Ze stavu $j$ do stavu 1 se systém za dva kroky dostane, je-li první pokus neúspěšný a druhý pokus úspěšný, tj. $p_{j1}^{(2)} = qp$. Ze stavu $j$ za 2 kroky je dále možný jen přechod do stavu $j+2$, jsou-li oba provedené pokusy úspěšné, tj. $p_{j,j+2}^{(2)} = p^2$. Tedy

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} q, & qp, & p^2, & 0, & 0, & \dots \\ q, & qp, & 0, & p^2, & 0, & \dots \\ q, & qp, & 0, & 0, & p^2, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Podobně uvažujeme dále. Ze stavu $j$ lze po 3 krocích přejít

- buď do stavu $j+3$, skončí-li všechny tři provedené pokusy úspěchem,
- nebo do stavu 0, skončí-li třetí pokus neúspěchem (bez ohledu na výsledky předcházejících dvou pokusů),
- nebo do stavu 1, skončí-li druhý pokus neúspěchem a třetí bude úspěšný,
- nebo do stavu 2, skončí-li první pokus neúspěchem a další dva budou úspěšné.

Tedy $p_{j,j+3}^{(3)} = p^3$, $p_{j0}^{(3)} = q$, $p_{j1}^{(3)} = qp$, $p_{j2}^{(3)} = qp^2$.

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} q, & qp, & qp^2, & p^3, & 0, & 0\dots \\ q, & qp, & qp^2, & 0, & p^3, & 0\dots \\ q, & qp, & qp^2, & 0, & 0, & p^3\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Obecně tedy

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} q, & qp, & qp^2, & \dots & qp^{n-1}, & p^n, & 0, & 0 & \dots \\ q, & qp, & qp^2, & \dots & qp^{n-1}, & 0, & p^n, & 0 & \dots \\ q, & qp, & qp^2, & \dots & qp^{n-1}, & 0, & 0, & p^n, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

○

**Definice 1.4** Nepodmíněné pravděpodobnosti $p_i^{(n)} = P(X_n = i), i \in \mathsf{S}$, $n \in \mathbb{N}_0$, toho, že systém je v čase $n$ ve stavu $i$, nazýváme *absolutní pravděpodobnosti* jednotlivých stavů v čase $n$.

Pro absolutní pravděpodobnosti platí

$$0 \le p_i^{(n)} \le 1, \quad \sum_{i \in \mathsf{S}} p_i^{(n)} = 1, \; i \in \mathsf{S},$$

neboť náhodné jevy $\mathsf{A}_i = (X_n = i)$, $i \in \mathsf{S}$, tvoří úplný systém pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Absolutní pravděpodobnosti zapisujeme pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ jako pravděpodobnostní vektor

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots).$$

(Všimněme si, že počáteční rozdělení zavedené vztahem (1.3) je speciálním případem $\mathbf{p}^{(n)}$ pro $n = 0$.)

**Věta 1.4** *Pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathsf{S}$ platí vztahy*

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_s^{(n)} p_{sj}, \tag{1.9}$$

$$p_j^{(n)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_s^{(0)} p_{sj}^{(n)}. \tag{1.10}$$

*Důkaz:* a) Dokážeme nejprve tvrzení (1.9). Označme $\mathsf{B} = (X_{n+1} = j)$, $j \in \mathsf{S}$, $\mathsf{A}_s = (X_n = s)$, $s \in \mathsf{S}$. Platí

$$p_j^{(n+1)} = P(X_{n+1} = j) = P(\mathsf{B}) = P(\mathsf{B} \cap (\cup \mathsf{A}_s)) = \sum_{s \in \mathsf{S}} P(\mathsf{B} \cap \mathsf{A}_s) =$$

$$= \sum_{s \in \mathsf{S}} P(\mathsf{A}_s) P(\mathsf{B}|\mathsf{A}_s) = \sum_{s \in \mathsf{S}} P(X_n = s) P(X_{n+1} = j | X_n = s) = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_s^{(n)} p_{sj},$$

protože jevy $\mathsf{A}_s$ tvoří úplný systém.

b) Tvrzení (1.10) se dokáže obdobně. Označme $\mathsf{C} = (X_n = j)$, $j \in \mathsf{S}$, $\mathsf{D}_s = (X_0 = s)$, $s \in \mathsf{S}$. Potom

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j) = P(\mathsf{C}) = P(\mathsf{C} \cap (\cup_{s \in \mathsf{S}} \mathsf{D}_s)) = \sum_{s \in \mathsf{S}} P(\mathsf{C} \cap \mathsf{D}_s) =$$

$$= \sum_{s \in \mathsf{S}} P(\mathsf{D}_s) P(\mathsf{C}|\mathsf{D}_s) = \sum_{s \in \mathsf{S}} P(X_0 = s) P(X_n = j | X_0 = s) = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_s^{(0)} p_{sj}^{(n)}.$$

□

**Poznámka 1.5** Z (1.10) je zřejmé, že známe-li počáteční pravděpodobnosti a pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků, umíme určit pravděpodobnosti absolutní. Tvrzení věty 1.4 lze zapsat maticově takto

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} \cdot \mathbf{P}, \qquad \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^n.$$

**Příklad 1.9** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2\}$, počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0)$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete absolutní pravděpodobnosti $\mathbf{p}^{(4)}$.

Řešení je možné dvěma postupy.

a) Užitím vzorce

$$p_j^{(4)} = \sum_{k=0}^{2} p_k^{(0)} p_{kj}^{(4)}.$$

S přihlédnutím k počátečnímu rozdělení je zřejmé, že stačí určit první řádek matice $\mathbf{P}^4$. Nejprve je nutno určit

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

První řádek matice $\mathbf{P}^4$ je roven vektoru $\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right)$ a to je současně také $\mathbf{p}^{(4)}$.

b) Můžeme počítat postupně

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{P} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{p}^{(4)} = \mathbf{p}^{(3)}\mathbf{P} = \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right).$$

○

**Příklad 1.10** Užijme data z příkladu 1.6 a předpokládejme, že $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0)$. V uvedeném příkladu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5; \ 0{,}5 \\ 0{,}4; \ 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti v čase 1 (po prvním sledovaném období)

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P} = (1, 0) \begin{pmatrix} 0{,}5; \ 0{,}5 \\ 0{,}4; \ 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}5; 0{,}5).$$

Přes úspěšnost na začátku jsou po prvním období úspěšnost a neúspěšnost výrobku stejně pravděpodobné. Obdobně vypočteme absolutní pravděpodobnosti v čase 2 (po druhém období)

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P} = (0{,}5; 0{,}5) \begin{pmatrix} 0{,}5; \ 0{,}5 \\ 0{,}4; \ 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}45; 0{,}55).$$

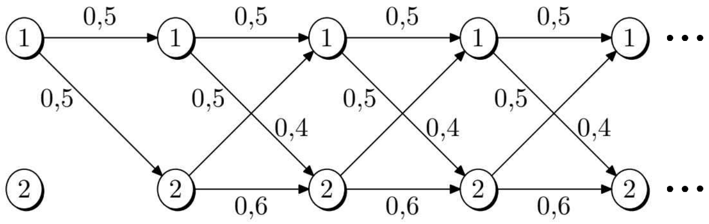
V tabulce jsou uvedeny absolutní pravděpodobnosti v dalších časech

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1^{(n)}$ | 1 | 0,5 | 0,45 | 0,445 | 0,4445 | 0,44445 |
| $p_2^{(n)}$ | 0 | 0,5 | 0,55 | 0,555 | 0,5555 | 0,55555 |

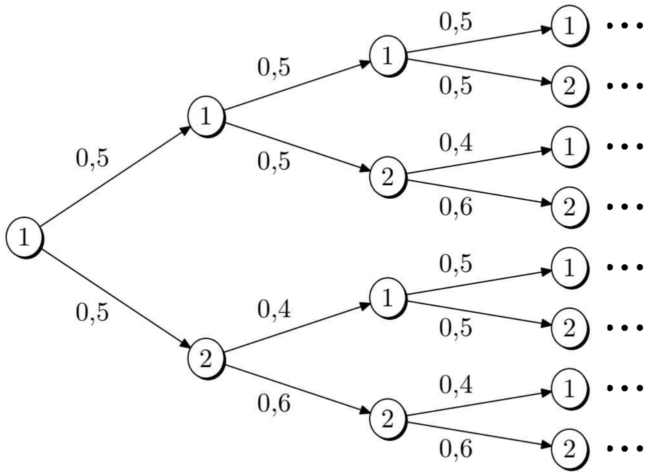
.

Přechody v homogenním Markovově řetězci s konečně mnoha stavy lze graficky znázornit tzv. *přechodovým diagramem* (viz [Maixner, str. 29]). Každý stav označíme kroužkem a vyneseme pro časové okamžiky $n = 0, 1, 2, \ldots$ Možné přechody mezi jednotlivými stavy v časových okamžicích po sobě následujících se znázorní spojnicemi s připsanými pravděpodobnostmi přechodu. Pro přechody, které mají nulovou pravděpodobnost se spojnice nevyznačuje. Graf lze kreslit buď (a) v tzv. nerozvinutém tvaru nebo (b) v tzv. rozvinutém tvaru. Tyto grafy lze kreslit, známe-li počáteční rozdělení.

a)




b)




Z grafů lze užitím tvrzení věty 1.1 sčítáním pravděpodobností možných „cest“ do příslušného stavu v daném časovém okamžiku ověřit absolutní pravděpodobnosti. Např. $p_1^{(2)} = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}45$.

Protože známe vzorec pro $\mathbf{P}^n$ (viz příklad 1.6), můžeme užitím vztahu

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^n$$

stanovit absolutní pravděpodobnosti obecně a určit jejich limity

$$\mathbf{p}^{(n)} = (1,0)\left\{\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 4, & 5 \\ 4, & 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} -5, & 5 \\ 4, & -4 \end{pmatrix}\right]\right\} = \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left[\frac{1}{10}\right]^n, \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\left[\frac{1}{10}\right]^n\right),$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} p_1^{(n)} = \frac{4}{9}, \qquad \lim_{n\to\infty} p_2^{(n)} = \frac{5}{9}. \qquad \circ$$

**Příklad 1.11** Vraťme se k příkladu náhodné procházky s pohlcujícími stěnami (příklad 1.3), který modeluje hru dvou hráčů. Hra končí, přijde-li jeden z hráčů o všechny peníze. Předpokládejme, že hráč A má na začátku hry se stejnou pravděpodobností jednu nebo dvě nebo tři koruny. Jaká je pravděpodobnost, že po dvou partiích bude mít tento hráč právě jednu korunu? Počáteční rozdělení je v tomto případě

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots, 0\right).$$

Pro výpočet absolutní pravděpodobnosti $p_1^{(2)} = \sum_{k=0}^{m} p_k^{(0)} p_{k1}^{(2)}$ stačí vzhledem k počátečním pravděpodobnostem určit pouze druhý sloupec matice $\mathbf{P}^2$ (řádky a sloupce matice $\mathbf{P}$ číslujeme od nuly). Dostaneme $(0, pq, 0, q^2, 0, \ldots, 0)'$. Tedy

$$p_1^{(2)} = \frac{1}{3}(pq + q^2) = \frac{1}{3}q(p+q) = \frac{1}{3}q.$$

Jiný postup: nejprve určíme vektor

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{3}q, \frac{1}{3}q, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}p, \frac{1}{3}p, 0, \ldots, 0\right),$$

potom

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{3}(q+q^2), \frac{1}{3}q, \frac{2}{3}pq, \frac{1}{3}(p+pq), \frac{1}{3}p^2, \frac{1}{3}p^2, 0, \ldots, 0\right).$$

Odtud $p_1^{(2)} = \frac{1}{3}q$. Můžeme zvážit, který postup je pro nás výhodnější. ∘

## 1.2 Klasifikace stavů řetězce

Abychom dokázali rozeznat, které Markovovy řetězce jsou vhodné pro další studium a případné aplikace, je nutno provést klasifikaci stavů řetězce. Jak uvidíte níže, stavy budeme klasifikovat podle různých hledisek, která se ovšem budou všechna více či méně týkat možnosti dosáhnout daný stav z jiných stavů (včetně jeho samého) nebo otázky možnosti návratu systému do uvedeného stavu. Posledně uvedenou otázku se pokusíme zodpovědět bezprostředně v dalším textu.

*Označení:* Pro charakterizaci doby návratu do určitého stavu, zaveďme následující označení. Symbolem $f_{ij}^{(n)}$ označme podmíněnou pravděpodobnost toho, že systém, který se v čase 0 nacházel ve stavu $i$ se dostane *poprvé* do stavu $j$ právě v $n$-tém kroku, tj.

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_r \neq j, 1 \leq r < n | X_0 = i),\ n > 1, \quad f_{ij}^{(1)} = p_{ij},\ i, j \in \mathsf{S}.$$

Definujeme $f_{ij}^{(0)} = 0$.

Pro další odvozování je účelné označit symbolem $f_{ij}$ pravděpodobnost toho, že systém, který byl v čase 0 ve stavu $i$ přejde (vůbec někdy) do stavu $j$, tj.

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

**Definice 1.5**

1. Stav $i \in \mathsf{S}$ nazýváme *trvalý* (rekurentní), jestliže $f_{ii} = 1$, tj. je-li systém v čase 0 ve stavu $i$, vrátí se (někdy) do tohoto stavu s pravděpodobností 1.
2. Je-li $f_{ii} < 1$, nazveme stav $i \in \mathsf{S}$ *přechodný* (transientní), tj. existuje kladná pravděpodobnost toho, že se systém do stavu $i$ již nikdy nevrátí.
3. Střední doba $\mu_i$ prvního návratu do stavu $i$ je rovna

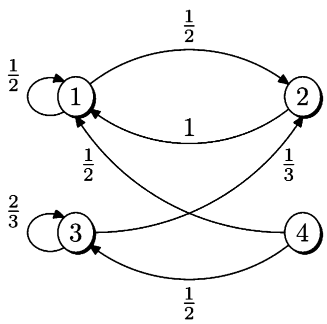
$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}. \tag{1.11}$$

4. *Trvalý stav* $i \in \mathsf{S}$ se nazývá *nenulový*, je-li $\mu_i < \infty$ (střední doba prvního návratu do stavu je konečná, řada (1.11) konverguje), *trvalý stav* $i$ se nazývá *nulový*, je-li $\mu_i = \infty$ (střední doba prvního návratu do stavu $i$ je nekonečná, řada (1.11) diverguje k $+\infty$).

**Příklad 1.12** [Kalas, str. 110] Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \end{pmatrix}.$$

Při rozhodování, které stavy jsou trvalé nebo přechodné, provedeme následující úvahy. Nakresleme si možné přechody mezi stavy.



Z nákresu je vidět, že vyjde-li systém ze stavu 4, již se do tohoto stavu nikdy nevrátí, tj. $f_{44}^{(n)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $f_{44} = 0$, tj. stav 4 je přechodný.

Vyjde-li systém ze stavu 1, (tj. $p_1^{(0)} = 1$, $p_j^{(0)} = 0$, $\forall j \neq 1$), může se *poprvé* do tohoto stavu vrátit pouze po jednom kroku nebo po dvou krocích, jiná možnost není. Proto

$$\begin{aligned}
f_{11}^{(1)} &= p_{11} = \tfrac{1}{2}, \\
f_{11}^{(2)} &= P(X_2 = 1, X_1 \neq 1 | X_0 = 1) = P(X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 1) = \\
&= p_1^{(0)} p_{12} p_{21} = \tfrac{1}{2}, \\
f_{11}^{(n)} &= 0, \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

Tedy $f_{11} = 1$, stav 1 je trvalý.

Je-li systém v čase 0 ve stavu 2 ($p_2^{(0)} = 1$, $p_j^{(0)} = 0$, $\forall j \neq 2$), je

$$\begin{aligned}
f_{22}^{(1)} &= p_{22} = 0, \\
f_{22}^{(2)} &= P(X_2 = 2, X_1 \neq 2 | X_0 = 2) = P(X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 2) = \\
&= p_2^{(0)} p_{21} p_{12} = \tfrac{1}{2}, \\
f_{22}^{(3)} &= P(X_3 = 2, X_1 \neq 2, X_2 \neq 2 | X_0 = 2) = \\
&= P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 2) = p_2^{(0)} p_{21} p_{11} p_{12} = (\tfrac{1}{2})^2.
\end{aligned}$$

Obdobně první návrat do stavu 2 za čtyři kroky je možný pouze po „trase“

$$2 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2,$$

a tedy $f_{22}^{(4)} = (\frac{1}{2})^3$. Proto

$$f_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1,$$

stav 2 je tedy trvalý.

Konečně vyjde-li systém ze stavu 3, (je-li $p_3^{(0)} = 1$, $p_j^{(0)} = 0$, $\forall j \neq 3$), může přejít pouze do stavu 2 nebo do stavu 3. Dostane-li se systém do stavu 2, nikdy se do stavu 3 nevrátí. Je tedy možný první návrat do stavu 3 pouze za jeden krok, tj.

$$\begin{aligned}
f_{33}^{(1)} &= p_{33} = \tfrac{2}{3}, \\
f_{33}^{(n)} &= 0, \forall n > 1.
\end{aligned}$$

Protože

$$f_{33} = f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3} < 1,$$

je stav 3 přechodný. ○

V příkladu jsme určili pravděpodobnost $f_{ii}^{(n)}$ úvahou. Obecně je obtížné tuto pravděpodobnost určit pro každé $n$, a tedy vypočítat pravděpodobnost $f_{ii}$, abychom mohli rozhodnout, zda je stav $i$ trvalý nebo přechodný. V dalším textu uvidíme, že ke stanovení toho, zda je stav trvalý nebo přechodný postačí znalost pravděpodobností $p_{ii}^{(n)}$ přechodu za $n$ kroků. Dříve než vyslovíme příslušnou větu, formulujeme některá pomocná tvrzení.

**Věta 1.5** *Jsou-li $p_{ij}^{(n)}$ pravděpodobnosti přechodu $n$-tého řádu (za $n$ kroků), platí*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \quad n \geq 1. \tag{1.12}$$

*Důkaz:*

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j | X_0 = i) \times \\
&\times P(X_n = j | X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.
\end{aligned}$$

Při úpravách byla užita rovnost $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B} | \mathsf{C}) = P(\mathsf{B} | \mathsf{C}) P(\mathsf{A} | \mathsf{B} \cap \mathsf{C})$ a markovská vlastnost. □

**Věta 1.6** *Stav $i \in \mathsf{S}$ je přechodný tehdy a jen tehdy, když*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty. \tag{1.13}$$

*Důkaz:* Podle vztahu z věty 1.5 platí

$$\sum_{n=1}^{m} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{m-1} p_{jj}^{(k)} \sum_{r=0}^{m-1-k} f_{ij}^{(r+1)}.$$

Ve druhé rovnosti se jedná o změnu pořadí sčítání v konečném součtu. Rozepišme si to pro větší názornost:

$$
\begin{aligned}
& f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(0)} \\
& + f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(0)} \\
& + f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(3)} p_{jj}^{(0)} \\
& + f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(3)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(3)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(4)} p_{jj}^{(0)} \\
& + \ldots\ldots \\
& + f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(m-2)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(m-3)} + f_{ij}^{(3)} p_{jj}^{(m-4)} + f_{ij}^{(4)} p_{jj}^{(m-5)} + \ldots + f_{ij}^{(m-1)} p_{jj}^{(0)} \\
& + f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(m-1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(m-2)} + f_{ij}^{(3)} p_{jj}^{(m-3)} + f_{ij}^{(4)} p_{jj}^{(m-4)} + \ldots + f_{ij}^{(m-1)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& = p_{jj}^{(0)} \left[ f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \ldots + f_{ij}^{(m-1)} + f_{ij}^{(m)} \right] \\
& + p_{jj}^{(1)} \left[ f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \ldots + f_{ij}^{(m-2)} + f_{ij}^{(m-1)} \right] \\
& + p_{jj}^{(2)} \left[ f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \ldots + f_{ij}^{(m-3)} + f_{ij}^{(m-2)} \right] \\
& + \ldots\ldots \\
& + p_{jj}^{(m-2)} \left[ f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} \right] \\
& + p_{jj}^{(m-1)} f_{ij}^{(1)}
\end{aligned}
$$

V další části důkazu užijeme Abelovu větu (viz Dodatek, věta 4.1). Vezmeme

$$a_n = p_{jj}^{(n)}, \quad b_{n-k} = \sum_{r=0}^{n-1-k} f_{ij}^{(r+1)},$$

předpoklady Abelovy věty jsou splněny. Tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}} &= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{m} p_{jj}^{(n)}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}}{\sum_{n=0}^{m} p_{jj}^{(n)}} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} p_{jj}^{(k)} \sum_{r=0}^{m-1-k} f_{ij}^{(r+1)}}{\sum_{n=0}^{m} p_{jj}^{(n)}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{r=0}^{m-1} f_{ij}^{(r+1)} = f_{ij}.
\end{aligned}
$$

Je-li stav $i$ přechodný, dostaneme pro $i = j$ z tohoto vztahu

$$f_{ii} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}} < 1,$$

tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ konverguje.

Jestliže naopak řada $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ konverguje, platí

$$f_{ii} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}} < 1,$$

stav $i$ je tedy přechodný. □

**Věta 1.7** *Stav $i \in \mathsf{S}$ je trvalý právě tehdy, když*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty. \tag{1.14}$$

*Důkaz:* Tvrzení plyne z předchozí věty a jejího důkazu. □

**Poznámka 1.6** Věty 1.6, 1.7 umožňují rozhodnout o tom, zda je stav $i \in \mathsf{S}$ trvalý nebo přechodný pouze na základě pravděpodobností $p_{ii}^{(n)}$ přechodu $n$-tého řádu. To je v řadě případů výhodné.

**Příklad 1.13** Vraťme se k příkladu 1.7, kdy $X_n$ byl maximální počet bodů dosažených v $n$ hodech hrací kostkou. Tam jsme zjistili, že $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{6}\right)^n$, $i \in \mathsf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{6}\right)^n < \infty, \ \forall i < 6, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_{66}^{(n)} = \infty,$$

stavy 1, 2, 3, 4, 5 jsou přechodné, stav 6 je trvalý. ○

**Příklad 1.14** (*Náhodná procházka na přímce*) [Prášková, str. 28; Norris, str. 29] Uvažujme při náhodné procházce situaci, kdy se částice pohybuje po všech celočíselných bodech reálné osy a pravděpodobnosti přechodů o jednotku vlevo a o jednotku vpravo jsou stejné, tj. $\mathsf{S} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$. Pravděpodobnosti přechodu ze stavu $i$ do stavu $i$ po $n$ krocích jsou

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, & n = 2k, \ k = 0, 1, \dots \\ 0 & n = 2k+1, \ k = 0, 1, \dots \end{cases}.$$

Použije-li se Stirlingův vzorec pro určení faktoriálu

$$k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}, \quad k \to \infty,$$

(symbol $a_n \sim b_n$ značí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$), dostaneme pro každé $i \in \mathsf{S}$ a každé $k > 0$

$$p_{ii}^{(2k)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}, \quad k \to \infty.$$

Potom existuje $N$ takové, že

$$\sum_{k=N}^{\infty} p_{ii}^{(2k)} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty, \quad \forall i \in \mathsf{S},$$

tedy všechny stavy jsou trvalé.

V obecném případě, kdy s pravděpodobností $p$ přejde částice o jednotku vpravo a s pravděpodobností $q$ přejde o jednotku vlevo, $p \neq q$,

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2k}{k} p^k q^k, & n = 2k,\ k = 0, 1, \ldots \\ 0 & n = 2k+1,\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}.$$

Opět užitím Stirlingova vzorce dostaneme

$$p_{ii}^{(2k)} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}(pq)^k \sim \frac{(4pq)^k}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2}}}, \qquad k \to \infty.$$

V případě $p \neq q$ je $4pq = r < 1$, a tedy existuje $N$ tak, že pro všechna $i \in \mathsf{S}$

$$\sum_{k=N}^{\infty} p_{ii}^{(2k)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=N}^{\infty} r^k < \infty,$$

tj. všechny stavy jsou přechodné. Intuitivně je zřejmé, že částice, která začne náhodnou procházku v bodě 0, bude směřovat k $+\infty$ v případě, že $p > q$, a k $-\infty$ v případě, že $p < q$. ○

**Poznámka 1.7** V literatuře je dokázáno (např. [Karlin, s. 65; Prášková, s. 31]), že je-li stav $i$ trvalý, vrátí se do něj systém s pravděpodobností 1 nekonečně mnohokrát (systém tímto stavem prochází nekonečně mnohokrát). Je-li stav $i$ přechodný, je počet návratů systému do tohoto stavu s pravděpodobností 1 konečný (systém tímto stavem prochází konečně mnohokrát).

**Věta 1.8** *Nechť $j$ je přechodný stav Markovova řetězce. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i \in \mathsf{S}.$$

*Důkaz:* [Prášková, s. 32] □

**Věta 1.9** *V řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné.*

*Důkaz:* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že všechny stavy řetězce s konečně mnoha stavy jsou přechodné. Potom podle předcházející věty

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall i, j \in \mathsf{S}.$$

Odtud (součty jsou konečné)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j\in\mathsf{S}} p_{ij}^{(n)}\right) = \sum_{j\in\mathsf{S}}(\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}) = 0, \quad \forall i \in \mathsf{S}.$$

To je spor, protože matice $\mathbf{P}^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in \mathsf{S}}$ je stochastická, a tedy $\forall n \geq 1$ je $\sum_{j\in\mathsf{S}} p_{ij}^{(n)} = 1$. $\square$

**Příklad 1.15** [Prášková, s. 41] V řetězci s nekonečně mnoha stavy mohou být všechny stavy přechodné. Uvažujme řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots\}$, s počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{i,i+1} = 1$, $\forall i \in \mathsf{S}$. Potom $p_{ii}^{(n)} = 0$, $\forall i \in \mathsf{S}$, $\forall n \geq 1$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ $\forall i \in \mathsf{S}$. Všechny stavy jsou přechodné. $\circ$

**Věta 1.10** *a) Nechť $j$ je trvalý nulový stav, potom $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall i \in \mathsf{S}$.*
*b) Trvalý stav $j$ je nulový právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.*

*Důkaz:* Uvedené vlastnosti jsou dokázány v [Prášková, s. 33] a [Prášková, s. 35]. $\square$

**Příklad 1.16** Vraťme se k příkladu 1.6. Tam jsme vypočetli, že

$$p_{11}^{(n)} = \frac{4}{9} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{5}{9}, \quad p_{22}^{(n)} = \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{4}{9}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{22}^{(n)} = \infty,$$

tj. stavy 1, 2 jsou trvalé. Protože

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{4}{9}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{22}^{(n)} = \frac{5}{9},$$

jsou oba stavy trvalé nenulové. $\circ$

**Příklad 1.17** V příkladu 1.8 (série zdařilých pokusů) jsme úvahou získali matici $\mathbf{P}^n$ pravděpodobností přechodu za $n$ kroků. Pro diagonální prvky této matice platí

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} qp^i, & i < n, \\ 0, & i \geq n \end{cases}.$$

Tedy $\forall i \in \mathsf{S}$ jsou čísla $p_{ii}^{(n)}$ pro $n > i$ konstantní a rovna $qp^i$. Proto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = 1 + \lim_{N\to\infty} (N - i)qp^i = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = qp^i > 0.$$

Všechny stavy jsou trvalé, nenulové. $\circ$

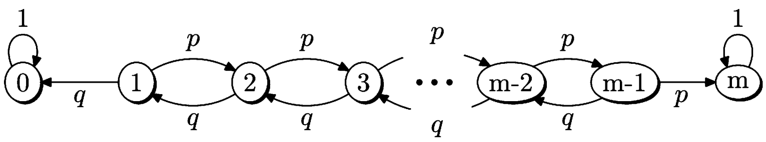
**Definice 1.6** Uvažujme stav $i \in \mathsf{S}$. Označme symbolem $d_i$ největší společný dělitel těch čísel $n \geq 1$, pro která je $p_{ii}^{(n)} > 0$. Je-li $d_i > 1$, řekneme, že stav $i$ *je periodický s periodou* $d_i$. Je-li $d_i = 1$, řekneme, že stav $i$ *je neperiodický*.

**Poznámka 1.8** 1. Z definice je zřejmé, že stav $i$ je periodický s periodou $d_i$, je-li návrat do tohoto stavu možný jen za počet kroků, které se rovnají násobku čísla $d_i$, tj. $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro všechna přirozená čísla $n$, která nejsou dělitelná číslem $d_i$ ($d_i$ je největší celé kladné číslo s touto vlastností).

2. Je-li $p_{ii} = p_{ii}^{(1)} > 0$, je stav $i$ neperiodický. Tato podmínka ale není nutná, jak ukazuje příklad 1.20. Stav $i$ může být neperiodický také, je-li $p_{ii}^{(1)} = 0$.

**Příklad 1.18** V příkladu 1.7 jsme uvažovali posloupnost hodů hrací kostkou. Stavem Markovova řetězce v čase $n$ byl maximální počet bodů dosažených do $n$-tého hodu včetně. Protože diagonální prvky matice $\mathbf{P}$ jsou kladné, jsou všechny stavy neperiodické. ○

**Příklad 1.19** Situaci popsanou v příkladu 1.3 (náhodná procházka s pohlcujícími stěnami) lze znázornit graficky takto:




Stavy $1, 2, \ldots, m-1$ jsou periodické se stejnou periodou $d = 2$. ○

**Příklad 1.20** Nechť Markovův řetězec má následující matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme nejprve $n$-tou mocninu matice $\mathbf{P}$ pomocí Perronova vzorce. Charakteristická matice je tvaru

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \lambda, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$. Adjungovaná matice k matici charakteristické je

$$\mathbf{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}, & \lambda^2 - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}, & \lambda^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\mathbf{B}(\lambda_1) = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}(\lambda_2) = \mathbf{B}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Derivujeme-li matici $\mathbf{B}(\lambda)$ po prvcích, dostamene

$$\mathbf{B}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 2\lambda, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Proto

$$\mathbf{B}'(\lambda_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4, & 1, & 1 \\ 1, & 4, & 1 \\ 1, & 1, & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}'(\lambda_2) = \mathbf{B}'(\lambda_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2, & 1, & 1 \\ 1, & -2, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \psi_2(\lambda) &= \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^2} = \lambda - 1, \\ \psi_1(\lambda_1) &= \frac{9}{4}, \\ \psi_2(\lambda_2) &= -\frac{3}{2}, \\ \psi_2'(\lambda_2) &= 1. \end{aligned}$$

Podle vztahu (1) z Dodatku

$$\mathbf{P}^n = \frac{(\lambda_1)^n \mathbf{B}(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)} + \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{\lambda^n \mathbf{B}(\lambda)}{\psi_2(\lambda)}\right\}_{\lambda=\lambda_2}.$$

Derivaci ve druhém sčítanci určíme takto (derivujeme formálně jako zlomek)

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{\lambda^n\mathbf{B}(\lambda)}{\psi_2(\lambda)}\right\}_{\lambda=\lambda_2} =$$

$$= \frac{\psi_2(\lambda_2)\left[n(\lambda_2)^{n-1}\mathbf{B}(\lambda_2)+(\lambda_2)^n\mathbf{B}'(\lambda_2)\right]-(\lambda_2)^n\mathbf{B}(\lambda_2)\psi_2{}'(\lambda_2)}{[\psi_2(\lambda_2)]^2} =$$

$$= \frac{(-\frac{3}{2})\left[n(-\frac{1}{2})^{n-1}\mathbf{O}+(-\frac{1}{2})^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2, & 1, & 1\\ 1, & -2, & 1\\ 1, & 1, & -2\end{pmatrix}\right]-(-\frac{1}{2})^n\mathbf{O}}{(-\frac{3}{2})^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}-2, & 1, & 1\\ 1, & -2, & 1\\ 1, & 1, & -2\end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}-2, & 1, & 1\\ 1, & -2, & 1\\ 1, & 1, & -2\end{pmatrix}.$$

Odtud

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = p_{22}^{(n)} = p_{33}^{(n)}, \quad p_{ii}^{(1)}=0, \quad p_{ii}^{(n)}>0, \quad i=1,2,3,\ \forall n\geq 2.$$

Je zřejmé, že všechny tři stavy jsou neperiodické. ○

**Věta 1.11** *Nechť je stav $j \in \mathsf{S}$ trvalý, nenulový, neperiodický. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j},$$

*kde $\mu_j$ je střední doba prvního návratu do stavu $j$.*

*Důkaz:* Označme $c_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{jj}^{(k)}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Stav $j$ je trvalý, tj.

$$1 = f_{jj} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = c_0.$$

Protože $c_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)}$, je $\lim_{n\to\infty} c_n = 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} = 0$. Podle předpokladu je stav $j$ trvalý nenulový, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1\cdot f_{jj}^{(1)} + 2\cdot f_{jj}^{(2)} + 3\cdot f_{jj}^{(3)} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} = \mu_j < \infty.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\sum_{r=0}^{n} c_r} = 0. \tag{1.15}$$

Dále podle věty 1.5

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} f_{jj}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} = \sum_{r=1}^{n} f_{jj}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)}.$$

Protože je $c_r - c_{r-1} = -f_{jj}^{(r)},\ c_0 = 1$, dostaneme

$$p_{jj}^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n}(c_r - c_{r-1})p_{jj}^{(n-r)} \Rightarrow 1 \cdot p_{jj}^{(n)} + \sum_{r=1}^{n} c_r p_{jj}^{(n-r)} = \sum_{r=1}^{n} c_{r-1} p_{jj}^{(n-r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{n} c_r p_{jj}^{(n-r)} = \sum_{r=0}^{n-1} c_r p_{jj}^{(n-1-r)}.$$

Postupným užitím této rovnosti dostaneme pro každé $n$

$$\sum_{r=0}^{n} c_r p_{jj}^{(n-r)} = \cdots = \sum_{r=0}^{(n-[n-2])} c_r p_{jj}^{(n-[n-2]-r)} = c_0 p_{jj}^{(1)} + c_1 p_{jj}^{(0)} = c_0 p_{jj}^{(0)} = 1. \tag{1.16}$$

Užitím Abelovy věty pro posloupnosti (Dodatek, věta 4.1) $\{c_n\}$ a $\{b_n = p_{jj}^{(n)}\}$ dostaneme vzhledem k (1.15), (1.16)

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} c_k p_{jj}^{(n-k)}}{\sum_{k=0}^{n} c_k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k} = \frac{1}{\mu_j}.$$

□

*Důsledek:* Je-li $j \in \mathsf{S}$ stav trvalý, nenulový, neperiodický, dostaneme užitím implikace

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a,$$

z tvrzení předchozí věty vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j},$$

kde $\mu_j$ je střední doba prvního návratu do stavu $j$.

**Věta 1.12** *Nechť $i$ je stav trvalý, nenulový, periodický s periodou $d_i$. Potom*

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)} = \frac{d_i}{\mu_i}.$$

*Důkaz:* [Prášková, s. 33] □

**Příklad 1.21** Uvažujme Markovův řetězec se stavy $\mathsf{S} = \{1, 2, 3\}$ a maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 0, 0 \\ 1, 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Klasifikujme stavy řetězce!
Výpočtem dostaneme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 0, 0 \\ 1, 0, 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}.$$

Tedy

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^3 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2, \quad \mathbf{P}^5 = \mathbf{P}^4 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}, \ldots$$

$$p_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1, \ n = 2k \\ 0, \ n = 2k+1 \end{cases}, \quad p_{22}^{(n)} = p_{33}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \ n = 2k \\ 0, \ n = 2k+1 \end{cases}$$

Z toho je zřejmé, že všechny stavy řetězce jsou periodické s periodou $d = 2$. Protože

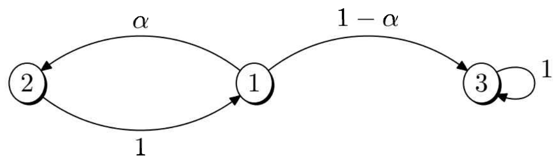
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty, \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad \lim_{n \to \infty} p_{11}^{(2n)} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} p_{22}^{(2n)} = \lim_{n \to \infty} p_{33}^{(2n)} = \frac{1}{2},$$

jsou všechny stavy trvalé, nenulové. Podle předchozí věty proto pro střední doby návratu platí

$$\mu_1 = \frac{d}{\lim\limits_{n \to \infty} p_{11}^{(2n)}} = 2, \qquad \mu_2 = \mu_3 = \frac{d}{\lim\limits_{n \to \infty} p_{22}^{(2n)}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

○

**Příklad 1.22** [Maixner, s. 41] Někdy lze zadat Markovův řetězec pomocí geometrického schématu. Např. pro $0 < \alpha < 1$




Co lze říci o stavech tohoto řetězce? Stavy 1,2 jsou periodické s periodou 2, stav 3 je trvalý, nenulový, neperiodický. Informaci obsaženou ve schématu můžeme zapsat takto: $\mathsf{S} = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Užitím věty 1.2 dostaneme $p_{ii}^{(1)} = 0$, $p_{ii}^{(2)} = \alpha$, $p_{ii}^{(3)} = 0$, $p_{ii}^{(4)} = \alpha^2, \ldots, i = 1, 2$. Tedy

$$p_{11}^{(2k)} = p_{22}^{(2k)} = \alpha^k, \quad p_{11}^{(2k+1)} = p_{22}^{(2k+1)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(2k)} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} < \infty, \quad i = 1, 2,$$

stavy $1, 2$ jsou přechodné. ∘

## 1.3 Rozklad množiny stavů

V úvodu předchozí kapitoly jsme se zmínili o nutnosti klasifikovat stavy Markovova řetězce. Nyní si ukážeme, že klasifikace stavů umožní rozdělit Markovovy řetězce na dvě skupiny podle toho, zda se vždy dokážeme z každého stavu řetězce dostat dříve či později do libovolného zvoleného stavu, jinak řečeno, na řetězce *nerozložitelné* (s uvedenou vlastností) a na *rozložitelné*. Jak uvidíte dále, nerozložitelné Markovovy řetězce hrají v aplikacích nezastupitelnou úlohu.

**Definice 1.7** Řekneme, že *stav* $j \in \mathsf{S}$ *je dosažitelný ze stavu* $i \in \mathsf{S}$, existuje-li číslo $n \geq 0$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Stavy vzájemně dosažitelné nazýváme *sousledné*. Platí-li pro stav $i \in \mathsf{S}$ rovnost $p_{ii} = 1$, nazývá se stav $i$ *pohlcující (absorpční)*.

**Poznámka 1.9** 1. Uvědomíme-li si, jak byla zavedena pravděpodobnost $p_{ij}^{(0)}$ (pravděpodobnost přechodu za 0 kroků), říká tato definice, že každý stav je dosažitelný ze sebe sama.

2. Stav $j$ je dosažitelný ze stavu $i$ právě tehdy, platí-li

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0, \quad \text{pro nějaké stavy } i_1, \ldots, i_{n-1} \in \mathsf{S}.$$

To je zřejmé ze vztahu

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in \mathsf{S}} \cdots \sum_{i_{n-1} \in \mathsf{S}} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}.$$

3. Souslednost stavů splňuje podmínky relace ekvivalence na množině $\mathsf{S}$. Lze zavést takzvané *uzavřené množiny stavů* (definici uvedeme dále v textu).

**Věta 1.13** *Nechť $i, j, k \in \mathsf{S}$. Je-li stav $j$ dosažitelný ze stavu $i$ a stav $k$ dosažitelný ze stavu $j$, je stav $k$ dosažitelný ze stavu $i$.*

*Důkaz:* Podle definice 1.7 existují taková čísla $n, m \in \mathbb{N}_0$, pro něž platí $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{jk}^{(m)} > 0$. Protože podle (1.7)

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{s \in \mathsf{S}} p_{is}^{(n)} p_{sk}^{(m)} = p_{i1}^{(n)} p_{1k}^{(m)} + p_{i2}^{(n)} p_{2k}^{(m)} + \cdots + p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} + \cdots > 0,$$

je stav $k$ dosažitelný ze stavu $i$. $\square$

**Definice 1.8** Neprázdná množina $\mathsf{C} \subset \mathsf{S}$ se nazývá *uzavřená*, jestliže žádný stav vně $\mathsf{C}$ není dosažitelný z žádného stavu uvnitř $\mathsf{C}$, tj.

$$p_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i \in \mathsf{C},\ \forall j \notin \mathsf{C},\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Nejmenší uzavřená množina obsahující množinu $\mathsf{C}$ se nazývá *uzávěr množiny* $\mathsf{C}$.

**Věta 1.14** *Množina stavů* $\mathsf{C}$ *je uzavřená právě tehdy, když platí*

$$p_{ij} = 0, \quad \forall i \in \mathsf{C},\ \forall j \notin \mathsf{C}.$$

*Důkaz:* a) Nechť je $\mathsf{C}$ uzavřená množina. Z její definice plyne, že $\forall i \in \mathsf{C}$, $\forall j \notin \mathsf{C}$ je $p_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, a tedy i pro $n = 1$.

b) Nechť $p_{ij} = 0$, $\forall i \in \mathsf{C}$, $\forall j \notin \mathsf{C}$. Indukcí ukážeme, že $p_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$.

Pro $n = 1$ vyplývá tato rovnost z předpokladu. Nechť pro nějaké přirozené $n \geq 1$ platí $p_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall i \in \mathsf{C}$, $\forall j \notin \mathsf{C}$. Podle Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnosti platí

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathsf{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Je-li $k \in \mathsf{C}$, potom $p_{kj} = 0$, protože $\mathsf{C}$ je uzavřená. Jestliže $k \notin \mathsf{C}$, potom podle indukčního předpokladu $p_{ik}^{(n)} = 0$, tedy $p_{ij}^{(n+1)} = 0$, $\forall i \in \mathsf{C}$, $\forall j \notin \mathsf{C}$. $\square$

**Poznámka 1.10** 1. Z této věty vyplývá, že jednoprvková množina $\mathsf{C} = \{i\}$ je uzavřená právě tehdy, je-li stav $i$ absorpční (pohlcující).

2. Vynecháme-li v matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ řádky a sloupce odpovídající stavům vně uzavřené množiny $\mathsf{C}$, dostaneme opět stochastickou matici. Množina $\mathsf{C}$ je množinou stavů Markovova řetězce, kterému se říká *podřetězec* původního řetězce [Prášková, s. 36].

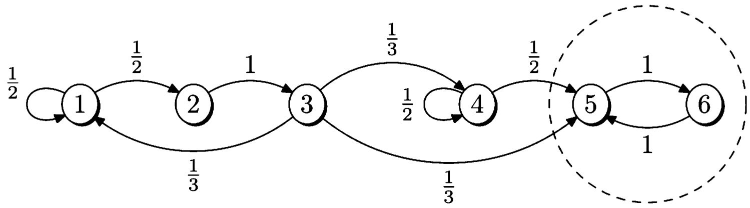
**Příklad 1.23** V příkladu s náhodnou procházkou s pohlcujícími stěnami jsou ze stavů $1, 2, \ldots, m-1$ dosažitelné všechny stavy v $\mathsf{S}$, ze stavu 0 je dosažitelný pouze stav 0, obdobně ze stavu $m$ je dosažitelný pouze stav $m$. Stavy $0, m$ jsou pohlcující (absorpční). To je zřejmé z nákresu v příkladu 1.19. V množině $\mathsf{S}$ existují dvě uzavřené množiny $\mathsf{C}_1 = \{0\}$, $\mathsf{C}_2 = \{m\}$. Množina $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ není uzavřená, protože např. ze stavu $m-1$ je dosažitelný stav $m$. $\circ$

V řadě příkladů lze odhalit strukturu množiny stavů Markovova řetězce tím, že si nakreslíme diagram dosažitelných resp. sousledných stavů.

**Příklad 1.24** [Norris, s. 11] Určete uzavřené množiny v množině $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Markovova řetězce s následující maticí $\mathbf{P}$ pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakreslíme-li si schéma možných přechodů mezi stavy, je zřejmé, že v $\mathsf{S}$ existuje jediná uzavřená množina $\mathsf{C} = \{5, 6\}$.




○

**Definice 1.9** Markovův řetězec se nazývá *nerozložitelný*, jestliže v něm neexistuje jiná uzavřená množina stavů než množina $\mathsf{S}$ všech stavů. V opačném případě je řetězec *rozložitelný.*

**Věta 1.15** *Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice pravděpodobností přechodu (po případném přečíslení stavů) tvar*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1, & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}, & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

*kde* $\mathbf{P}_1, \mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice.*

*Důkaz:* [Prášková, s. 37] a) Nechť $\mathbf{P}$ je tvaru (1.17), kde $\mathbf{P}_1, \mathbf{B}$ jsou čtvercové matice. Potom je $\mathbf{P}_1$ uzavřená množina, a tedy řetězec je rozložitelný.

b) Nechť je řetězec rozložitelný, potom obsahuje uzavřenou podmnožinu stavů. Stavy řetězce přečíslíme tak, aby nejnižší pořadová čísla patřila stavům z uvažované uzavřené množiny. Přerovnáme-li odpovídajícím způsobem řádky a sloupce matice $\mathbf{P}$, dostaneme matici, která má tvar (1.17). $\square$

**Věta 1.16** *Nechť $i \in \mathsf{S}$ je libovolný stav Markovova řetězce. Množina $\mathsf{C}_i$ všech stavů dosažitelných ze stavu $i$, tj.*

$$\mathsf{C}_i = \{j \in \mathsf{S} \colon \exists n \geq 0 \text{ takové, že } p_{ij}^{(n)} > 0\},$$

*je uzavřená.*

*Důkaz:* [Kalas, s. 9] Dokážeme sporem.

Nechť $\mathsf{C}_i$ není uzavřená, potom existují stavy $j \in \mathsf{C}_i$, $r \notin \mathsf{C}_i$ takové, že $p_{jr} > 0$ (viz věta 1.14). Protože $j \in \mathsf{C}_i$, existuje $n \geq 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$ ($j$ je dosažitelný z $i$ podle definice množiny $\mathsf{C}$). Z Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnosti dostaneme

$$p_{ir}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathsf{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kr} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jr} > 0,$$

a to znamená, že $r \in \mathsf{C}_i$, což je spor s předpokladem o stavu $r$. □

**Poznámka 1.11** Předchozí věta spolu s tvrzením věty 1.9 (všechny stavy v řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být přechodné) umožňuje rozložit konečnou množinu stavů $\mathsf{S}$ Markovova řetězce takto: vezmeme trvalý stav s nejnižším indexem $j_1$ a utvoříme množinu $\mathsf{C}_1$ všech stavů, které jsou ze stavu $j_1$ dosažitelné. Tato množina je uzavřená a nerozložitelná. Dále nechť je $j_2$ trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi stavy, které nepatří do $\mathsf{C}_1$, množina $\mathsf{C}_2$ bude tvořena těmi stavy, které jsou ze stavu $j_2$ dosažitelné atd. Takto vytvořené množiny $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2, \ldots, \mathsf{C}_r$ tvoří disjunktní rozklad množiny trvalých stavů na nerozložitelné uzavřené množiny. Tento rozklad je až na očíslování množin jediný. Kromě trvalých stavů existují v uvažovaném řetězci ještě stavy přechodné, z nichž jsou dosažitelné stavy trvalé, ale ne naopak. Popsanému rozkladu množiny stavů $\mathsf{S}$ odpovídá (po příslušném přečíslování stavů) matice pravděpodobností přechodu ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_2 & \ldots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \mathbf{P}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \ldots & \mathbf{Q}_r & \mathbf{Q}_{r+1}, \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ jsou čtvercové matice pravděpodobností přechodu mezi trvalými stavy v podřetězcích $\mathsf{C}_1, \ldots, \mathsf{C}_r$ a $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{r+1}$ obsahují pravděpodobnosti přechodu ze stavů přechodných.

Analogický rozklad lze psát pro matici pravděpodobností přechodu v řetězci s nekonečně mnoha stavy. Množinu $\mathsf{S}$ lze psát ve tvaru $\mathsf{S} = \mathsf{T} \cup \mathsf{C}_1 \cup \mathsf{C}_2, \ldots$, kde $\mathsf{T}$ je množina stavů přechodných, $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2, \ldots$ jsou disjunktní uzavřené množiny stavů trvalých.

**Příklad 1.25** V příkladu 1.23 jsme zjistili, že řetězec modelující náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami je rozložitelný, v množině stavů existují dvě uzavřené množiny. Přečíslením stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$ do posloupnosti $0, m, 1, 2, \ldots, m-2, m-1$ dostaneme matici $\mathbf{P}$ tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0\,0\,0\,0 \ldots 0\,0 \\ 0 & 1\,0\,0\,0 \ldots 0\,0 \\ q & 0\,0\,p\,0 \ldots 0\,0 \\ 0 & 0\,q\,0\,p \ldots 0\,0 \\ \ldots & \\ 0 & p\,0\,0\,0 \ldots q\,0 \end{pmatrix},$$

tj. $\mathbf{P}_1 = 1$, $\mathbf{P}_2 = 1$, matice $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ typu $(m-1) \times 2$ pravděpodobností přechodu ze stavů přechodných do stavů trvalých, matice $\mathbf{Q}_3$ typu $(m-1) \times (m-1)$ pravděpodobností přechodu mezi přechodnými stavy. ○

**Příklad 1.26** [Piatka, s. 59] Zjistěte, zda je Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a maticí $\mathbf{P}$ rozložitelný

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0 \\ \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5} \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže nakreslíme schéma možných přechodů mezi stavy, zjistíme, že množina $\mathsf{C} = \{1, 5\}$ je uzavřená, řetězec je rozložitelný. Přečíslením stavů na pořadí 1, 5, 2, 3, 4 dostaneme matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Stavy 1, 5 jsou trvalé, stavy 2, 3, 4 přechodné. ○

**Příklad 1.27** Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je dán maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4} \\ 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \\ 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Přečíslením stavů $(1, 2, 3, 4, 5) \;\rightarrow\; (1, 2, 5, 3, 4)$ vyjádříme matici $\mathbf{P}$ ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Množiny stavů $\mathsf{C}_1 = \{1, 2, 5\}$, $\mathsf{C}_2 = \{3, 4\}$ jsou uzavřené, řetězec je rozložitelný, všechny stavy jsou trvalé. ○

**Věta 1.17** *Markovův řetězec je nerozložitelný právě tehdy, jsou-li všechny stavy vzájemně dosažitelné (sousledné).*

*Důkaz:* a) Předpokládejme, že řetězec je nerozložitelný. Kdyby existovaly dva stavy $i, j$ takové, že $p_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$, potom $j \notin \mathsf{C}_i$ ($\mathsf{C}_i$ je množina všech stavů dosažitelných z $i$), což by znamenalo, že $\mathsf{S}$ má vlastní neprázdnou uzavřenou podmnožinu. To je spor.

b) Předpokládejme, že všechny stavy jsou vzájemně dosažitelné. Nechť $\mathsf{C} \neq \emptyset$ je libovolná uzavřená množina. Nechť $j \in \mathsf{C}, k \in \mathsf{S}$, $j, k$ libovolné. Stav $k$ je podle předpokladu dosažitelný z $j$, tedy existuje $n \geq 0$, pro které $p_{jk}^{(n)} > 0$. To znamená, že $k \in \mathsf{C}$, tedy $\mathsf{C} = \mathsf{S}$, tj. řetězec je nerozložitelný. □

**Poznámka 1.12** V některých publikacích je vlastnost Markovova řetězce uvedená ve větě 1.17 základem definice nerozložitelného řetězce.

**Věta 1.18** *V řetězci s konečně mnoha stavy neexistují stavy trvalé nulové.*

*Důkaz:* Nechť $i$ je trvalý nulový stav (aspoň jeden trvalý stav v $\mathsf{S}$ existuje, viz věta 1.9). Nechť $\mathsf{C}$ je množina stavů dosažitelných ze stavu $i$. Podle věty 1.16

je $\mathsf{C}$ uzavřená nerozložitelná množina trvalých nulových stavů, která definuje podřetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}_C = \{\widetilde{p}_{ij}\}$. Podle věty 1.10 $\widetilde{p}_{ij}^{(n)} \to 0, \forall i, j \in \mathsf{C}$. Potom ale

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} = 0, \ i \in \mathsf{C},$$

což je spor, neboť $\mathbf{P}_C$ i $\mathbf{P}_C^{(n)} = \{\widetilde{p}_{ij}^{(n)}\}$ jsou stochastické matice. □

**Definice 1.10** Řekneme, že dva stavy Markovova řetězce jsou *stejného typu*, jsou-li buď oba přechodné nebo oba trvalé nulové nebo oba trvalé nenulové a současně oba neperiodické nebo oba periodické se stejnou periodou.

**Věta 1.19** *Jsou-li stavy $i, j$ sousledné, jsou stejného typu.*

*Důkaz:* Nechť jsou stavy $i, j$ sousledné. Potom existují $n$ a $m$ tak, že $p_{ij}^{(n)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(m)} = \beta > 0$. Podle Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnosti (1.7) potom pro libovolné $r \in \mathbb{N}_0$ platí

$$p_{ii}^{(n+m+r)} = \sum_{s\in\mathsf{S}} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(m+r)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m+r)},$$

$$p_{ji}^{(m+r)} = \sum_{k\in\mathsf{S}} p_{jk}^{(r)} p_{ki}^{(m)} \geq p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)},$$

a tedy

$$p_{ii}^{(n+m+r)} \geq \alpha\beta p_{jj}^{(r)}. \tag{1.18}$$

Obdobně odvodíme, že také

$$p_{jj}^{(n+m+r)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(r)}. \tag{1.19}$$

a) Je-li $i$ přechodný stav, tj. jestliže

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty,$$

platí užitím (1.18)

$$0 \leq \sum_{r=0}^{\infty} \alpha\beta p_{jj}^{(r)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+m+r)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty,$$

tedy $\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} < \infty$ a stav $j$ je přechodný. Argumentace pro stavy $j$ a $i$ je symetrická – to platí i v dalších úvahách tohoto důkazu.

b) Nechť je stav $i$ trvalý, víme, že to je ekvivalentní s tím, že

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty.$$

Potom ze vztahu (1.19) plyne, že

$$\infty = \alpha\beta \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} \le \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(n+m+r)} \le \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)},$$

a tedy stav $j$ je také trvalý.

Jestiže je stav $i$ trvalý nulový, platí podle věty 1.10 $\lim_{r\to\infty} p_{ii}^{(r)} = 0$, a podle (1.18) také

$$0 = \lim_{r\to\infty} p_{ii}^{(n+m+r)} \ge \alpha\beta \lim_{r\to\infty} p_{jj}^{(r)} \ge 0.$$

Protože $\alpha > 0$, $\beta > 0$, plyne odtud $\lim_{r\to\infty} p_{jj}^{(r)} = 0$, tj. stav $j$ je trvalý nulový.

Je-li stav $i$ trvalý nenulový, tj. je-li $\lim_{r\to\infty} p_{ii}^{(r)} \ne 0$, plyne z (1.19)

$$\lim_{r\to\infty} p_{jj}^{(r)} = \lim_{r\to\infty} p_{jj}^{(n+m+r)} \ge \alpha\beta \lim_{r\to\infty} p_{ii}^{(r)} \ne 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} p_{jj}^{(r)} \ne 0.$$

Stav $j$ je také trvalý nenulový.

c) Nechť má stav $i$ periodu $d_i > 1$. Podle (1.18) pro $r = 0$ je

$$p_{ii}^{(m+n)} \ge \alpha\beta p_{jj}^{(0)} > 0,$$

tedy $n + m$ je dělitelné $d_i$. Potom $p_{ii}^{(n+m+r)} \ge 0$ pro $r$ dělitelné $d_i$; $p_{ii}^{(n+m+r)} = 0$ pro $r$ nedělitelné $d_i$. Ze vztahu (1.18) potom plyne, že pro ta čísla $r$, která nejsou dělitelná $d_i$

$$0 = p_{ii}^{(n+m+r)} \ge \alpha\beta p_{jj}^{(r)} \;\Rightarrow\; p_{jj}^{(r)} = 0.$$

Tedy stav $j$ je periodický a jeho perioda $d_j$ je buď $d_i$ nebo celý násobek $d_i$, tj. $d_j \ge d_i$. Provedeme-li celou předchozí úvahu s vyměněnými stavy $i$ a $j$, dostaneme $d_i \ge d_j$, a tedy $d_i = d_j$. □

**Věta 1.20** (o solidaritě) *V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.*

*Důkaz:* Tvrzení je důsledkem věty 1.17 a předchozí věty. □

**Věta 1.21** *V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy jsou všechny stavy trvalé nenulové.*

*Důkaz:* Tvrzení plyne z věty 1.9 (je-li S konečná, nemohou být všechny stavy přechodné), věty 1.18 (v řetězci s konečně mnoha stavy neexistují stavy trvalé nulové) a z věty 1.20 (v nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu). □

## 1.4 Stacionární rozdělení

Jak uvidíme v této kapitole, nerozložitelné Markovovy řetězce generují za snadno ověřitelných podmínek v čase $n \to \infty$ jediné rozdělení pravděpodobnosti, tzv. *stacionární* rozdělení, které tak vlastně popisuje chování řetězce v jeho ustálené podobě, sledujeme-li tento řetězec dostatečně dlouhou dobu. V následujících příkladech i v kapitole o aplikacích Markovových řetězců zjistíme, že stacionární rozdělení představuje jednu z klíčových charakteristik Markovových řetězců, vyskytujících se v praktických úlohách. Studium ovšem opět začneme rigorózní matematickou definicí.

**Definice 1.11** [Prášková, s. 50] Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Nechť $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in \mathsf{S}\}$ je nějaké rozdělení pravděpodobností na množině $\mathsf{S}$, tj. $\pi_j \geq 0$, $j \in \mathsf{S}$, $\sum_{j\in\mathsf{S}} \pi_j = 1$. Potom se $\boldsymbol{\pi}$ nazývá *stacionární rozdělení* daného řetězce, jestliže platí

$$\pi_j = \sum_{k\in\mathsf{S}} \pi_k p_{kj}, \quad j \in \mathsf{S}. \tag{1.20}$$

**Poznámka 1.13** Při označení $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$ lze zapsat vztahy (1.20) takto:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}.$$

**Věta 1.22** *Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec. Potom platí:*

*1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje.*

*2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jediné.*

*2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, potom pro stacionární pravděpodobnosti platí*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0, \quad i, j \in \mathsf{S},$$

*a také*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} > 0, \quad j \in \mathsf{S}.$$

*2b) Jsou-li všechny stavy periodické, platí*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0, \quad i, j \in \mathsf{S},$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j^{(k)} > 0, \quad j \in \mathsf{S}.$$

*Důkaz:* [Dupač (1975), s. 85–88; Prášková, s. 51–53] □

**Poznámka 1.14** 1. Tvrzení 2a) věty 1.22 je velmi názorné. Stacionární pravděpodobnost $\pi_j$, $j \in \mathsf{S}$, $j$ neperiodický stav, představuje limitní hodnotu pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}^{(n)}$ z libovolného stavu $i$ do stavu $j$, resp. limitní hodnotu absolutní pravděpodobnosti $p_j^{(n)}$, jestliže $n \to \infty$. Tedy vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ ukazuje, s jakými pravděpodobnostmi se systém dostane do jednotlivých stavů, pozorujeme-li tento systém dostatečně dlouho.

2. Z předchozí teorie víme (viz věta 1.11), že je-li stav $j \in \mathsf{S}$ trvalý, nenulový a neperiodický, potom $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$, kde $\mu_j$ je střední doba prvního návratu do stavu $j$. Tedy

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}, \quad i, j \in \mathsf{S}.$$

Maticově to lze vyjádřit takto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \pi_0, & \pi_1, & \pi_2, & \ldots \\ \pi_0, & \pi_1, & \pi_2, & \ldots \\ \pi_0, & \pi_1, & \pi_2, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

**Věta 1.23** *V nerozložitelném Markovově řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozdělení existuje.*

*Důkaz:* Tvrzení plyne z předchozí věty a z věty 1.21. □

Při určování stacionárních pravděpodobností nejprve vyšetříme, zda je řetězec nerozložitelný. Potom užijeme vztah (1.20).

**Příklad 1.28** [Piatka, s. 61; Maixner, s. 55] Markovův řetězec daný maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & 0, & \frac{2}{3}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4}, & 0, & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

je rozložitelný, existují v něm dvě uzavřené množiny stavů $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, tj. matici pravděpodobností přechodu lze upravit přečíslováním stavů na tvar

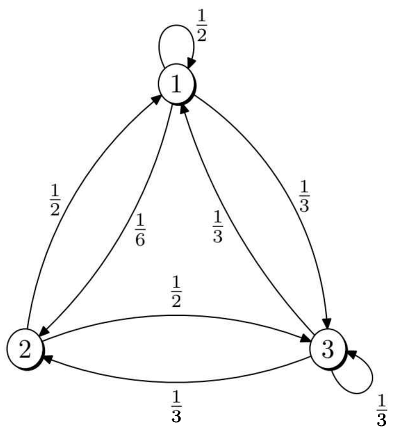
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4} \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

V tomto případě existuje nekonečně mnoho stacionárních rozdělení, která vzniknou libovolnou konvexní kombinací příslušných stacionárních rozdělení na dvou uzavřených množinách stavů. ○

**Příklad 1.29** [Piatka, s. 60] Markovův řetězec je dán maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

určete stacionární rozdělení. Nakresleme si schéma, ze kterého je zřejmé, že řetězec je nerozložitelný.




Řetězec je nerozložitelný, má konečnou množinu stavů, stacionární rozdělení proto existuje. Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3, \\ \pi_2 &= \frac{1}{6}\pi_1 + \qquad + \frac{1}{3}\pi_3, \\ \pi_3 &= \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3, \\ &\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3\pi_1 - 3\pi_2 - 2\pi_3 &= 0, \\ \pi_1 - 6\pi_2 + 2\pi_3 &= 0, \\ 2\pi_1 + 3\pi_2 - 4\pi_3 &= 0, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{aligned}$$

Její řešení je tvaru

$$\pi_1 = \frac{18}{41}, \quad \pi_2 = \frac{8}{41}, \quad \pi_3 = \frac{15}{41}.$$

○

**Příklad 1.30** (*Vyšetřování tržních podílů obchodů*) [Kořenář, s. 34] V malém městě jsou dva obchody s potravinami. Zajímáme se o nákupy zákazníků v jednotlivých obchodech, uvažujeme týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali.

Předpokládejme (poněkud zjednodušeně), že v průběhu jednoho týdne zákazník navštěvoval buď první obchod (obchod A), nebo druhý obchod (obchod B).

Průzkumem byla získána data od 1 000 zákazníků za období 10 týdnů. Bylo zjištěno, že zákazníci, kteří v jednom týdnu nakupovali

– v obchodě A, zůstali z 90 % zákazníky obchodu A, z 10 % přešli do obchodu B,

– v obchodě B, zůstali z 80 % zákazníky obchodu B, z 20 % přešli do obchodu A.

Úkolem je určit, jak se bude vyvíjet tento obchodní (distribuční) systém v čase a jaké budou tržní podíly jednotlivých obchodů v ustálené (stacionární) fázi jeho fungování.

Řešení: uvažujeme dva stavy systému: (1) zákazníci nakupují v obchodě A, (2) zákazníci nakupují v obchodě B, tedy $\mathsf{S} = \{1, 2\}$. Matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9, & 0{,}1 \\ 0{,}2, & 0{,}8 \end{pmatrix},$$

pravděpodobnosti přechodu ležící na hlavní diagonále můžeme interpretovat jako pravděpodobnosti věrnosti zákazníků příslušným obchodům, zbývající čísla jsou pravděpodobnosti migrace zákazníků, tj. pravděpodobnosti přechodu zákazníků ke konkurenci.

Uvažujme dva případy:

a) zákazníci na počátku nakupují v obchodě A, tj. $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0)$,

b) zákazníci na počátku nakupují v obchodě B, tj. $\mathbf{p}^{(0)} = (0, 1)$.

Postupně vypočteme

v situaci a)

$$\mathbf{p}^{(1)} = (1, 0) \begin{pmatrix} 0{,}9, & 0{,}1 \\ 0{,}2, & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}9, 0{,}1),$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = (0{,}9, 0{,}1) \begin{pmatrix} 0{,}9, & 0{,}1 \\ 0{,}2, & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}83, 0{,}17),$$

v situaci b)

$$\mathbf{p}^{(1)} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0{,}9, & 0{,}1 \\ 0{,}2, & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}2, 0{,}8),$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = (0{,}2, 0{,}8) \begin{pmatrix} 0{,}9, & 0{,}1 \\ 0{,}2, & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}34, 0{,}66).$$

Výsledky výpočtů pro 6 období (týdnů) jsou
a)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1^{(n)}$ | 1 | 0,9 | 0,83 | 0,781 | 0,747 | 0,723 | 0,706 |
| $p_2^{(n)}$ | 0 | 0,1 | 0,17 | 0,219 | 0,253 | 0,277 | 0,294 |

b)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1^{(n)}$ | 0 | 0,2 | 0,34 | 0,438 | 0,507 | 0,555 | 0,589 |
| $p_2^{(n)}$ | 1 | 0,8 | 0,66 | 0,562 | 0,493 | 0,445 | 0,411 |

Z tabulek lze odvodit následující závěry: z 1000 zákazníků, kteří

a) původně nakupovali v obchodě A, jich 706 bude po šesti týdnech nakupovat stále v tomto obchodě, 294 zákazníků přejde do obchodu B, ke konkurenci,

b) původně nakupovali v obchodě B, jich 411 bude po šesti týdnech stále nakupovat v tomto obchodě, 589 zákazníků přejde do obchodu A, ke konkurenci.

Jestliže předpokládáme, že tento systém pozorujeme dostatečně dlouho (velký počet období – týdnů), lze očekávat, že se poměry ustálí. Určíme stacionární (limitní) pravděpodobnosti výskytu stavů řešením soustavy (1.20)

$$\begin{aligned} 0{,}9\pi_1 + 0{,}2\pi_2 &= \pi_1, \\ 0{,}1\pi_1 + 0{,}8\pi_2 &= \pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Řešením je vektor

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = (0{,}6667, 0{,}3333).$$

Ekonomická interpretace tohoto výsledku je následující: uvažujeme-li tisíc zákazníků, bude v obchodní síti na malém městě tvořeném obchody A, B:

$0{,}6667 \cdot 1000 = 667$ zákazníků trvale nakupovat v obchodě A,

$0{,}3333 \cdot 1000 = 333$ zákazníků trvale nakupovat v obchodě B.

Stacionární pravděpodobnosti lze tedy interpretovat jako tržní podíly v obchodní síti.

Informace o tržních podílech jsou často důležité při rozhodování. Předpokládejme, že obchod B by se rozhodl, že provede reklamní kampaň s cílem přilákat zákazníky, kteří dosud nakupují v obchodě A. Výsledkem kampaně bylo, že došlo k jistému přesunu zájmu zákazníků nakupovat v obchodě B, což se projevilo tím, že se změnila matice pravděpodobností přechodu určená na základě nového marketingového průzkumu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}85, & 0{,}15 \\ 0{,}20, & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

Nový vektor stacionárních pravděpodobností je $\boldsymbol{\pi} = (0{,}57, 0{,}43)$, reklamní kampaň přinesla téměř 10% nárůst zákazníků obchodu B. $\circ$

**Příklad 1.31** (*Ehrenfestův model obecně*) V příkladu 1.1 je uvedena matice pravděpodobností přechodu Ehrenfestova pokusu. Množina stavů je v tomto případě rovna $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \dots, a\}$. Stacionární rozdělení určíme řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{lllll} & \frac{1}{a}\pi_1 & & & = \pi_0 \\ \pi_0 & & +\frac{2}{a}\pi_2 & & = \pi_1 \\ & \frac{a-1}{a}\pi_1 & & \frac{3}{a}\pi_3 & = \pi_2 \\ \dots\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \frac{1}{a}\pi_{a-1} & = \pi_a. \end{array}$$

Postupně z jednotlivých rovnic získáme $\pi_1 = a\pi_0$, $\pi_2 = \frac{a(a-1)}{2}\pi_0$, $\pi_3 = \frac{a(a-1)(a-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}\pi_0$, $\pi_j = \binom{a}{j}\pi_0, j = 1, 2, \dots, a$. Protože musí platit $\sum_{j=0}^{a}\pi_j = 1$, určíme $\pi_0 = \frac{1}{2^a}$ a tedy

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_a), \ \pi_j = \frac{1}{2^a}\binom{a}{j}, j = 0, 1, \dots, a.$$

○

**Příklad 1.32** [Piatka, s. 62] Markovův řetězec s nekonečnou množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, \dots\}$ má následující pravděpodobnosti přechodu

$$p_{i1} = \frac{i}{i+1}, \ i = 1, 2, 3, \dots, \ p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1}, \ i = 1, 2, 3, \dots, \ p_{ij} = 0, \ j \neq 1, i+1,$$

tj. matice $\mathbf{P}$ je tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ \frac{2}{3}, & 0, & \frac{1}{3}, & 0, & 0, & \dots \\ \frac{3}{4}, & 0, & 0, & \frac{1}{4}, & 0, & \dots \\ \frac{4}{5}, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{5}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Řetězec je nerozložitelný a neperiodický, stacionární rozdělení existuje. Řešíme soustavu (1.20)

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 + \cdots, \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2, \quad \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_3, \dots$$

Ze vztahů na druhém řádku dostaneme

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi_1, \quad \pi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi_1, \dots, \pi_j = \frac{1}{j!}\pi_1, \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

Součet stacionárních pravděpodobností

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty}\pi_j = \pi_1 + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\pi_1 = \pi_1(e-1) < \infty,$$

a tedy

$$\pi_1 = \frac{1}{e-1}, \Rightarrow \pi_j = \frac{1}{(e-1)j!}, \ j = 1, 2, 3, \ldots$$

○

**Příklad 1.33** [Piatka, s. 63; Prášková, s. 56] Markovův řetězec s nekonečně mnoha stavy $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ má následující matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{3}, & 0, & \frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{4}, & 0, & 0, & \frac{3}{4}, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{5}, & 0, & 0, & 0, & \frac{4}{5}, & 0, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Máme určit stacionární pravděpodobnosti.

Řetězec je nerozložitelný a neperiodický. Existují-li stacionární pravděpodobnosti, určíme je řešením soustavy rovnic

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_3 + \cdots,$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2, \quad \pi_4 = \frac{4}{5}\pi_3, \ldots$$

Ze vztahů na druhém řádku odvodíme, že

$$\pi_j = \frac{1}{j+1}\pi_0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Součet těchto čísel

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \right) = \infty,$$

není konečný pro žádné $\pi_0 > 0$, nejedná se o rozdělení pravděpodobností. Stacionární pravděpodobnosti neexistují, všechny stavy řetězce jsou buď přechodné, nebo trvalé nulové. ○

**Příklad 1.34** (*Model havarijního pojištění*) [Prášková, s. 24] Při pojištění motorových vozidel používá jistá pojišťovna tři kategorie pojistného: 0 (základní pojistné), 1 (bonus 30 %), 2 (bonus 50 %). V prvním pojistném období (roce) platí pojištěný základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezškodní průběh, je pojištěný v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše (získá bonus), pokud ale uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o jednu kategorii níže, při uplatnění více než jednoho pojistného nároku je zařazen o dvě kategorie níže. Počet výskytů pojistné události v $n$-tém pojistném období je náhodná veličina $Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Předpokládáme, že náhodné veličiny $Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou nezávislé a mají stejné Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda$, tj.

$$\mathsf{P}(Y_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

Nechť $X_n$ značí kategorii pojistného v $n$-tém pojistném období. Pro $n \geq 1$ platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0, \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1, \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1. \end{cases}$$

Je tedy $\{X_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2\}$, s počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0)$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Označme pro zjednodušení $a_0 = e^{-\lambda}$, $a_1 = \lambda e^{-\lambda}$. Matice $\mathbf{P}$ má potom tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - a_0 & a_0 & 0 \\ 1 - a_0 & 0 & a_0 \\ 1 - a_0 - a_1 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Řetězec je nerozložitelný, všechny stavy jsou trvalé nenulové. Stacionární rozdělení existuje, určíme je řešením soustavy (1.20)

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(1 - a_0) + \pi_1(1 - a_0) + \pi_2(1 - a_0 - a_1), \\ \pi_1 &= \pi_0 a_o + \pi_2 a_1, \\ \pi_2 &= \pi_1 a_0 + \pi_2 a_0. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1 - a_0 - a_0 a_1}{1 - a_0 a_1} = \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}, \\ \pi_1 &= \frac{a_0(1 - a_0)}{1 - a_0 a_1} = \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}, \\ \pi_2 &= \frac{a_0^2}{1 - a_0 a_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1 - \lambda e^{-2\lambda}}. \end{aligned}$$

Je-li výše základního pojistného $V$, potom střední výše pojistného, kterou pojištěný zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu, je rovna (při uvedeném systému bonusů)

$$\pi_0 V + 0{,}7 \pi_1 V + 0{,}5 \pi_2 V.$$

○

**Příklad 1.35** [Piatka, s. 64] Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech kladné části reálné osy. V každém kroku se může přemístit o jednotku doprava s pravděpodobností $\alpha$, o jednotku doleva s pravděpodobností $\beta$, nebo zůstat na místě. Z bodu 1 se částice přemisťuje vpravo s pravděpodobností $\alpha$ nebo zůstává na místě s pravděpodobností $1-\alpha$. Určete stacionární pravděpodobnosti.

Množina stavů Markovova řetězce je $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots\}$, pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha, & \alpha, & 0, & 0, & 0, 0, \ldots \\ \beta, & 1-\alpha-\beta, & \alpha, & 0, & 0, 0, \ldots \\ 0, & \beta, & 1-\alpha-\beta, & \alpha, & 0, 0, \ldots \\ 0, & 0, & \beta, & 1-\alpha-\beta, & \alpha, 0, \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Řetězec je nerozložitelný a neperiodický. Existují-li stacionární pravděpodobnosti, určíme je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1-\alpha)\pi_1 + \beta\pi_2, \\ \pi_2 &= \alpha\pi_1 + (1-\alpha-\beta)\pi_2 + \beta\pi_3, \\ \pi_3 &= \alpha\pi_2 + (1-\alpha-\beta)\pi_3 + \beta\pi_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{\beta}\pi_1.$$

Ze druhé rovnice soustavy potom použitím tohoto vztahu

$$\pi_3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \pi_1.$$

Všechna kladná řešení soustavy jsou tvaru

$$\pi_j = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-1} \pi_1, \quad \pi_1 > 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots$$

Pro $\alpha < \beta$ je součet těchto čísel konečný

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-1} \pi_1 = \frac{\pi_1}{1-\frac{\alpha}{\beta}} < \infty.$$

Stacionární pravděpodobnosti existují, z podmínky

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$$

plyne, že

$$\pi_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Stacionární pravděpodobnosti jsou

$$\pi_j = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-1}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

a tedy stavy řetězce jsou trvalé nenulové.

V případě, že $\alpha \geq \beta$, stacionární pravděpodobnosti neexistují a stavy řetězce jsou buď přechodné, nebo trvalé nulové. ∘

## 1.5 Absorpční Markovovy řetězce

V předchozích kapitolách, vrcholících zavedením stacionárního rozdělení, nebyly absorpční stavy v Markovově řetězci vítány, protože automaticky indukovaly rozložitelnost řetězce, a tedy neexistenci (netriviálního) stacionárního rozdělení. Přesto se takové řetězce ukazují být užitečné k modelování procesů např. v genetice či epidemiologii. S uvedenými řetězci také souvisí některé specifické otázky (pravděpodobnost toho, že řetězec skončí v daném pohlcujícím stavu, resp. střední hodnota počtu kroků nutných k dosažení některého z pohlcujících stavů), pro které stojí za to se s nimi seznámit blíže.

Uvažujme homogenní Markovovy řetězce s konečným počtem stavů, označeným jako $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots, m\}$. Zajímavým speciálním typem těchto řetězců jsou řetězce absorpční (pohlcující), které jsou v literatuře [Grinstead] definovány následovně.

**Definice 1.12** Homogenní Markovův *řetězec* s konečným počtem stavů se nazývá *absorpční (pohlcující)*, má-li aspoň jeden absorpční stav a je-li možné z každého neabsorpčního stavu přejít do nějakého absorpčního stavu (ne nutně za jeden krok). Dostane-li se řetězec do absorpčního stavu, řekneme, že *je absorbován*. V absorpčním Markovově řetězci se *stav*, který není pohlcující, nazývá *přechodný (tranzientní)*.

V tomto typu Markovových řetězců se řeší odpovědi na následující otázky:
– jaká je pravděpodobnost toho, že se řetězec dostane do nějakého absorpčního stavu (že bude absorbován);
– jaká je pravděpodobnost toho, že řetězec skončí v daném pohlcujícím stavu;
– jaká je střední hodnota počtu kroků nutných k dosažení některého z pohlcujících stavů;
– jaká je střední hodnota počtu přechodů do určitého přechodného stavu.

Odpovědi na tyto otázky vyžadují znalost počátečního rozdělení a matice pravděpodobností přechodu.

### 1.5.1 Kanonická forma matice pravděpodobností přechodu

Uvažujme libovolný absorpční Markovův řetězec a přečíslujme jeho stavy tak, aby po množině přechodných stavů následovala množina stavů absorpčních (přechodné stavy jsou číslovány nejnižšími čísly). Označme $r$ počet pohlcujících stavů, $t$ počet stavů přechodných. Matici $\mathbf{P}$ zapíšeme ve tvaru blokové matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}, & \mathbf{R} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Q}$ je matice typu $t \times t$, $\mathbf{R}$ je nenulová matice typu $t \times r$, $\mathbf{O}$ je nulová matice typu $r \times t$ a $\mathbf{I}$ je jednotková matice typu $r \times r$.

Víme, že prvky matice $\mathbf{P}^n$ jsou pravděpodobnosti $p_{ij}^{(n)}$ přechodu ze stavu $i$ do stavu $j$ za $n$ kroků. Po umocnění naší blokové matice dostaneme matici tvaru

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^n, & \mathbf{A} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}$ je nějaká matice typu $t \times r$, kterou lze vyjádřit pomocí matic $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, ale to zde není nutné provádět. Prvky matice $\mathbf{Q}^n$ jsou pravděpodobnosti přechodu za $n$ kroků mezi přechodnými stavy.

**Věta 1.24** *V absorpčním Markovově řetězci s konečně mnoha stavy je pravděpodobnost toho, že se systém dostane do některého z pohlcujících stavů (pravděpodobnost toho, že řetězec bude absorbován) rovna 1, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = \mathbf{O}.$$

*Důkaz:* Z každého přechodného stavu $j$ je možné přejít do nějakého pohlcujícího stavu. Je-li systém v čase 0 v přechodném stavu $j$, označme $m_j$ minimální počet kroků nutných k dosažení pohlcujícího stavu. Dále označme $p_j$ pravděpodobnost toho, že z počátečního stavu $j$ systém nepřejde do pohlcujícího stavu za $m_j$ kroků. Potom $p_j < 1$. Nechť $m$ je největší z čísel $m_j$ a nechť $p$ je největší z čísel $p_j$. Pravděpodobnost toho, že systém nebude absorbován za $m$ kroků, je menší nebo rovna $p$, pravděpodobnost toho, že nebude absorbován za $2m$ kroků je menší nebo rovna $p^2$ atd. Protože $p < 1$, je $p^n \to 0$. Protože pravděpodobnost toho, že systém nebude pohlcen za $n$ kroků, je monotónně klesající, konvergují tyto pravděpodobnosti také k nule, a tedy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = \mathbf{O}$. $\square$

**Věta 1.25** *V absorpčním Markovově řetězci existuje matice* $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\mathbf{N}$ *a platí*

$$\mathbf{N}=\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots.$$

*Matice* $\mathbf{N}$*, která se nazývá* fundamentální matice pro matici $\mathbf{P}$*, má tu vlastnost, že prvek* $n_{ij}$ *je roven střední hodnotě počtu návratů systému do přechodného stavu* $j$ *za předpokladu, že systém byl v čase 0 v přechodném stavu* $i$ *(je-li* $i=j$*, pokládáme to za první návrat).*

*Důkaz:* Uvažujme soustavu rovnic $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, odtud máme $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{x}$. Opakujeme-li tento postup, dostaneme $\mathbf{x}=\mathbf{Q}^n\mathbf{x}$. Protože podle předchozí věty $\mathbf{Q}^n\to\mathbf{O}$, je také $\mathbf{Q}^n\mathbf{x}\to\mathbf{O}$, a tedy $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Soustava má jen triviální řešení, a tedy matice $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$ je regulární, proto existuje inverzní matice $\mathbf{N}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$.

Rovnost

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})(\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots+\mathbf{Q}^n)=\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{n+1},$$

vynásobíme zleva maticí $\mathbf{N}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$, dostaneme

$$\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots+\mathbf{Q}^n=\mathbf{N}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{n+1}).$$

Odtud pro $n\to\infty$

$$\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots=\mathbf{N}.$$

Nechť $i,j$ jsou libovolné přechodné stavy, které v dalších úvahách pokládáme za pevně zvolené. Nechť $X^{(k)}$ je náhodná veličina, která nabývá hodnoty 1, přešel-li systém ze stavu $i$ do stavu $j$ po $k$ krocích, a hodnoty 0 v ostatních případech. (Pro zjednodušení zápisu nevyznačujeme závislost této náhodné veličiny na $i,j$.) Platí

$$P(X^{(k)}=1)=q_{ij}^{(k)},\quad P(X^{(k)}=0)=1-q_{ij}^{(k)},$$

kde $q_{ij}^{(k)}$ je prvek matice $\mathbf{Q}^k$. Tyto vztahy platí i pro $k=0$, protože $\mathbf{Q}^0=\mathbf{I}$. Náhodná veličina $X^{(k)}$ má alternativní rozdělení, a tedy $E(X^{(k)})=q_{ij}^{(k)}$.

Je-li systém v čase 0 ve stavu $i$, je střední hodnota počtu vstupů do stavu $j$ v prvních $n$ krocích rovna

$$E[X^{(0)}+X^{(1)}+\cdots+X^{(n)}]=q_{ij}^{(0)}+q_{ij}^{(1)}+\cdots+q_{ij}^{(n)}.$$

Pro $n\to\infty$ dostaneme

$$E[X^{(0)}+X^{(1)}+\cdots]=q_{ij}^{(0)}+q_{ij}^{(1)}+\cdots=n_{ij}.$$

□

**Příklad 1.36** Uvažujme hru dvou hráčů, kteří postupně házejí pravidelnou mincí. Padne-li líc, vyhrává hráč A, padne-li rub, vyhrává hráč B. Pro jednoduchost předpokládejme, že celkový kapitál obou hráčů je roven 4 eura. Po dosažení tohoto kapitálu jedním z hráčů hra končí (hodnota kapitálu hráčů se již dále nemění). Kapitál hráče A bude představovat stavy systému, tj. $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Matice $\mathbf{P}$ má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stavy $1, 2, 3$ jsou přechodné, stavy $0, 4$ jsou absorpční (pohlcující). Stavy přečíslujeme v tomto pořadí a zapíšeme matici $\mathbf{P}$ v kanonickém tvaru

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

a tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Po výpočtu inverzní matice dostaneme

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že začne-li hráč A hru např. s kapitálem 2 eura, je střední hodnota počtu návratů ke kapitálu 1 euro rovna jedné hře, střední hodnota počtu návratů ke kapitálu 2 eura rovna dvěma hrám a střední hodnota počtu návratů ke kapitálu 3 eura je rovna jedné hře.

Jinak řečeno, začne-li hráč A hrát s kapitálem 2 eura, bude mít v průběhu dlouhého trvání hry v průměru v 25 % her kapitál rovný 1 euro, v 50 % her bude mít kapitál 2 eura a v 25 % her bude mít kapitál rovný 3 eura. ○

### 1.5.2 Střední hodnota počtu kroků do absorpce

Je-li systém v čase 0 ve stavu $s_i$, jaká je střední hodnota počtu kroků do absorpce? Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

**Věta 1.26** *Označme symbolem $t_i$ střední hodnotu počtu kroků do absorpce, je-li počáteční stav systému $i \in \mathsf{S}$. Dále označme $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_t)$. Platí*

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}\mathbf{N}^T, \quad kde \quad \mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1).$$

*Důkaz:* Sečteme-li všechna čísla v $i$-tém řádku matice $\mathbf{N}$, dostaneme střední hodnotu počtu vstupů do libovolného přechodného stavu za předpokladu, že systém byl v čase 0 v přechodném stavu $i \in \mathsf{S}$, tj. dostaneme střední hodnotu počtu kroků do absorpce. Tedy $t_i = \sum_{j=1}^{t} s_{ij}$. Zapíšeme-li tyto vztahy maticově, dostaneme tvrzení věty. □

Střední hodnotu počtu kroků do absorpce lze určit také jiným postupem, který je ukázán v následujícím příkladu.

**Příklad 1.37** [Levin, s. 22] Jeden z obchodních řetězců vydal sérii $n$ různých karet, na kterých jsou obrázky zvířat. Při každém nákupu má kupující právo si vybrat jednu kartu z úplné sady. Jaký je očekávaný počet nákupů, potřebný k zisku obrázků všech $n$ zvířat?

Označme $X_m$ počet různých karet mezi prvními $m$ získanými kartami. Posloupnost $X_m$, $m = 0, 1, \dots$, tvoří Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, \dots, n\}$. Jaké jsou pravděpodobnosti přechodu za jeden krok (jeden výběr karty při nákupu)? Zřejmě $X_0 = 0$. Má-li sběratel $k$ karet s různými zvířaty, chybí mu ještě $n - k$ dalších,

$$P(X_{m+1} = k + 1 | X_m = k) = \frac{n-k}{n}, \quad P(X_{m+1} = k | X_m = k) = \frac{k}{n}.$$

Každá trajektorie tohoto řetězce je neklesající. Dostane-li se řetězec do stavu $n$ (sbírka karet je úplná), je v tomto stavu absorbován. Zajímá nás tedy střední hodnota počtu kroků do absorpce.

Pokud $T$ označuje počet karet, které je nutno vybrat, abychom poprvé získali $n$ karet s obrázky všech zvířat, lze jej vyjádřit jako součet náhodných veličin, které mají geometrické rozdělení. Označme $T_k$ počet vybraných karet, které poprvé obsahují $k$ vzájemně různých karet, potom

$$T = T_n = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_n - T_{n-1}),$$

kde $T_k - T_{k-1}$ je náhodná veličina, která má geometrické rozdělení s parametrem $\frac{n-k+1}{n}$. Máme-li totiž ve sbírce $k-1$ různých karet, konáme při dalších nákupech nezávislé alternativní pokusy (vždy vybíráme z úplné sady) takové, že „úspěchem“ je zvolení jedné z celkem $n-k-1$ chybějících karet s pravděpodobností $\frac{n-k+1}{n}$. Pokusy opakujeme tak dlouho, dokud takovou „úspěšnou“ kartu nevybereme. Tedy

$$E(T_k - T_{k-1}) = \frac{n}{n-k+1}$$

a

$$E(T) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k - T_{k-1}) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

○

### 1.5.3 Pravděpodobnosti přechodu do absorpčních stavů

**Věta 1.27** *Označme symbolem $b_{ij}$ pravděpodobnost toho, že řetězec bude absorbován v pohlcujícím stavu $j$, je-li systém v čase 0 v přechodném stavu $i$. Nechť dále $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je matice typu $t \times r$. Platí*

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR},$$

*kde $\mathbf{N}$ je fundamentální matice a $\mathbf{R}$ je blok z kanonického tvaru matice $\mathbf{P}$ (její prvky představují pravděpodobnosti přechodu ze stavů přechodných do stavů absorpčních).*

*Důkaz:* Platí

$$b_{ij} = \sum_n \sum_k q_{ik}^{(n)} r_{kj} = \sum_k r_{kj} \sum_n q_{ik}^{(n)} = \sum_k n_{ik} r_{kj} = (\mathbf{NR})_{ij}.$$

□

**Příklad 1.38** Vraťme se k příkladu 1.36. Tam jsme zjistili, že

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\mathbf{t} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{N}^T = (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = (3,4,3)\,,$$

to znamená, že má-li hráč A na začátku 1 euro nebo 3 eura, v průměru hra skončí po 3 krocích. Má-li tento hráč na začátku 2 eura, bude střední hodnota počtu her do absorpce rovna 4.

Dále vypočteme

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

První řádek matice **B** říká, že má-li hráč A na začátku hry 1 euro, s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ prohraje a skončí na 0 a s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ získá vše a skončí s částkou 4 eura.

Z posledního sloupce této matice vidíme, že pravděpodobnosti vyhrát 4 eura jsou úměrné počátečnímu kapitálu (jsou po řadě rovny $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$). ○

### 1.5.4 Aplikace absorpčních Markovových řetězců v genetice

Nejprve se velmi stručně seznamme se základními pojmy, které se v genetice užívají.

Alela je konkrétní forma genu, kdy každý gen může existovat nejméně ve dvou různých formách. Mnohé geny se vyskytují ve větším počtu alelických forem. Gen je termín obecný (např. gen pro tvorbu očního pigmentu), alela je termín specifický (např. alela pro tvorbu tmavého či naopak světlého očního pigmentu).

U diploidních organismů jsou sledované vlastnosti (znaky) dědičně podmíněny obvykle dvojicí alel téhož genu, které jsou buď funkčně shodné (homozygot) nebo funkčně rozdílné (heterozygot). Při rozdílnosti alel účinek jedné z nich obvykle převládá (dominantní alela), účinek párové alely se fenotypově neprojevuje (recesivní alela).

Základním předpokladem genetiky je, že při křížení dostává potomek jednu alelu od každého z rodičů, přičemž tyto alely se vybírají náhodně a nezávisle na sobě. Tento předpoklad určuje pravděpodobnosti výskytu jednotlivých typů potomků.

Pro jednoduchost budeme modelovat rozmnožovací cyklus diploidních rostlin. V tomto případě je výskyt sledované vlastnosti u jedinců určitého typu dán dvojicí alel $A, a$. Každý jedinec může mít dvojici alel

$AA$ – dominantní homozygot (jedinec),

$aa$ – recesivní homozygot (jedinec),

$aA$ (ekvivalentní s $Aa$) – hybridní jedinec.

**Příklad 1.39** Uvažujme následující pokus. Vezmeme jedince určitého druhu živočichů a sledujeme na nich znak (vlastnost), který nezávisí na tom, zda se jedná o samce nebo samici. Tato vlastnost je daná (řízená, ovlivňovaná) jedním genem, který má alely $A, a$. Na začátku vezmeme dva jedince opačného pohlaví, zkřížíme je, potom z jejich potomků vybereme dva jedince opačného pohlaví, opět je zkřížíme a tak postupujeme dále. Předpokládáme, že se při každém zkřížení narodí mnoho jedinců, takže výběry z nich lze pokládat za nezávislé. Můžeme modelovat Markovův řetězec, jehož stavy jsou (neuspořádané) dvojice

$$s_1 = (AA, AA), s_2 = (AA, aA), s_3 = (AA, aa),$$

$$s_4 = (aA, aA), s_5 = (aA, aa), s_6 = (aa, aa).$$

Matice pravděpodobností přechodu je následující

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vysvětlíme druhý řádek matice. Je-li systém ve stavu $s_2 = (AA, aA)$, to znamená, že jeden z rodičů je $AA$, druhý z rodičů je $aA$, jejich potomci mohou být $aA, AA, aA, AA$, tedy pravděpodobnost výběru dominantního potomka je $\frac{1}{2}$, pravděpodobnost výběru hybridního potomka je $\frac{1}{2}$ a neexistuje recesivní potomek. Vybíráme-li z těchto potomků (nezávisle) dvojici $s_1 = (AA, AA)$, můžeme ji vybrat s pravděpodobností $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Dvojici $s_2 = (AA, aA)$ můžeme vybrat s pravděpodobností $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Nakonec pravděpodobnost výběru dvojice $s_4 = (aA, aA)$ je rovna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Podobně postupujeme pro čtvrtý řádek matice $\mathbf{P}$. Přechod ze stavu $s_4 =$ $= (aA, aA)$ znamená, že máme potomky typu $aa, aA, aA, AA$. Tedy

$$p_{41} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},\ p_{42} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\ p_{43} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

$$p_{44} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ p_{45} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ p_{46} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Z prvního a posledního řádku matice $\mathbf{P}$ je ovšem zřejmé, že jsme obdrželi absorpční Markovův řetězec. $\circ$

**Příklad 1.40** (*Křížení diploidní cizosprašné rostliny*) Z populace diploidní cizosprašné rostliny náhodně vybereme jedince a zkřížíme ho

a) s dominantním homozygotem (jedincem),
b) s recesivním homozygotem (jedincem),
c) s hybridem.

V příštím kroku pokusu náhodně vybereme jednoho jedince z populace potomků a opět jej zkřížíme s jedincem typu a) nebo b) nebo c). Tento proces opakujeme po dlouhou řadu generací. Předpokládáme, že se vždy narodí aspoň jeden jedinec každého možného typu. Genetický typ potomka v posloupnosti generací může být reprezentován Markovovým řetězcem, jehož stavy jsou tři: dominantní, recesivní, hybridní, které očíslujeme postupně 1, 2, 3.

Modelujeme homogenní Markovův řetězec $\{X_n, n \in N\}$ s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3\}$. Jev $(X_n = 1)$ nastane, když v $n$-tém kroku pokusu získáme dominantního jedince, jev $(X_n = 2)$ nastane, když získáme recesivního jedince, a jev $(X_n = 3)$ nastane, získáme-li hybridního jedince.

*a) Křížení s dominantním homozygotem:*
- vybereme-li jedince $AA$, dostaneme při křížení $AA \times AA$ potomky $AA$, $AA$, $AA$, $AA$ (potomek dvou čistě dominantních rodičů musí být dominantní);
– vybereme-li jedince $aa$, při křížení $AA \times aa$ dostaneme všechny potomky hybridní $aA$, $aA$, $aA$, $aA$ (je-li jeden z rodičů dominantní a druhý recesivní, jejich potomek musí být hybridní);
– vybereme-li jedince $aA$ dostaneme při křížení $AA \times aA$ potomky $aA$, $aA$, $AA$, $AA$.

Matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} AA & aa & aA \end{array} \\ \begin{array}{c} AA \\ aa \\ aA \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Stav $AA$ (stav 1) je absorpční (trvalý). Vypočteme stacionární rozdělení ze soustavy

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

Řešením je vektor $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0)$. Jaký je závěr? Při křížení diploidní cizosprašné rostliny s dominantním homozygotem získáme po dostatečně velkém počtu kroků vždy dominantního homozygota. Podívejme se ještě na kanonický tvar matice pravděpodobností přechodu.

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|cc|c} & aa & aA & AA \\ \hline aa & 0 & 1 & 0 \\ aA & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline AA & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}, & \mathbf{R} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Co z této matice vidíme? Je-li řetězec v určitém kroku ve stavu 2 ($aa$ recesivní homozygot), ocitne se před absorpcí v průměru jedenkrát ve stavu $aa$ a dvakrát ve stavu $aA$. Je-li řetězec ve stavu $aA$ (hybrid), ocitne se před absorpcí v průměru dvakrát ve stavu $aA$.

Střední počet kroků do absorpce ukazuje vektor

$$\mathbf{t} = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (3, 2).$$

Složky tohoto vektoru jsou střední hodnoty počtu kroků do absorpce, je-li systém na počátku v přechodném stavu 2 ($aa$ recesivní homozygot) nebo v přechodném stavu 3 ($aA$ hybrid).

Vypočteme ještě matici

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

která ukazuje, že je-li systém na počátku v některém ze dvou tranzientních stavů, bude s pravděpodobností 1 absorbován ve stavu $AA$ (dominantní homozygot).

*b) Křížení s recesivním homozygotem*:
– vybereme-li jedince $AA$, dostaneme při křížení $AA \times aa$ potomky $aA$, $aA$, $aA$, $aA$;
– vybereme-li jedince $aa$, dostaneme při křížení $aa \times aa$ potomky $aa$, $aa$, $aa$, $aa$, (potomek dvou recesivních rodičů musí být recesivní);
– vybereme-li jedince $aA$, dostaneme při křížení $aA \times aa$ potomky $aa$, $aa$, $aA$, $aA$.

Matice pravděpodobností přechodu je tvaru

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|ccc} & AA & aa & aA \\ \hline AA & 0 & 0 & 1 \\ aa & 0 & 1 & 0 \\ aA & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Stav $aa$ (stav 2) je absorpční (je to trvalý stav). Stacionární rozdělení určíme řešením soustavy

$$\begin{aligned} \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 &= \pi_2, \\ \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 &= \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1, \end{aligned}$$

výsledkem je vektor $\boldsymbol{\pi} = (0,1,0)$, který ukazuje, že při křížení diploidní rostliny s recesivním homozygotem získáme po dostatečně velkém počtu kroků vždy recesivního homozygota.

Jaký je kanonický tvar matice $\mathbf{P}$?

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|cc|c} & AA & aA & aa \\ \hline AA & 0 & 1 & 0 \\ aA & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline aa & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dále určíme matici

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Je-li řetězec v čase 0 ve stavu $AA$ (stavu 1), ocitne se před absorpcí v průměru jedenkrát ve stavu $AA$ a dvakrát ve stavu $aA$ (stavu 3). Je-li řetězec na počátku ve stavu $aA$, ocitne se před absorpcí v průměru dvakrát ve stavu $aA$.

Střední hodnoty počtu kroků do absorpce ve stavu $aa$ ukazuje vektor

$$\mathbf{t} = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (3,2),$$

tj. vyjdeme-li ze stavu $AA$, je střední hodnota počtu kroků do absorpce rovna 3, vyjdeme-li ze stavu $aA$, je tato střední hodnota rovna 2.

Vypočteme ještě matici

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

stejně jako v bodě a) vidíme, že je-li v čase 0 řetězec v jednom ze dvou tranzientních stavů $AA$ nebo $aA$, bude s pravděpodobností 1 absorbován.

*c) Křížení s hybridním jedincem:*
– vybereme-li jedince $AA$, dostaneme při křížení $AA \times aA$ potomky $aA$, $aA$, $AA$, $AA$ (při křížení dominantního a hybridního jedince dostává každý potomek alelu

$A$ od dominantního a má stejnou šanci dostat alelu $A$ nebo $a$ od hybridního, tj. se stejnou pravděpodobností dostaneme dominantního nebo hybridního potomka);
– vybereme-li jedince $aa$, dostaneme při křížení $aa \times aA$ potomky $aa$, $aA$, $aa$, $aA$ (při křížení recesivního a hybridního jedince je stejná šance, že potomek bude recesivní nebo hybridní);
– vybereme-li jedince $aA$, dostaneme při křížení $aA \times aA$ potomky $aa$, $aA$, $aA$, $AA$ (při křížení dvou hybridních jedinců má potomek stejnou šanci dostat alelu $A$ nebo $a$ od každého z rodičů).

Pro matici pravděpodobností přechodu platí

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} AA & aa & aA \end{array} \\ \begin{array}{c} AA \\ aa \\ aA \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Je vidět, že žádný stav není absorpční a žádný stav není přechodný, všechny stavy jsou trvalé. V tomto případě se tedy nejedná o absorpční Markovův řetězec.

Určíme stacionární rozdělení řešením soustavy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_1, \\ \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_2, \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 &= \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{aligned}$$

Dostaneme řešení $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Tedy při křížení diploidní cizosprašné rostliny s hybridním jedincem získáme po dostatečném počtu kroků s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ dominantního jedince, s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ recesivního jedince a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ hybridního jedince. ○

## 1.6 Skryté Markovovy modely

V dosavadním textu jsme uvažovali takové Markovovy modely, u nichž každý ze stavů odpovídal jedinému (pevně danému) pozorovanému jevu. V této kapitole se však budeme zabývat problémem, kdy jednotlivé stavy Markovova řetězce není možné přímo pozorovat a namísto toho pozorujeme hodnotu jiné veličiny, jejíž rozdělení pravděpodobnosti závisí na stavu, v němž se řetězec v daném čase nachází. Tento typ modelů, který lze chápat jako specifickou formu tzv. bayesovských sítí, budeme nazývat *skryté Markovovy modely*, případně *skryté Markovovy řetězce* tak, abychom zdůraznili diskrétní povahu skrytého procesu. Skryté Markovovy modely nacházejí uplatnění mimo jiné v oblasti genetiky, bioinformatiky, bankovnictví nebo analýzy řeči či obrazu.

Uvažujme homogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$ pro $n \in \{0, 1, \ldots, T\}$ s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, m\}$, počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{m}$. Budeme se zabývat problémem, kdy jednotlivé stavy řetězce není možné přímo pozorovat a místo toho pozorujeme hodnotu určité náhodné veličiny, jejíž rozdělení pravděpodobnosti závisí na stavu, ve kterém se řetězec $\{X_n\}$ nachází. Tento typ řetězce se nazývá *skrytý Markovův řetězec* nebo *skrytý Markovův model*. Obecně lze rozlišovat jeho dva typy. O spojitém skrytém Markovově modelu hovoříme v případě, kdy se pozorovatelná náhodná veličina řídí spojitým rozdělením pravděpodobnosti. My se však v dalším textu zaměříme pouze na jednodušší případ, kdy pozorujeme hodnoty diskrétně rozdělené náhodné veličiny, tedy diskrétní skryté Markovovy modely. Nejprve si však na následujícím příkladu představme reálnou situaci, kterou lze modelovat pomocí skrytého Markovova řetězce.

**Příklad 1.41** Navažme na příklad 1.6, v němž jsme sledovali úspěšnost výrobku na trhu a předpokládali jsme, že pokud byl výrobek úspěšný v jednom období, bude úspěšný i v tom následujícím s pravděpodobností 0,5 a naopak neúspěšný výrobek se stane úspěšným s pravděpodobností 0,4. Úspěšný výrobek však může být charakterizován vícero přímo i nepřímo měřitelnými vlastnostmi, jako například čistý zisk z prodeje, počet prodaných kusů nebo na druhé straně vnímání výrobku zákazníky či jeho oblíbenost. Jak tedy rozhodneme o úspěšnosti výrobku v daném období? Jednou z možností je sledovat jeho prodeje. S pravděpodobností 0,9 se úspěšného výrobku prodá více než 1000 kusů. Vyšší prodeje však mohou nastat i v případě, kdy je výrobek spíše neúspěšný (např. vlivem sezónnosti). Předpokládejme, že toto může nastat s pravděpodobností 0,2. Právě proto, že úspěšnost výrobku v jednotlivých obdobích nelze přímo pozorovat a k jejímu posouzení máme k dispozici jen údaje o počtu prodaných kusů, který na úspěšnosti přímo závisí, jedná se v tomto případě o skrytý Markovův řetězec. $\circ$

Uvažujme posloupnost náhodných veličin $\{O_0, O_1, \ldots, O_T\}$, kde $O_n$ je diskrétní náhodná veličina s oborem hodnot $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_M\}$, jejíž realizaci pozorujeme v čase $n$. Je-li skrytý systém v tomto čase ve stavu $j \in \mathsf{S}$, řídí se $O_t$ rozdělením $b_j(k) = P(O_t = v_k | X_t = j)$, $k = 1, \ldots, M$. Označíme-li navíc $\mathbf{B} = (b_j(k))_{j,k=1}^{m,M}$, lze celý skrytý Markovův model, který je určený parametry $\mathbf{P}, \mathbf{B}$ a $\mathbf{p}^{(0)}$, zkráceně značit $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{p}^{(0)})$.

**Příklad 1.42** Množina stavů $\mathsf{S}$ v předchozím příkladu je dvouprvková a odpovídá tomu, zda je výrobek v daném období úspěšný nebo ne. K dispozici však máme jen pozorování v podobě výše prodejů výrobku, které jsou buď vyšší nebo nižší než 1 000 kusů, pozorujeme tedy diskrétní náhodnou veličinu s dvěma možnými realizacemi, které označme $> 1000$ a $< 1000$. Matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a rozdělení pravděpobnosti v jednotlivých stavech $\mathbf{B}$ mají tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5;\ 0{,}5 \\ 0{,}4;\ 0{,}6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}9;\ 0{,}1 \\ 0{,}2;\ 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

To, zda bude výrobek úspěšný ihned po jeho uvedení na trh, udává počáteční rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}^{(0)}$. ○

Shrňme si nyní, jak funguje skrytý Markovův model $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{p}^{(0)})$.

1. Nejprve je na základě počátečního rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}^{(0)}$ vygenerován úvodní stav $X_0 = i$ a $n$ je rovno 0.
2. Z rozdělení pravděpodobnosti, které odpovídá stavu $X_n = i$, tedy $b_i(.)$, je generováno pozorování $O_n$.
3. Na základě matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ je generován nový stav $X_{n+1} = j$ a $n = n + 1$.
4. Kroky 2–4 se opakují až do té doby, kdy bude platit, že $n = T$.

Výsledkem tohoto procesu je posloupnost stavů $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_T\}$ a posloupnost pozorování $\mathbf{O} = \{O_0, O_1, \ldots, O_T\}$, resp. realizace obou posloupností. Pro jednoduchost nebudeme v následujícím textu rozlišovat mezi teoretickými náhodnými veličinani a jejich realizacemi. Ve většině případů je pozorovateli známá pouze druhá posloupnost, na základě níž se snažíme co nejpřesněji analyzovat skrytou posloupnost stavů $\mathbf{X}$.

**Příklad 1.43** [Rabiner, s. 331] Mějme skrytý Markovův model $\lambda$ zachycující výsledky hodů vždy jednou ze tří mincí ($R$ – rub, $L$ – líc), kdy jedna je pravá ($b_1(R) = b_1(L) = 0{,}5$) a dvě falešné ($b_2(R) = 0{,}75$ a $b_2(L) = 0{,}25$, respektive $b_3(R) = 0{,}25$ a $b_3(L) = 0{,}75$). Všechny pravděpodobnosti přechodu (volby mince) jsou rovny $1/3$, stejně jako v případě počátečního rozdělení pravděpodobnosti. V této situaci se můžeme potýkat s několika typy otázek:

a) Pozorujeme posloupnost

$$\mathbf{O}_1 = \{R, R, R, R, L, R, L, L, L, L\}.$$

Jaká posloupnost skrytých stavů $\mathbf{X}_1$ je v této situaci nejpravděpodobnější? S jakou pravděpodobností pak budeme pozorovat danou posloupnost $\mathbf{O}_1$?

b) Jaká je pravděpodobnost, že pozorovaná posloupnost $\mathbf{O}_1$ byla celá generována stavem 1 a házeli jsme tedy pouze pravou mincí (tuto posloupnost označme $\mathbf{X}_2$)?

c) Pozorujme nyní posloupnost

$$\mathbf{O}_2 = \{R, L, L, R, L, R, R, L, L, R\}.$$

Jak se změní odpovědi na otázky a) a b)?

d) Mějme novou matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 0{,}9;\ 0{,}05;\ 0{,}05 \\ 0{,}45;\ \ 0{,}1;\ 0{,}45 \\ 0{,}45;\ 0{,}45;\ \ 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Jak se za platnosti tohoto nového modelu (ozn. $\lambda'$) změní pravděpodobnosti pozorování $\mathbf{O}_1$ a $\mathbf{O}_2$, uvažujeme-li posloupnosti stavů $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$?

Zapišme nejprve parametry původního modelu $\lambda$:

$$\mathsf{S} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathbf{V} = \{R, L\}, \quad \mathbf{p}^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}5;\ \ 0{,}5 \\ 0{,}75;\ 0{,}25 \\ 0{,}25;\ 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

ad a) Vzhledem k tomu, že jsou si všechny pravděpodobnosti přechodu rovny, je nejpravděpodobnější taková posloupnost stavů, pro níž je maximální pravděpodobnost každého z dílčích pozorování, tedy

$$\mathbf{X}_1 = \{2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3\}.$$

Pravděpodobnost sledované posloupnosti stavů $\mathbf{O}_1$ je tak

$$P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1|\lambda) = (0{,}75)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10},$$

kde $P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1|\lambda)$ označuje pravděpodobnost, že za platnosti modelu $\lambda$ byla posloupností skrytých stavů $\mathbf{X}_1$ generovaná posloupnost $\mathbf{O}_1$.

ad b) Pokud bychom házeli pouze pravou mincí, a posloupnost skrytých stavů by tedy byla $\mathbf{X}_2 = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, pozorovali bychom $\mathbf{O}_1$ s pravděpodobností

$$P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_2|\lambda) = (0{,}5)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

Z poměru pravděpodobností $P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1|\lambda)$ a $P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_2|\lambda)$, který je roven

$$R = \frac{P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1|\lambda)}{P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_2|\lambda)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = 57{,}67,$$

navíc vidíme, že scénář $\mathbf{X}_1$ je výrazně pravděpodobnější než varianta, že jsme házeli pouze první mincí.

ad c) V tomto případě je nejpravděpodobnější posloupnost stavů

$$\mathbf{X}_3 = \{2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2\}.$$

Vzhledem k tomu, že počet padlých rubů a líců je v posloupnosti $\mathbf{O}_1$ stejný jako v $\mathbf{O}_2$, zůstanou ostatní odpovědi na otázky a) a b) nezměněné.

ad d) Pravděpodobnosti pozorování posloupnosti $\mathbf{O}_1$ při daných posloupnostech stavů $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ jsou nyní

$$P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_1|\lambda') = (0{,}75)^{10} \left(\frac{1}{3}\right) (0{,}1)^6 (0{,}45)^3$$

a

$$P(\mathbf{O}_1, \mathbf{X}_2|\lambda') = (0{,}5)^{10} \left(\frac{1}{3}\right) (0{,}9)^9.$$

Poměr těchto pravděpodobností je

$$R = 1{,}36 \cdot 10^{-5}$$

a scenář $\mathbf{X}_2$ je tak nyní mnohem pravděpodobnější než $\mathbf{X}_1$.

Podívejme se ještě, jak se změní výsledky, pozorujeme-li namísto $\mathbf{O}_1$ posloupnost $\mathbf{O}_2$. Pravděpodobnost při prvním scénáři bude rovna

$$P(\mathbf{O}_2, \mathbf{X}_1|\lambda') = \frac{1}{3}(0{,}1)^6 (0{,}45)^3 (0{,}25)^4 (0{,}75)^6,$$

druhá pravděpodobnost se nezmění

$$P(\mathbf{O}_2, \mathbf{X}_2|\lambda') = (0{,}5)^{10} \left(\frac{1}{3}\right) 0{,}9^9$$

a na základě poměru pravděpodobností, který je tentokrát roven $1{,}67 \cdot 10^{-7}$ opět můžeme říct, že scénář $\mathbf{X}_2$ je mnohem pravděpodobnější než $\mathbf{X}_1$. ○

V případě modelu $\lambda$, se nám díky rovnoměrně rozděleným pravděpodobnostem přechodu podařilo najít nejpravděpodobnější posloupnosti stavů $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_3$ poměrně snadno. V případě modelu $\lambda'$ je již situace komplikovanější a tím, jak v takovém případě postupovat, se budeme zabývat v následující kapitole.

### 1.6.1 Analýza skrytých Markovových modelů

Při práci se skrytými Markovovými řetězci se standardně potýkáme se třemi základními typy problémů:

P1 Při daném modelu $\lambda$ a posloupnosti $\mathbf{O}$ se snažíme určit, jaká je pravděpodobnost $P(\mathbf{O}|\lambda)$, že tato posloupnost byla získána právě za použití modelu $\lambda$. Tento problém tedy zahrnuje situaci, kdy potřebujeme určit, jak dobře daný model odpovídá našim pozorováním, případně kdy chceme vybrat takový model, který bude našim pozorováním odpovídat nejlépe.

P2 Při daném modelu $\lambda$ a posloupnosti $\mathbf{O}$ chceme najít takovou posloupnost stavů $\mathbf{X}$, která bude v určitém smyslu optimální.

P3 Na základě pozorování $\mathbf{O}$ chceme co nejlépe odhadnout parametry generujícího modelu $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{p}^{(0)})$.

**Problém 1 – řešení**

Zabývejme se nyní situací, kdy chceme určit, jak pravděpodobná je za platnosti (známého) modelu $\lambda$ daná posloupnost pozorování $\mathbf{O} = \{O_0, O_1, \ldots, O_T\}$.

Tento problém je řešitelný několika algoritmy. Principem prvního z nich je výpočet pravděpodobnosti posloupnosti $\mathbf{O}$ zvlášť pro každou možnou posloupnost $T+1$ stavů $\mathbf{X}$. Takových posloupností je dohromady $m^{T+1}$, uvažujme ale nejprve jen jednu z nich,

$$\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_T\}. \tag{1.21}$$

Předpokládáme-li nezávislost pozorování v jednotlivých časech $t$, je pravděpodobnost posloupnosti $\mathbf{O}$ při dané posloupnosti skrytých stavů $\mathbf{X}$ a modelu $\lambda$ rovna

$$P(\mathbf{O}|\mathbf{X}, \lambda) = \prod_{n=0}^{T} P(O_n|X_n, \lambda) = b_{X_0}(O_0) \cdot b_{X_1}(O_1) \cdots b_{X_T}(O_T), \tag{1.22}$$

kde $b_{X_n}(O_n)$ označuje pravděpodobnost toho, že nacházel-li se skrytý systém v čase $n$ ve stavu $X_n$, bylo generováno pozorování $O_n$. Pravděpodobnost posloupnosti $\mathbf{X}$ je

$$P(\mathbf{X}|\lambda) = p^{(0)}_{X_0} p_{X_0 X_1} \cdots p_{X_{T-1} X_T}, \tag{1.23}$$

zde $p_{X_n X_{n+1}}$ označuje pravděpodobnosti přechodu mezi stavy, v nichž se skrytý řetězec nacházel v časech $n$ a $n+1$. S využitím základního vztahu pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti lze pravděpodobnost toho, že za platnosti modelu $\lambda$ pozorujeme posloupnost $\mathbf{O}$ a posloupnost skrytých stavů je zároveň rovna $\mathbf{X}$, vyjádřit jako

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}, \mathbf{X}|\lambda) &= P(\mathbf{O}|\mathbf{X}, \lambda) P(\mathbf{X}|\lambda) = \\ &= p^{(0)}_{X_0} b_{X_0}(O_0) p_{X_0 X_1} b_{X_1}(O_1) \cdots p_{X_{T-1} X_T} b_{X_T}(O_T). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti získáme výslednou pravděpodobnost pozorování $\mathbf{O}$ za platnosti modelu $\lambda$ součtem pravděpodobností (1.24) stanovených pro všechny možné posloupnosti $\mathbf{X}$

$$P(\mathbf{O}|\lambda) = \sum_{\mathbf{X}} P(\mathbf{O}|\mathbf{X}, \lambda) P(\mathbf{X}|\lambda). \tag{1.25}$$

Ačkoliv je tento postup poměrně intuitivní, již při malém počtu stavů a pozorování je dosti výpočetně náročný. Efektivnější alternativu představuje tzv. *dopředný algoritmus.*

Pro odvození dopředného algoritmu uvažujme novou charakteristiku $\alpha_n(i)$ definovanou vztahem

$$\alpha_n(i) = P(O_0, O_1, \ldots, O_n, X_n = i|\lambda). \tag{1.26}$$

Tato proměnná tedy představuje pravděpodobnost, že pozorujeme posloupnost $\{O_0, \ldots, O_n\}$ a že se proces v čase $n$ nachází ve stavu $X_n = i$. Stavy $X_0, \ldots, X_{n-1}$ však nejsou určeny a uvažujeme tedy všechny varianty. S využitím této charakteristiky pak lze dopředný algoritmus následovně rozdělit do tří fází:

1. Inicializace
$$\alpha_0(i) = p_i^{(0)} b_i(O_0), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.27}$$

2. Indukce
$$\alpha_{n+1}(j) = \left[ \sum_{i=1}^{m} \alpha_n(i) p_{ij} \right] b_j(O_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, T-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.28}$$

3. Ukončení
$$P(\mathbf{O}|\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_T(i). \tag{1.29}$$

Pojďme si nyní jednotlivé kroky algoritmu podrobněji rozebrat. V prvním kroku nejprve na základě počátečního rozdělení pravděpodobnosti určíme, s jakou pravděpodobností proces začne ve stavu $i$ a bude v tomto stavu generováno pozorování $O_0$, tento výpočet zopakujeme pro každý stav z množiny $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, m\}$ a získáme tak počáteční hodnoty $\alpha_0(i)$. Hlavní část algoritmu představuje indukce. V indukčním kroku při výpočtu pravděpodobnosti, že se stav v čase $n+1$ nacházel ve stavu $j$ a bylo zde generováno pozorování $O_{n+1}$, uvažujeme všechny přípustné scénáře, jak jsme do tohoto stavu mohli dospět. Vzhledem k tomu, že všechny varianty scénářů až do časového okamžiku $n$ jsou již ohodnoceny pravděpodobnostmi $\alpha_n(i)$, $i = 1, \ldots, m$ a lze je tedy využít k výpočtu, stačí jen zohlednit pravděpodobnosti přechodu z každého ze stavů $i$ do daného stavu $j$ a generování pozorování $O_{n+1}$ tímto stavem. Stejnou úvahu pak opět zopakujeme pro všechny stavy $j = 1, \ldots, m$ a postupně i pro všechny časové okamžiky $n = 0, 1, \ldots, T-1$. Protože podobně jako ve všech předchozích časových okamžicích nemáme stanoveno, v jakém stavu celý proces končí, v ukončovacím kroku získáme hledanou pravděpodobnost $P(\mathbf{O}|\lambda)$ jednoduše sečtením všech hodnot $\alpha_T(i)$.

Poslední možností, kterou si zde uvedeme, je *zpětný algoritmus*. Ten pracuje na obdobném principu jako algoritmus dopředný, namísto $\alpha_n(i)$ však nyní pracujeme s pravděpodobností

$$\beta_n(i) = P(O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_T | X_n = i, \lambda). \tag{1.30}$$

Tentokrát tedy ohodnocujeme pravděpodobnost, že budeme pozorovat posloupnost $\{O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_T\}$, nacházíme-li se v čase $n$ ve stavu $i$ a platí-li model $\lambda$. Základní fáze algoritmu jsou:

1. Inicializace
$$\beta_T(i) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.31}$$

2. Indukce
$$\beta_n(i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} b_j(O_{n+1}) \beta_{n+1}(j), \quad n = T-1, T-2, \ldots, 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.32}$$

3. Ukončení
$$P(\mathbf{O}|\lambda) = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} b_i(O_0) \beta_0(i). \tag{1.33}$$

U tohoto algoritmu nejprve všechny hodnoty $\beta_T(i)$ položíme rovny jedné. Podstatnou část algoritmu představuje druhý, indukční krok, v němž tentokrát postupujeme „zpětně“ v čase. Předpokládáme-li, že v čase $n$ je systém ve stavu $i$, musíme při výpočtu pravděpodobnosti, že budeme v následujících časových okamžicích pozorovat hodnoty $\{O_{n+1}, \ldots, O_T\}$, do naší úvahy zahrnout všechny možné posloupnosti stavů $\{X_{n+1}, \ldots, X_T\}$, jimiž mohl skrytý řetězec projít. Chování od času $n+1$ je však již popsáno pomocí pravděpodobností $\beta_{n+1}(j)$ a zbývá tedy jen zohlednit pravděpodobnosti přechodu z daného stavu $i$ do stavů $j = 1, \ldots, m$ (člen $p_{ij}$) a pravděpodobnost generování pozorování $O_{n+1}$ v těchto stavech (člen $b_j(O_{n+1})$). Hledanou hodnotu $\beta_n(i)$ pak získáme aplikací věty o úplné pravděpodobnosti. Tuto úvahu následně zopakujeme pro všechny stavy $i = 1, \ldots, m$ a postupně také pro všechny časové okamžiky $T-1, \ldots, 0$. Pro celkové ohodnocení modelu pak musíme vzít v úvahu všechny stavy, z nichž proces mohl vycházet. Výslednou pravděpodobnost modelu tedy získáme jako vážený součet všech hodnot $\beta_0(i)$, kdy váhy tvoří jednak počáteční rozdělení pravděpodobnosti a také pravděpodobnost generování úvodního pozorování $O_0$ v daných stavech.

**Příklad 1.44** [Ocone, kap. 8, s. 4] Uvažujme sázkovou hru, založenou na hodech mincí. Kasino má pro hru k dispozici dvě mince, první mince je pravá a pravděpodobnost padnutí rubu (R) i líce (L) je vždy 0,5, druhá mince je však vyvážená tak, že pravděpodobnost padnutí rubu je snížena na 0,3 ve prospěch líce. Pravděpodobnost výměny mince je po každé hře rovna 0,1 a hráč neví, kterou z mincí bylo právě házeno a sleduje pouze posloupnost padlých rubů a líců. Na začátku hry je každá z mincí vybrána s pravděpodobností 0,5. Našim úkolem je určit pravděpodobnost, že pozorujeme posloupnost výsledků $\mathbf{O} = \{L, L, L, R, R, L, L, R, L, L\}$, víme-li, že posloupnost mincí, jimiž se házelo, byla $\mathbf{X} = \{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$.

Takto nastavená hra je příkladem skrytého Markovova řetězce, kdy pozorování nabývají hodnot z množiny $\mathbf{V} = \{R, L\}$ a množina stavů je tvořena dvěma prvky; stavem 1 – pravá mince a stavem 2 – falešná mince. Samotný skrytý Markovův řetězec $X_n$ pak popisuje, kterou ze dvou mincí bylo v daném kole házeno. Počáteční rozdělení pravděpodobnosti je

$$\mathbf{p}^{(0)} = (0{,}5; 0{,}5),$$

matice pravděpodobností přechodu má v tomto případě tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9; \ 0{,}1 \\ 0{,}1; \ 0{,}9 \end{pmatrix}$$

a pravděpodobnosti padnutí jednotlivých výsledků hodu tvoří matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}5; \ 0{,}5 \\ 0{,}3; \ 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

V situaci, kdy je našim úkolem pouze vyhodnotit, jak pravděpodobná je daná posloupnost stavů, můžeme využít vztah (1.24). Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}, \mathbf{X}|\lambda) &= (0{,}5 \cdot 0{,}7)(0{,}9 \cdot 0{,}7)^2(0{,}9 \cdot 0{,}3)^2(0{,}9 \cdot 0{,}7)(0{,}1 \cdot 0{,}5)(0{,}9 \cdot 0{,}5)^3 \\ &\doteq 0{,}000\,029. \end{aligned}$$

Pokud bychom ale na základě posloupnosti pozorování chtěli ohodnotit, jak je model, s nímž pracujeme, pravděpodobný, museli bychom k výpočtu využít buď dopředný nebo zpětný algoritmus. Naznačme si nyní oba postupy.

Při dopředném algoritmu je potřeba nejprve vypočítat pravděpodobnosti $\alpha_0(1)$ a $\alpha_0(2)$. Hodnotu $\alpha_0(1)$ získáme jako součin pravděpodobností, že jako první házeme mincí číslo 1 a že na této minci padne líc, tedy $\alpha_0(1) = p_1^{(0)} b_1(L) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Obdobně pro druhou minci platí $\alpha_0(2) = p_2^{(0)} b_2(L) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$. V druhém kroku výpočtu nejprve předpokládáme, že bylo v druhém hodu házeno mincí číslo 1. Tato situace ovšem mohla nastat dvěma způsoby, buď bylo nejprve házeno první mincí, s pravděpodobností $\alpha_0(1)p_{11}$, nebo byl úvodní hod proveden mincí druhou a to s pravděpodobností $\alpha_0(2)p_{21}$. Výsledek druhého hodu, tedy padnutí líce, zohledníme pravděpodobností $b_1(L)$. Analogickou úvahu můžeme provést i pro případ, že bylo v druhém hodu házeno druhou mincí. Celkově tedy platí

$$\alpha_1(1) = [\alpha_0(1)p_{11} + \alpha_0(2)p_{21}]\, b_1(L) = (0{,}25 \cdot 0{,}9 + 0{,}35 \cdot 0{,}1)\, 0{,}5 = 0{,}130,$$

$$\alpha_1(2) = [\alpha_0(1)p_{12} + \alpha_0(2)p_{22}]\, b_2(L) = (0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}35 \cdot 0{,}9)\, 0{,}7 = 0{,}238.$$

Takto postupně, vždy s využitím předchozích hodnot $\alpha_n(.)$, vypočítáme všechny hodnoty proměnné $\alpha$. Výsledná pravděpodobnost modelu je rovna součtu hodnot $\alpha_9(1)$ a $\alpha_9(2)$. V našem případě tedy platí

$$P(\mathbf{O}|\lambda) = \alpha_9(1) + \alpha_9(2) \doteq 0{,}0006 + 0{,}0010 = 0{,}0016.$$

Pro zpětné ohodnocení pravděpodobnosti modelu nejprve $\beta_9(1)$ i $\beta_9(2)$ položme rovny 1. V druhém kroku je potřeba spočítat hodnoty $\beta_8(1)$ a $\beta_8(2)$, tedy pravděpodobnosti, že jsme v posledním hodu pozorovali líc v případě, kdy jsme v předposledním házeli první, resp. druhou mincí. V případě, že jsme v předposledním hodu použili první minci, mohly následovat dva scénáře. Buď jsme následně s pravděpodobností $p_{11} \cdot b_1(L) \cdot \beta_9(1)$ házeli opět první mincí a hodili líc, nebo jsme v posledním hodu hodili líc mincí druhou. Toto mohlo nastat s pravděpodobností $p_{12} \cdot b_2(L) \cdot \beta_9(2)$. Na oba tyto scénáře lze nahlížet jako na disjunktní jevy, kdy $\beta_8(1)$ přestavuje pravděpodobnost jejich sjednocení. Pro její hodnotu tedy platí

$$\beta_8(1) = p_{11} \cdot b_1(L) \cdot \beta_9(1) + p_{12} \cdot b_2(L) \cdot \beta_9(2) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 1 = 0{,}52.$$

Obdobnou úvahu lze zopakovat i pro pravděpodobnost $\beta_8(2)$ (v posledním hodu padl líc, když jsme v předposledním házeli druhou mincí), která je rovna

$$\beta_8(2) = p_{21} \cdot b_1(L) \cdot \beta_9(1) + p_{22} \cdot b_2(L) \cdot \beta_9(2) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 1 = 0{,}68.$$

Takto bychom zpětně vyhodnotili všechny pravděpodobnosti $\beta$, na základě nichž pak výslednou pravděpodobnost modelu získáme jako

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}|\lambda) &= p_1^{(0)} \cdot b_1(L) \cdot \beta_0(1) + p_2^{(0)} \cdot b_2(L) \cdot \beta_0(2) \doteq \\ &\doteq 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}0024 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}0029 = 0{,}0016. \end{aligned}$$

○

**Problém 2 – řešení**

V rámci této části se budeme snažit nalézt takovou posloupnost stavů, která bude v určitém smyslu optimálně odpovídat našim pozorováním. Nejjednodušší možností, jak definovat toto kritérium optimality je, že budeme vždy volit takový stav $X_n$, který je v daném čase $n$ nejpravděpodobnější.

Zaveďme nejprve novou veličinu

$$\gamma_n(i) = P(X_n = i|\mathbf{O}, \lambda) \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.34}$$

která nám říká, jaká je pravděpodobnost, že se proces v čase $n$ nachází ve stavu $i$, pozorujeme-li posloupnost $\mathbf{O}$ a platí-li model $\lambda$. Vztah (1.34) lze s využitím znalostí o podmíněné a úplné pravděpodobnosti dále upravit

$$\begin{aligned}\gamma_n(i) &= P(X_n = i|\mathbf{O}, \lambda) = \\ &= \frac{P(\mathbf{O}, X_n = i|\lambda)}{P(\mathbf{O}|\lambda)} = \\ &= \frac{P(\mathbf{O}, X_n = i|\lambda)}{\sum_{i=1}^{m} P(\mathbf{O}, X_n = i|\lambda)}.\end{aligned} \tag{1.35}$$

Člen $P(\mathbf{O}, X_n = i|\lambda)$ představuje pravděpodobnost, že se proces v čase $n$ nachází ve stavu $i$ a generuje posloupnost pozorování $\mathbf{O}$. Tuto situaci jsme však již dříve modelovali pomocí veličin $\alpha_n(i)$ a $\beta_n(i)$ a vztah (1.35) tak můžeme zapsat ve finální podobě

$$\gamma_n(i) = \frac{\alpha_n(i)\beta_n(i)}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_n(i)\beta_n(i)}. \tag{1.36}$$

Chceme-li nyní nalézt stav $X_n^*$, který je v daném čase nejpravděpodobnější, stačí vyřešit maximalizační úlohu

$$X_n^* = \arg \max_{1 \le i \le m} \gamma_n(i) \quad n = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.37}$$

Problémem tohoto postupu může být fakt, že nezohledňuje pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy. Ačkoliv takto najdeme posloupnost stavů, které jsou v daný okamžik nejpravděpodobnější, samotná posloupnost jako celek může být velmi nepravděpodobná nebo dokonce nesmyslná. Může se totiž stát, že se v takto nalezené posloupnosti budou vedle sebe vyskytovat stavy, jimž odpovídá velmi malá nebo i nulová pravděpodobnost přechodu. Alternativním kritériem pro řešení problému 2 tedy může být nalezení takové posloupnosti stavů, která je při daných pozorováních $\mathbf{O}$ nejpravděpodobnější jako celek. Úlohu maximalizace výrazu $P(\mathbf{X}|\mathbf{O}, \lambda)$ nebo alternativně $P(\mathbf{X}, \mathbf{O}|\lambda)$ řeší *Viterbiho algoritmus.*

I pro účely Viterbiho algoritmu musíme nejprve zavést novou veličinu

$$\delta_n(i) = \max_{X_0, \ldots, X_{n-1}} P(X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n = i, O_0, \ldots, O_n|\lambda). \tag{1.38}$$

Tu lze interpretovat jako nejvyšší pravděpodobnost, s níž můžeme sestavit posloupnost stavů $\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$ tak, že v čase $n$ se systém nachází ve stavu $i$ a zároveň pozorujeme posloupnost pozorování $\{O_0, \ldots, O_n\}$. Pro následující časový okamžik platí

$$\delta_{n+1}(j) = \max_{1 \le i \le m} [\delta_n(i) p_{ij}] b_j(O_{n+1}). \tag{1.39}$$

Zaveďme ještě pomocnou proměnnou $\psi$, pomocí níž budeme dle vztahu (1.43) zaznamenávat, ze kterého stavu byl v čase $n$ s největší pravděpodobostí uskutečněn přechod do daného stavu $j$ a která nám v závěrečném kroku algoritmu umožní nalézt nejpravděpodobnější posloupnost stavů $\mathbf{X}^*$. Celý algoritmus vypadá následovně:

1. Inicializace

$$\delta_0(i) = p_i^{(0)} b_i(O_0), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.40}$$

$$\psi_0(i) = 0 \quad \forall i. \tag{1.41}$$

2. Rekurze

$$\delta_n(j) = \max_{1 \leq i \leq m} [\delta_{n-1}(i) p_{ij}] b_j(O_n), \quad n = 1, 2, \ldots, T, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.42}$$

$$\psi_n(j) = \arg \max_{1 \leq i \leq m} [\delta_{n-1}(i) p_{ij}], \quad n = 1, 2, \ldots, T, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.43}$$

3. Ukončení

$$P^* = \max_{1 \leq i \leq m} \delta_T(i), \tag{1.44}$$

$$X_T^* = \arg \max_{1 \leq i \leq m} \delta_T(i). \tag{1.45}$$

4. Zpětné hledání cesty

$$X_n^* = \psi_{n+1}(X_{n+1}^*), \quad n = T-1, T-2, \ldots, 0. \tag{1.46}$$

Až na poslední krok je Viterbiho algoritmus velmi podobný dopřednému. Jelikož však nyní hledáme jen jedinou optimální posloupnost stavů, sumační znak je zde nahrazen maximem. Stejného výsledku dosáhneme pomocí alternativního Viterbiho algoritmu, který namísto původních veličin pracuje s jejich logaritmy. Celý algoritmus je pak výpočetně méně náročný.

**Příklad 1.45** [Rabiner, s. 341] Mějme stejný model jako v příkladu 1.43. Házeme tedy třemi mincemi, u nichž je pravděpodobnost padnutí rubu postupně rovna 0,5, 0,75 a 0,25, všechny pravděpodobnosti přechodu jsou rovny 1/3, stejně jako složky počátečního rozdělení pravděpodobnosti. Za předpokladu, že pozorujeme posloupnost

$$\mathbf{O} = \{R, R, R, R, L, R, L, L, L, L\},$$

chceme pomocí Viterbiho algoritmu nalézt nejpravděpodobnější posloupnost stavů $\mathbf{X}^*$.

Vzhledem k tomu, že jsou si všechny pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}$ rovny, nemusíme tento člen uvažovat (podobně jako počáteční rozdělení), celý výpočet se tak podstatně zjednoduší. V prvním kroku nejprve určíme

$$\delta_0(1) = 0{,}5, \ \delta_0(2) = \mathbf{0{,}75}, \ \delta_0(3) = 0{,}25 \ \text{ a } \ \psi_0(1) = \psi_0(2) = \psi_0(3) = 0$$

a v rámci rekurzního kroku pak postupně získáme hodnoty

$$
\begin{array}{llll}
\delta_1(1) = 0{,}75 \cdot 0{,}5 & \delta_1(2) = \mathbf{0{,}75 \cdot 0{,}75} & \delta_1(3) = 0{,}75 \cdot 0{,}25 & \psi_1(.) = 2 \\
\delta_2(1) = (0{,}75)^2 \cdot 0{,}5 & \delta_2(2) = \mathbf{(0{,}75)^2 \cdot 0{,}75} & \delta_2(3) = (0{,}75)^2 \cdot 0{,}25 & \psi_2(.) = 2 \\
\delta_3(1) = (0{,}75)^3 \cdot 0{,}5 & \delta_3(2) = \mathbf{(0{,}75)^3 \cdot 0{,}75} & \delta_3(3) = (0{,}75)^3 \cdot 0{,}25 & \psi_3(.) = 2 \\
\delta_4(1) = (0{,}75)^4 \cdot 0{,}5 & \delta_4(2) = (0{,}75)^4 \cdot 0{,}25 & \delta_4(3) = \mathbf{(0{,}75)^4 \cdot 0{,}75} & \psi_4(.) = 2 \\
\delta_5(1) = (0{,}75)^5 \cdot 0{,}5 & \delta_5(2) = \mathbf{(0{,}75)^5 \cdot 0{,}75} & \delta_5(3) = (0{,}75)^5 \cdot 0{,}25 & \psi_5(.) = 3 \\
\delta_6(1) = (0{,}75)^6 \cdot 0{,}5 & \delta_6(2) = (0{,}75)^6 \cdot 0{,}25 & \delta_6(3) = \mathbf{(0{,}75)^6 \cdot 0{,}75} & \psi_6(.) = 2 \\
\delta_7(1) = (0{,}75)^7 \cdot 0{,}5 & \delta_7(2) = (0{,}75)^7 \cdot 0{,}25 & \delta_7(3) = \mathbf{(0{,}75)^7 \cdot 0{,}75} & \psi_7(.) = 3 \\
\delta_8(1) = (0{,}75)^8 \cdot 0{,}5 & \delta_8(2) = (0{,}75)^8 \cdot 0{,}25 & \delta_8(3) = \mathbf{(0{,}75)^8 \cdot 0{,}75} & \psi_8(.) = 3 \\
\delta_9(1) = (0{,}75)^9 \cdot 0{,}5 & \delta_9(2) = (0{,}75)^9 \cdot 0{,}25 & \delta_9(3) = \mathbf{(0{,}75)^9 \cdot 0{,}75} & \psi_9(.) = 3
\end{array}
$$

Vzhledem k rovnosti všech pravděpodobností přechodu $p_{ij}$, je hodnota $\psi_n(j)$, $j = 1, 2, 3$, pro každý stav $j$ shodná a odpovídá tomu stavu $i$, pro nějž je maximální hodnota $\delta_{n-1}(i)$ (ty jsou vyznačeny tučně). V posledním kroku algoritmu zjistíme, že $P^* = 0{,}75^{10}$ a $X_T^* = 3$. Pokud jsme tedy pozorovali posloupnost $\mathbf{O}$, je při daném modelu nejpravděpodobnější, že jsme házeli postupně mincemi číslo $2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3$ a 3. Díky shodným pravděpodobnostem přechodu i počátečnímu rozdělení pravděpodobnosti tento výsledek odpovídá výsledku v příkladu 1.43 a úlohu tak lze řešit bez ohledu na tyto pravděpodobnosti. Jak postupovat v případě, kdy jednotlivé stavy nejsou rovnocenné, ukazuje následující příklad.

○

**Příklad 1.46** [Ocone, kap. 8, s. 16] Uvažujme skrytý Markovův řetězec s množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, 3\}$, generující pozorování z množiny $\mathbf{V}$={A, B, C}. Parametry modelu mají následující hodnoty:

$$\mathbf{p}^{(0)} = (0{,}2; 0{,}3; 0{,}5),$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4 \\ 0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2 \\ 0{,}1;\ 0{,}6;\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}25;\ 0{,}35;\ 0{,}4 \\ 0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}65 \\ 0{,}5;\ 0{,}45;\ 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Naší úlohou je nalézt nejpravděpodobnější posloupnost stavů $\mathbf{X}^*$ za předpokladu, že jsme pozorovali posloupnost $\mathbf{O} = \{A, B, C\}$.

V prvním kroku Viterbiho algoritmu opět nejprve určíme

$$\delta_0(1) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05, \quad \delta_0(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03, \quad \delta_0(3) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

a

$$\psi_0(1) = \psi_0(2) = \psi_0(3) = 0.$$

Následně dopočítáme hodnoty pro čas $n = 1$

$$
\begin{aligned}
\delta_1(1) &= \max\{0{,}05 \cdot 0{,}3; 0{,}03 \cdot 0{,}4; \mathbf{0{,}25} \cdot \mathbf{0{,}1}\} \cdot 0{,}35 = 0{,}0087\,5, \\
\delta_1(2) &= \max\{0{,}05 \cdot 0{,}3; 0{,}03 \cdot 0{,}4; \mathbf{0{,}25} \cdot \mathbf{0{,}6}\} \cdot 0{,}25 = 0{,}037\,50, \\
\delta_1(3) &= \max\{0{,}05 \cdot 0{,}4; 0{,}03 \cdot 0{,}2; \mathbf{0{,}25} \cdot \mathbf{0{,}3}\} \cdot 0{,}45 = 0{,}033\,75.
\end{aligned}
$$

Ve všech třech případech jsou hodnoty $\delta_1(j), j \in \mathsf{S}$ získány za předpokladu, že se systém v čase 0 nacházel ve stavu $i = 3$ a tedy

$$\psi_1(1) = \psi_1(2) = \psi_1(3) = 3.$$

Pro čas $n = 2$ platí

$$\begin{aligned}
\delta_2(1) &= \max\{0{,}00875 \cdot 0{,}3; \mathbf{0{,}0375} \cdot \mathbf{0{,}4}; 0{,}03375 \cdot 0{,}1\} \cdot 0{,}4 = 0{,}006,\\
\delta_2(2) &= \max\{0{,}00875 \cdot 0{,}3; 0{,}0375 \cdot 0{,}4; \mathbf{0{,}03375} \cdot \mathbf{0{,}6}\} \cdot 0{,}65 = 0{,}013,\\
\delta_2(3) &= \max\{0{,}00875 \cdot 0{,}4; 0{,}0375 \cdot 0{,}2; \mathbf{0{,}03375} \cdot \mathbf{0{,}3}\} \cdot 0{,}05 = 0{,}005
\end{aligned}$$

a nyní

$$\psi_2(1) = 2, \quad \psi_2(2) = \psi_2(3) = 3.$$

Vzhledem k tomu, že největší hodnota odpovídá $\delta_2(2)$, zjistíme zpětně, že nejpravděpodobnější posloupnost je tvořená stavy $X_2^* = 2$, $X_1^* = \psi_2(2) = 3$, $X_0^* = \psi_1(3) = 3$, a tedy $\mathbf{X}^* = \{3, 3, 2\}$. ○

**Problém 3 – řešení**

V praxi se často nacházíme v situaci, kdy neznáme přesné hodnoty parametrů modelu $\lambda(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{p}^{(0)})$ a na základě dostupných pozorování se je snažíme odhadnout. V případě, kdy známe jak posloupnost pozorování $\mathbf{O}$, tak i stavů $\mathbf{X}$, lze hodnoty parametrů modelu odhadnout přímo. Pokud jako $A_{ij}$ označíme počet přechodů ze stavu $i$ do stavu $j$ a jako $B_i(k)$ počet případů, kdy bylo stavem $i$ generováno pozorování $v_k$, lze prvky matic $\mathbf{P}$ a $\mathbf{B}$ odhadnout jako

$$\hat{p}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{l=1}^{m} A_{il}}, \quad \hat{b}_j(k) = \frac{B_i(k)}{\sum_{l=1}^{M} B_i(l)}, \quad i, j = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, M. \tag{1.47}$$

V případě, kdy máme k dispozici údaje o několika opakovaních skrytého řetězce, lze odhadnout také hodnoty počátečního rozdělení pravděpodobnosti. Odhad $p_i^{(0)}$ by v tom případě odpovídal relativnímu počtu případů, kdy celý řetězec začínal ve stavu $i$.

**Příklad 1.47** Vraťme se ještě jednou k příkladu 1.41 a představme si, že jsme v historických záznamech nalezli nejen mesíční údaje o prodejích, ale také vyhodnocení úspěšnosti výrobku za posledních pět let. Na základě těchto údajů jsme spočítali následující veličiny

$$A_{11} = 14, \quad A_{12} = 14, \quad A_{21} = 13, \quad A_{22} = 18$$

a

$$B_1(> 1\,000) = 25, \quad B_1(< 1\,000) = 3, \quad B_2(> 1\,000) = 8, \quad B_2(< 1\,000) = 24.$$

Odhady parametrů modelu jsou tedy

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \frac{14}{28} & \frac{14}{28} \\ \frac{13}{31} & \frac{18}{31} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0{,}5; & 0{,}5 \\ 0{,}4; & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

a

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{25}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{32} & \frac{24}{32} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0{,}9; & 0{,}1 \\ 0{,}25; & 0{,}75 \end{pmatrix},$$

což je velmi blízko parametrům teoretického modelu tak, jak jsme je zavedli v úvodu příkladu 1.41. Pokud bychom měli k dispozici delší posloupnost pozorování, byla by přesnost odhadů samozřejmě ještě vyšší. ○

Vzhledem k povaze problémů, které skryté Markovovy modely popisují, se však častěji setkáme s případem, kdy máme k dispozici pouze posloupnost pozorování $\mathbf{O}$, nikoli stavů $\mathbf{X}$. V tomto případě se pomocí EM (= expectation-maximization) algoritmu alespoň snažíme postupně zpřesňovat počáteční odhady parametrů modelu. Jednou z možností, jak k této úloze přistupovat, je Baum–Welchův algoritmus, který si nyní popíšeme.

Nejprve zaveďme novou proměnnou, udávající pravděpodobnost, že se skrytý řetězec, za platnosti modelu $\lambda$ a při dané posloupnosti pozorování $\mathbf{O}$, v čase $n$ nachází ve stavu $i$ a v čase $n+1$ ve stavu $j$,

$$\xi_n(i,j) = P(X_n = i, X_{n+1} = j|\mathbf{O}, \lambda). \tag{1.48}$$

Tuto pravděpodobnost můžeme s využitím vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost získat pomocí již zavedených proměnných $\alpha_n(i)$ a $\beta_{n+1}(j)$,

$$\begin{aligned} \xi_n(i,j) &= \frac{P(X_n = i, X_{n+1} = j, \mathbf{O}|\lambda)}{P(\mathbf{O}|\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_n(i) p_{ij} b_j(O_{n+1}) \beta_{n+1}(j)}{P(\mathbf{O}|\lambda)} \\ &= \frac{\alpha_n(i) p_{ij} b_j(O_{n+1}) \beta_{n+1}(j)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_n(i) p_{ij} b_j(O_{n+1}) \beta_{n+1}(j)}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Naopak proměnnou $\gamma_n(i)$ (pravděpodobnost, že se skrytý proces v čase $n$ nachází ve stavu $i$, pozorujeme-li posloupnost $\mathbf{O}$), již dříve zavedenou vztahem (1.34), získáme jako

$$\gamma_n(i) = \sum_{j=1}^m \xi_n(i,j). \tag{1.50}$$

Parametry modelu $\lambda$ iteračně odhadneme pomocí těchto veličin a vztahů

$$\hat{p}_i^{(0)} = \gamma_0(i), \tag{1.51}$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{n=0}^{T-1} \xi_n(i,j)}{\sum_{n=0}^{T-1} \gamma_n(i)}, \tag{1.52}$$

kde člen $\sum_{n=0}^{T-1} \xi_n(i,j)$ lze chápat jako očekávaný počet přechodů ze stavu $i$ do stavu $j$ a člen $\sum_{n=0}^{T-1} \gamma_n(i)$ pak jako celkový očekávaný počet výskytů ve stavu $i$. Rozdělení pravděpodobnosti pozorované veličiny v jednotlivých stavech množiny $\mathsf{S}$ pak odhadneme pomocí vztahu

$$\hat{b}_j(k) = \frac{\sum_{n=0|O_n=v_k}^{T} \gamma_n(j)}{\sum_{n=0}^{T} \gamma_n(j)}. \tag{1.53}$$

Zde součet $\sum_{n=0}^{T} \gamma_n(j)$ lze tentokrát chápat jako očekávaný počet výskytů ve stavu $j$ a součet $\sum_{n=0|O_n=v_k}^{T} \gamma_n(j)$ (načítáme jen přes ty časy, kdy byla pozorovaná hodnota $v_k$) pak jako očekávaný počet výskytů ve stavu $j$, kdy bylo zároveň generováno pozorování $v_k$.

Celý algoritmus tedy probíhá tak, že nejprve zvolíme počáteční hodnoty parametrů modelu $\lambda(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{p}^{(0)})$ (například na základě výsledků experimentu), spočítáme hodnoty všech proměnných $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ a za pomoci vztahů (1.51), (1.52) a (1.53) určíme jejich odhady parametrů modelu $\lambda'(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{p}}^{(0)})$, s nimiž celý proces opakujeme až do splnění ukončovacího kriteria, např. do okamžiku, kdy se odhady z aktuálního a předchozího kroku liší již jen velmi málo.

# 2 Markovovy řetězce se spojitým časem

Znalosti, získané při studiu Markovových řetězců s diskrétním časem, využijete nyní při studiu řetězců se spojitým časem. Přes nutnost definovat některé nové pojmy budeme analogicky jako dříve směřovat k zavedení stacionárního rozdělení řetězců, které je klíčové pro možnost použití Markovových řetězců se spojitým časem v praktických úlohách (biologie, fyzika, ekonomika). Právě stacionární rozdělení bude mít nezastupitelné místo i v aplikacích, zmíněných v další kapitole, zejména až budeme hovořit o systémech hromadné obsluhy. Pro snazší pochopení teoretických poznatků si většinu zavedených pojmů vysvětlíme též na konkrétních příkladech. Obecné vlastnosti řetězců budeme nakonec demonstrovat při studiu některých nejčastěji užívaných procesů, u kterých odvodíme všechny důležité charakteristiky, umožňující vyhodnotit jejich chování. Za všechny můžeme zmínit Poissonův proces, který využijete například při modelování rozdělení pravděpodobností počtu příchozích zpráv do tiskové agentury. Analogicky byste přitom dosažené výsledky mohli aplikovat třeba k modelování počtu operátorů v call-centrech, aby tito byli na jedné straně dostatečně vytíženi, a na druhé straně, aby příchozí hovory, tedy zákazníci, nečekali příliš dlouho.

Markovovy řetězce se spojitým časem představují analogii k Markovovým řetězcům s diskrétním časem, kterými jsme se zabývali doposud. Z tohoto důvodu se v dalším textu setkáte s většinou pojmů, které jsme zmínili již při této příležitosti, ale také s několika novými (např. *intenzitou přechodu* mezi stavy nebo *Kolmogorovovými diferenciálními rovnicemi*), které jsou charakteristické právě pro případ spojitého času. I u těchto řetězců bude klíčovým pojmem jejich nerozložitelnost a z ní vycházející možnost nalezení stacionárního rozdělení. Markovovy řetězce se spojitým časem se užívají například v biologických aplikacích k modelování dynamiky populací a především pak v systémech hromadné obsluhy, se kterými se setkáte v závěru tohoto učebního textu.

## 2.1 Základní pojmy a jejich vlastnosti

V této kapitole budeme uvažovat náhodný proces $\{X_t, t \in \mathsf{T}\}$, kde $\mathsf{T} = \langle 0, \infty)$ a náhodná veličina $X_t$ nabývá $\forall t \in \mathsf{T}$ hodnot z nějaké konečné nebo nekonečné spočetné množiny $\mathsf{S}$. Bez omezení obecnosti lze předpokládat, že $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Tento náhodný proces se nazývá Markovův řetězec se spojitým časem, má-li *markovskou vlastnost* popsanou v následující definici.

**Definice 2.1** Systém celočíselných nezáporných náhodných veličin $\{X_t,\, t \geq 0\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ se nazývá *Markovův řetězec se spojitým časem* a spočetnou množinou stavů $\mathsf{S}$, jestliže

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i), \tag{2.1}$$

pro všechna $i, j, i_1, \ldots, i_n \in \mathsf{S}$ a pro všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s < t$, pro která $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

**Poznámka 2.1** Markovovy řetězce se spojitým časem modelují fyzikální a jiné systémy, které mohou v libovolných okamžicích náhodně přejít do některého ze svých možných stavů. Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se systém dostane při nejbližší změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se systém právě nachází, a nezávisí na předcházejících změnách. Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v nějaké dílně, náhodná veličina $X_t$, $t \in \langle 0, T \rangle$, je počet strojů, které v okamžiku $t$ nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

Označme

$$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j | X_s = i), \ i, j \in \mathsf{S}, \ s \geq 0, \ t > 0, \ s < t.$$

Tyto podmíněné pravděpodobnosti budeme nazývat *pravděpodobnosti přechodu* ze stavu $i$ v čase $s$ do stavu $j$ v čase $t$. Podobně

$$p_j(t) = P(X_t = j), \quad j \in \mathsf{S}, \ t \geq 0,$$

budeme nazývat *absolutní pravděpodobnosti v čase t* a pravděpodobnosti

$$p_j(0) = P(X_0 = j), \quad j \in \mathsf{S},$$

budou *počáteční pravděpodobnosti.* Zřejmě platí

$$p_j(t) \geq 0, \ \forall j \in \mathsf{S}, \qquad \sum_{j \in \mathsf{S}} p_j(t) = 1, \ t \geq 0.$$

V dalším textu budeme uvažovat pouze *homogenní řetězce* se spojitým časem, tj. takové, pro jejichž pravděpodobnosti přechodu platí

$$p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t), \quad s \geq 0, \ t > 0,$$

tj. pravděpodobnost přechodu ze stavu $i$ do stavu $j$ závisí pouze na čase, který uplynul mezi změnami stavů, a nikoliv na tom, kde se na časové ose tyto přechody odehrávají.

Pro každé $i, j \in \mathsf{S}$ proto uvažujeme systém pravděpodobností přechodu $\{p_{ij}(t), t > 0\}$ takových, že $\sum_{j\in\mathsf{S}} p_{ij}(t) = 1$. Tyto pravděpodobnosti pro pevné $t$ tvoří matici $\mathbf{P}(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j\in\mathsf{S}}$. Máme tedy celý systém matic $\{\mathbf{P}(t),\ t > 0\}$. Je obvyklé dodefinovat

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j, \\ 0,\ i \neq j, \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}.$$

Dříve než se pustíme do budování rigorózní teorie Markovových řetězců se spojitým časem, ilustrujme si přechod od diskrétního ke spojitému času a následně zavedené pojmy pomocí následujícího příkladu.

**Příklad 2.1** Uvažujme Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2\}$, ve kterém jsou možné přechody jen mezi těmito stavy (nedovolujeme $1 \to 1$).

$$1 \leftrightarrows 2.$$

V případě, že by čas byl diskrétní, bude matice pravděpodobností přechodu následující

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dynamika je jednoduchá, proces je v čase 0 buď ve stavu 1 nebo ve stavu 2 v závislosti na počátečním rozdělení a potom deterministicky přechází mezi dvěma stavy. Jaká bude dynamika, je-li čas spojitý? Víme jen, že budoucí stav procesu má záviset jen na stavu přítomném, ne na minulosti. Kdy nastanou přechody?

První otázkou je, jak dlouho systém setrvá v daném stavu, např. ve stavu $j \in \mathsf{S}$? Předpokládejme $X_0 = j$ a označme $T_j$ okamžik, ve kterém systém opustí stav $j$. Určíme rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny $T_j$ takto: pro $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(T_j > s + t | T_j > s) &= P(X_r = j \text{ pro } r \in \langle 0, s + t\rangle | X_r = j \text{ pro } r \in \langle 0, s\rangle) = \\ &= P(X_r = j \text{ pro } r \in \langle s, s + t\rangle | X_r = j \text{ pro } r \in \langle 0, s\rangle) = \\ &= P(X_r = j \text{ pro } r \in \langle s, s + t\rangle | X_r = j) = \qquad \text{(markovská vlastnost)} \\ &= P(X_r = j \text{ pro } r \in \langle 0, t\rangle | X_0 = j) = P(T_j > t). \qquad \text{(homogenita)} \end{aligned}$$

Vidíme, že rozdělení náhodné veličiny $T_j$ má vlastnost „ztráty paměti“ a má proto exponenciální rozdělení, protože toto rozdělení je jediné spojité rozdělení s uvedenou vlastností.

Označíme-li parametr rozdělení veličiny $T_j$ symbolem $q_j$, víme, že platí

$$E(T_j) = \frac{1}{q_j}.$$

Čím větší bude $q_j$, tím menší bude očekávaná doba setrvání systému ve stavu $j$. Parametr $q_j$, který bude zaveden v definici 2.2, vyjadřuje intenzitu (míru, rychlost, stupeň) výstupu ze stavu $j$ a dále o něm pojednává věta 2.4. $\circ$

**Věta 2.1** *Pro homogenní Markovův řetězec se spojitým časem platí*

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in\mathsf{S}} p_{ik}(s)p_{kj}(t), \ \forall i,j\in\mathsf{S}, \ \forall s\geq 0, \ \forall t\geq 0,$$

$$p_j(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)p_{ij}(t), \quad \forall j\in\mathsf{S}, \ \forall t\geq 0.$$

*Důkaz:* 1. V důkazu první rovnosti užijeme tvrzení (viz odstavec 1.1, důkaz věty 1.2), že tvoří-li jevy $A_k, \ k\in\mathsf{S}$, úplný systém, potom

$$P(A|C) = \sum_{k\in\mathsf{S}} P(A_k|C)P(A|A_k\cap C).$$

Zvolme libovolná pevná $i,j,s,t$. Označme $A_k = (X_s = k), \ k\in\mathsf{S}$, $A = (X_{s+t} = j)$, $C = (X_0 = i)$. Potom (užije se markovská vlastnost)

$$p_{ij}(s+t) = P(X_{s+t} = j|X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k\in\mathsf{S}} P(X_s = k|X_0 = i)P\left[X_{s+t} = j|(X_0 = i)\cap(X_s = k)\right] =$$

$$= \sum_{k\in\mathsf{S}} P(X_s = k|X_0 = i)P(X_{s+t} = j|X_s = k) = \sum_{k\in\mathsf{S}} p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

2. Druhou rovnost dokážeme takto

$$p_j(t) = P(X_t = j) = P\left[(X_t = j)\cap\bigcup_{i\in\mathsf{S}}(X_0 = i)\right] =$$

$$= P\left[\bigcup_{i\in\mathsf{S}}(X_t = j)\cap(X_0 = i)\right] = \sum_{i\in\mathsf{S}} P\left[(X_t = j)\cap(X_0 = i)\right] =$$

$$= \sum_{i\in\mathsf{S}} P(X_0 = i)P(X_t = j|X_0 = i) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)p_{ij}(t).$$

□

**Poznámka 2.2** a) První tvrzení věty 2.1 lze maticově zapsat

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t),$$

je to opět *Chapmanova–Kolmogorovova rovnost.* Druhé tvrzení maticově zapíšeme

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots).$$

b) Pro libovolné okamžiky $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ a pro libovolné stavy $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathsf{S}$ platí

$$P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) =$$
$$= p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}),$$

tj. rozdělení pravděpodobností libovolné konečné skupiny náhodných veličin $X_0$, $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ ze systému náhodných veličin, které tvoří homogenní Markovovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$, jsou určena vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \{p_i(0),\ i \in \mathsf{S}\}$ a systémem matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0\}$.

Naopak můžeme dokázat, že ke každému pravděpodobnostnímu vektoru

$$\mathbf{p} = \{p_i \geq 0, \sum_{i \in \mathsf{S}} p_i = 1\}$$

a každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(t),\ t \geq 0\}$, splňujících Chapmanovu–Kolmogorovovu podmínku, existuje Markovův řetězec se spojitým časem, jehož počáteční pravděpodobnosti jsou dány vektorem $\mathbf{p}$ a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$ [Prášková, s. 72].

V dalším výkladu budeme předpokládat, že

$$\lim_{t \to 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathsf{S},$$

což spolu s úmluvou $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ znamená, že pravděpodobnosti přechodu jsou spojité zprava v bodě 0.

Následující věta tvrdí, že pravděpodobnosti přechodu jsou diferencovatelné zprava v bodě 0. Dále uvidíme, že hodnoty derivací funkcí $p_{ij}(t)$ v nule zprava mají při studiu Markovových řetězců se spojitým časem velký význam.

**Věta 2.2** *Pro každé $i \in \mathsf{S}$ existuje limita*

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} := q_i \leq \infty, \tag{2.2}$$

*pro každé $i, j \in \mathsf{S},\ i \neq j,$ existují limity*

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := q_{ij} < \infty. \tag{2.3}$$

*Důkaz:* [Karlin, s. 244–247; Kalas, s. 53–57; Dupač (1976), s. 13–17] (pro řetězce s konečným počtem stavů; důkaz vyžaduje znalosti, které v tomto textu neuvádíme, např. proces stochasticky spojitý, proces separabilní, proces měřitelný apod.) □

**Definice 2.2** Hodnota
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} = q_i$$
se nazývá *intenzita výstupu ze stavu i*;
hodnota
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij}$$
se nazývá *intenzita přechodu ze stavu i do stavu j*.

Matici
$$\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j\in\mathsf{S}}, \quad \text{kde } q_{ii} = -q_i,$$
nazýváme *maticí intenzit*.

**Věta 2.3** *Pro každé $i \in \mathsf{S}$ platí*
$$\sum_{j:j\neq i} q_{ij} \leq q_i. \tag{2.4}$$

*Důkaz:* Z vlastností stochastické matice plyne, že
$$\sum_{j:j\neq i} p_{ij}(h) = 1 - p_{ii}(h).$$
Pro libovolné přirozené číslo $N$ a libovolné $h > 0$ platí
$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = \sum_{j\in\mathsf{S},j\neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq \sum_{j=0,j\neq i}^{N} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$
Přejdeme-li k limitě pro $h \to 0^+$ a $N \to \infty$ dostaneme užitím vztahů (2.2) a (2.3) tvrzení věty. $\square$

*Úmluva:* Dále budeme uvažovat pouze takové Markovovy řetězce se spojitým časem, pro které platí
$$q_i = \sum_{j:j\neq i} q_{ij}, \quad \forall i \in \mathsf{S}. \tag{2.5}$$

**Poznámka 2.3** a) Je-li množina stavů konečná, rovnost (2.5) vždy platí, protože ze vztahu $\sum_{j\in\mathsf{S}} p_{ij}(h) = 1$ plyne
$$0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\sum_{j\in\mathsf{S}} p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-p_{ii}(h)-\sum_{j:j\neq i} p_{ij}(h)}{h} = q_i - \sum_{j:j\neq i} q_{ij}.$$
Předpoklad o tom, že množina $\mathsf{S}$ je konečná, jsme potřebovali k tomu, aby bylo možno zaměnit limitu a sčítání.

b) V konkrétních příkladech jsou intenzity $q_i, q_{ij}$ obvykle dány teoretickou úvahou nebo odvozeny experimentálně. Ze vztahů (2.2), (2.3) plyne, že

$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h), \quad \forall i, j \in \mathsf{S},\ h > 0,$$
$$1 - p_{ii}(h) = q_i h + o(h), \quad \forall i \in \mathsf{S},\ h > 0,$$

kde symbol $o(h)$ značí funkci, pro kterou platí $\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

Číslo $q_{ij}h$ je tedy až na členy řádu $o(h)$ rovno pravděpodobnosti toho, že systém přejde ze stavu $i$ do stavu $j$ za časový interval (malé) délky $h$, tj. pravděpodobnost přechodu ze stavu $i$ do stavu $j \neq i$ za malý časový interval je úměrná intenzitě přechodu $q_{ij}$. Hodnota $1 - q_i h$ je rovna až na členy řádu $o(h)$ pravděpodobnosti setrvání ve stavu $i$ během intervalu (malé) délky $h$.

Význam intenzit přechodu ukazují následující tvrzení.

**Věta 2.4** *1. Pro homogenní Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ se spočetnou množinou stavů platí pro všechna $s \geq 0$ a pro všechna $h > 0$*

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s + h | X_s = i) = e^{-q_i h}, \tag{2.6}$$

*kde $e^{-q_i h} = 0$, je-li $q_i = \infty$.*

*2. Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(t) = 1$, $\forall t \geq 0$. Je-li $0 < q_i < \infty$, má doba $T_i$, po kterou řetězec setrvá ve stavu $i$, exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$.*

*3. Nechť $0 < q_i < \infty$. Potom pravděpodobnost toho, že řetězec z počátečního stavu $i$ přejde nejdříve do stavu $j$, je rovna $\frac{q_{ij}}{q_i}$ pro všechna $j \neq i$.*

*Důkaz:* [Prášková, s. 76] □

**Definice 2.3** [Prášková, s. 78] Stav $i \in \mathsf{S}$ takový, že $q_i = 0$, se nazývá *absorpční*. Pro $q_i > 0$ se stav $i \in \mathsf{S}$ nazývá *stabilní*, jestliže $q_i < \infty$, a *nestabilní*, jestliže $q_i = \infty$.

Je-li $i$ absorpční stav, znamená to, že řetězec, který přejde do stavu $i$, již v tomto stavu setrvá; střední doba setrvání v tomto stavu je nekonečně dlouhá. Střední doba setrvání v nestabilním stavu je nulová. Dále budeme uvažovat pouze řetězce, jejichž všechny stavy jsou stabilní.

Nechť je řetězec na počátku v nějakém stavu $i$. Je-li $q_i > 0$, setrvá v tomto stavu po náhodnou dobu $T_i$, a potom přejde do stavu $j$ s pravděpodobností $\frac{q_{ij}}{q_i}$. Je-li $q_j = 0$, řetězec navždy setrvá v tomto stavu ($T_j = \infty$).

**Definice 2.4** [Prášková, s. 91] Řekneme, že stav $j$ Markovova řetězce $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je *dosažitelný* ze stavu $i$, jestliže existuje $t > 0$ takové, že $P(X_t = j | X_0 = i) > 0$, $i, j \in \mathsf{S}$.

Stav $j$ řetězce se nazývá *trvalý*, jestliže buď $q_j = 0$ ($j$ je absopční) nebo $q_j > 0$ a současně

$$P(\mathscr{T}_j(1) < \infty | X_0 = j) = 1,$$

kde $\mathscr{T}_j(1) = \inf\{t \geq J_1 \colon X_t = j\}$, $J_1 = \inf\{t > 0,\ X_t \neq X_0\}$, $\mathscr{T}_j(1)$ je čas prvního návratu do stavu $j$, ($J_1$ je časový okamžik, ve kterém došlo k první změně stavu).

Stav $j$ se nazývá *přechodný*, jestliže $q_j > 0$ a $P(\mathscr{T}_j(1) = \infty | X_0 = j) > 0$.

Trvalý stav $j$ se nazývá *nenulový*, jestliže je buď $q_j = 0$ nebo je střední doba prvního návratu do stavu $j$ konečná, tj. $E(\mathscr{T}_j(1) | X_0 = j) < \infty$.

**Poznámka 2.4** Pomocí pojmu dosažitelnost lze definovat stavy sousledné, uzavřenou třídu stavů, rozklad množiny stavů resp. nerozložitelný řetězec analogicky jako pro řetězce s diskrétním časem.

## 2.2 Kolmogorovovy diferenciální rovnice

Následující věta udává souvislost intenzit přechodu s derivacemi pravděpodobností přechodu v obecném bodě.

**Věta 2.5** *Předpokládejme, že $q_i < \infty$ pro všechna $i \in \mathsf{S}$ a platí (2.5). Potom pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ jsou diferencovatelné pro všechna $i, j \in \mathsf{S}$ a všechna $t > 0$ a platí*

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k: k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \in \mathsf{S}} q_{ik} p_{kj}(t) \tag{2.7}$$

*(tzv. retrospektivní rovnice, backward equations). Je-li navíc konvergence*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij}$$

*stejnoměrná v $i$ $\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_j > 0 \text{ tak, že } \forall h \in (0, 0+\delta_j) \text{ platí } |\frac{p_{ij}(h)}{h} - q_{ij}| < \varepsilon\right)$ a jestliže $q_{ij} \leq c_j < \infty$ pro každé $i, j \in \mathsf{S}$, potom pro každé $i, j \in \mathsf{S}$ a $t > 0$*

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k: k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in \mathsf{S}} p_{ik}(t) q_{kj} \tag{2.8}$$

*(prospektivní rovnice, forward equations).*

*Důkaz:* Uvažujme libovolné pevné $t \geq 0$.

1. Dokážeme platnost (2.7).

a) Předpokládejme nejprve, že $s > 0$. Podle věty 2.1

$$p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathsf{S}} p_{ik}(s)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) = \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) - p_{ij}(t)[1 - p_{ii}(s)]. \tag{2.9}$$

Ukážeme, že existuje

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

Užitím vztahu (2.3) a možnosti, že v konečném součtu lze zaměnit limitu a sčítání

$$\liminf_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \geq \liminf_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k=1, k \neq i}^{N} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = \sum_{k=1, k \neq i}^{N} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Pro libovolné $m > i$ dále platí

$$\sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \leq \sum_{k=1, k \neq i}^{m} p_{ik}(s)p_{kj}(t) + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_{ik}(s) \cdot 1 =$$

$$= \sum_{k=1, k \neq i}^{m} p_{ik}(s)p_{kj}(t) + 1 - p_{ii}(s) - \sum_{k=1, k \neq i}^{m} p_{ik}(s).$$

Z této nerovnosti dostáváme, že podle (2.2), (2.3)

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \leq \sum_{k=1, k \neq i}^{m} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k=1, k \neq i}^{m} q_{ik}.$$

Tato nerovnost platí pro libovolné $m > i$, tedy pro $m \to \infty$ vzhledem k předpokladu $\sum_{j:j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$ dostaneme

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \leq \sum_{k:k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Z provedených úvah plyne, že existuje limita

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \sum_{k:k \neq i} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = \sum_{k:k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Vrátíme se ke vztahu (2.9), vydělením obou stran číslem $s$ a přechodem k limitě dostaneme

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t)}{s} = \sum_{k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t) - p_{ij}(t)q_i = \sum_{k \in \mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Tím jsme dokázali vzorec (2.7) pro derivaci funkce $p_{ij}(t)$ v libovolném bodě $t$ zprava.

b) Dokážeme platnost vzorce (2.7) pro derivaci zleva. Nechť $s < 0$, potom

$$p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t) = p_{ij}(t-|s|) - p_{ij}(t) = p_{ij}(t-|s|) - \sum_{k\in \mathsf{S}} p_{ik}(|s|)p_{kj}(t-|s|) =$$

$$= p_{ij}(t-|s|)[1-p_{ii}(|s|)] - \sum_{k\neq i} p_{ik}(|s|)p_{kj}(t-|s|).$$

Analogicky jako v části a) důkazu lze odvodit, že

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{1}{s} \sum_{k:k\neq i} p_{ik}(|s|)p_{kj}(t-|s|) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Potom

$$\lim_{s\to 0^-} \frac{p_{ij}(s+t)-p_{ij}(t)}{s} = -\lim_{|s|\to 0} \frac{p_{ij}(t-|s|)-p_{ij}(t)}{|s|} =$$

$$= -\lim_{|s|\to 0} p_{ij}(t-|s|)\frac{1-p_{ii}(|s|)}{|s|} + \lim_{|s|\to 0} \frac{1}{|s|} \sum_{k\neq i} p_{ik}(|s|)p_{kj}(t-|s|) =$$

$$= -p_{ij}(t)q_i + \sum_{k:k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) = \sum_{k\in \mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

To znamená, že

$$p'_{ij}(t) = \lim_{s\to 0} \frac{p_{ij}(t+s)-p_{ij}(t)}{s} = \sum_{k\in \mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

2. Dokážeme tvrzení (2.8). Podle věty 2.1

$$p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t) = \sum_{k\in \mathsf{S}} p_{ik}(t)p_{kj}(s) - p_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(s) - p_{ij}(t)[1-p_{jj}(s)]. \tag{2.10}$$

Z předpokladu o stejnoměrné konvergenci podílu $\frac{p_{kj}(s)}{s}$ k $q_{kj}$ v $k$ a z předpokladu $q_{kj} \leq c_j$ plyne, že pro dostatečně malá $s$ je podíl $\frac{p_{kj}(s)}{s}$ stejnoměrně ohraničený vzhledem ke $k$, a tedy, že řada $\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(s)}{s}$ je stejnoměrně konvergentní. Vydělíme-li obě strany rovnosti (2.10) číslem $s$, dostaneme limitním přechodem pro $s \to 0$

$$p'_{ij}(t) = \lim_{s\to 0} \frac{p_{ij}(t+s)-p_{ij}(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(s)}{s} - p_{ij}(t)\lim_{s\to 0}\frac{1-p_{jj}(s)}{s} =$$

$$= \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj} - p_{ij}(t)q_j = \sum_{k\in \mathsf{S}} p_{ik}(t)q_{kj}.$$

□

**Poznámka 2.5** a) Maticově lze soustavu retrospektivních rovnic zapsat jako

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$

a soustavu prospektivních rovnic zapsat jako

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \quad \text{kde } \mathbf{P}'(t) = (p'_{ij}(t))_{i,j\in\mathsf{S}}.$$

V retrospektivní soustavě jsou derivace $p'_{ij}(t)$ vyjádřeny pomocí všech možných pravděpodobností přechodu do stavu $j$, v prospektivní soustavě jsou tyto derivace vyjádřeny pomocí všech možných pravděpodobností přechodu ze stavu $i$.

b) Má-li řetězec konečný počet stavů, není předpoklad o stejnoměrné konvergenci $\frac{p_{kj}(s)}{s}$ a předpoklad $q_{kj} \leq c_j$ nutný, limitu a sčítání lze zaměnit. Ve vztahu (2.9) vydělením obou stran číslem $s > 0$ a přechodem k limitě dostaneme

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t)}{s} =$$

$$= \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) - p_{ij}(t)q_i = \sum_{k\in\mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Pro $s < 0$ užijeme stejné úvahy jako v části b) důkazu předchozí věty, platnost rovnosti

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{1}{s} \sum_{k:k\neq i} p_{ik}(|s|)p_{kj}(t-|s|) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)$$

plyne ihned záměnou limity a sčítání, a proto

$$\lim_{s\to 0^-} \frac{p_{ij}(s+t) - p_{ij}(t)}{s} = \sum_{k\in\mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t),$$

a tedy platí tvrzení (2.8)

$$p'_{ij}(t) = \lim_{s\to 0} \frac{p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)}{s} = \sum_{k\in\mathsf{S}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Platnost tvrzení (2.9) pro konečný počet stavů plyne ze vztahu (2.10) vydělením obou stran číslem $s$ a přechodem k limitě (opět lze zaměnit limitu a sčítání).

V případě řetězců se spočetně mnoha stavy je řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic obecně složité, v některých případech nemusí jednoznačné řešení vůbec existovat. V případě, že se jedná o řetězec s konečně mnoha stavy, je možné dokázat následující větu.

**Věta 2.6** *Nechť* $\mathbf{Q} = \{q_{ij},\ 0 \le i,j \le N\}$ *je matice, pro jejíž prvky platí*

$$q_{ij} \ge 0,\ \ i \ne j, q_{ii} = -\sum_{i \ne j} q_{ij}.$$

*Potom existuje jediné řešení soustav (2.7), (2.8), stejné pro obě soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce* $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ *a které představuje soustavu pravděpodobností přechodu Markovova řetězce se spojitým časem a konečnou množinou stavů.*

*Maticově lze toto řešení zapsat ve tvaru* $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$*, kde* $e^{\mathbf{Q}t}$ *je maticová exponenciální funkce definovaná předpisem*

$$e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}.$$

*Důkaz:* [Prášková, s. 85] □

**Příklad 2.2** (*Model práce stroje*) [Prášková, s. 86] Doba bezporuchového provozu nějakého stroje je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$. Dojde-li k poruše stroje, stroj začne být okamžitě opravován. Doba opravy je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$. Jakmile je oprava skončena, je stroj znovu uveden do provozu.

Definujme náhodnou veličinu $X_t$, která nabývá hodnoty 0, jestliže stroj v čase $t$ pracuje, a hodnoty 1, je-li stroj v čase $t$ opravován. Potom je $\{X_t, t \ge 0\}$ Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1\}$. Matice intenzit přechodu je podle věty 2.4, bodu 2 (setrváním ve stavu je zde setrvání v provozu resp. v opravě)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha, & \alpha \\ \beta, & -\beta \end{pmatrix}.$$

Pro určení pravděpodobností přechodu budeme řešit retrospektivní soustavu rovnic (2.7)

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\alpha p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) \\ p'_{10}(t) &= \beta p_{00}(t) - \beta p_{10}(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vynásobíme-li první rovnici číslem $\beta$ a druhou rovnici číslem $\alpha$ a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$\beta p'_{00}(t) + \alpha p'_{10}(t) = 0,$$

odkud integrací $\beta p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) = c$, pro nějakou konstantu $c$. Z podmínky $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ dostaneme $c = \beta$, a tedy

$$\beta p_{00}(t) + \alpha p_{10}(t) = \beta. \tag{2.12}$$

Vypočteme-li z (2.12) $p_{10}(t)$ a dosadíme do první rovnice v (2.11), máme

$$p'_{00}(t) = \beta - (\alpha + \beta)p_{00}(t),$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu pro funkci $p_{00}(t)$, která má obecné řešení

$$p_{00}(t) = ce^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Pro $t = 0$ a Cauchyovu počáteční úlohu dostaneme

$$p_{00}(0) = 1 = c + \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

tedy

$$p_{00}(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}e^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Pravděpodobnost $p_{10}(t)$ vypočteme ze vztahu (2.12), zbývající dvě pravděpodobnosti určíme ze vztahů $p_{i0}(t) + p_{i1}(t) = 1,\ i = 0, 1$. Dostaneme

$$p_{10}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta}e^{-(\alpha+\beta)t}, \qquad p_{11}(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}e^{-(\alpha+\beta)t},$$

$$p_{01}(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

Řešení soustavy (2.11) můžeme získat také pomocí tvrzení věty 2.6, užijeme-li Perronův vzorec pro výpočet maticové funkce $e^{\mathbf{Q}t}$ (viz Dodatek).

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \det\begin{pmatrix} \lambda + \alpha, & -\alpha \\ -\beta, & \lambda + \beta \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + \alpha + \beta) = 0,\ \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\alpha - \beta.$$

$$\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \lambda + \beta, & \alpha \\ \beta, & \lambda + \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_1} = \lambda + \alpha + \beta, \qquad \psi_2(\lambda) = \frac{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_2} = \lambda,$$

tedy

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\psi_1(\lambda_1)}\operatorname{adj}(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{Q}) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\psi_2(\lambda_1)}\operatorname{adj}(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{Q}) =$$
$$= \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} \beta, & \alpha \\ \beta, & \alpha \end{pmatrix} - \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix} -\alpha, & \alpha \\ \beta, & -\beta \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako při přímém řešení soustavy (2.11). ∘

V praxi obvykle neřešíme soustavy Kolmogorovových rovnic, ale omezujeme se na výpočet absolutních pravděpodobností $p_j(t)$, $j \in \mathsf{S}$, pro dané počáteční rozdělení $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall i \neq j$. Soustavu diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti uvádí následující věta.

**Věta 2.7** *Nechť $p_i(0), i \in \mathsf{S}$, jsou počáteční pravděpodobnosti řetězce. Platí-li předpoklady druhé části věty 2.5, vyhovují absolutní pravděpodobnosti následující soustavě diferenciálních rovnic*

$$p_j'(t) = -p_j(t)q_j + \sum_{k:k\neq j} p_k(t)q_{kj} = \sum_{k\in\mathsf{S}} p_k(t)q_{kj}, \quad j \in \mathsf{S}. \tag{2.13}$$

*Důkaz:* Podle věty 2.1 víme, že

$$p_j(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)p_{ij}(t), \ t \geq 0, \ j \in \mathsf{S}.$$

Nekonečná řada konverguje stejnoměrně (podle Weierstrassova kriteria) a lze ji tedy derivovat člen po členu. Věta 2.5 nám říká, že existují derivace $p_{ij}'(t)$, potom existuje derivace součtu

$$p_j'(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)p_{ij}'(t).$$

Dosazením za $p_{ij}'(t)$ z prospektivních rovnic dostaneme

$$p_j'(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)\left[\sum_{k\in\mathsf{S}} p_{ik}(t)q_{kj}\right] = \sum_{k\in\mathsf{S}} q_{kj}\left[\sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0)p_{ik}(t)\right] =$$

$$= \sum_{k\in\mathsf{S}} p_k(t)q_{kj} = -p_j(t)q_j + \sum_{k:k\neq j} p_k(t)q_{kj}.$$

□

**Poznámka 2.6** Soustavu (2.13) lze v některých případech řešit pomocí Laplaceovy transformace, která soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $p_j(t)$ převádí na soustavu algebraických rovnic pro tzv. obrazy těchto funkcí. Pomocí zpětné Laplaceovy transformace získáme z řešení soustavy algebraických rovnic hledané absolutní pravděpodobnosti.

Teorie Laplaceovy transformace není zahrnuta v učebních plánech bakalářského studia, proto se této metodě nebudeme dále věnovat.

## 2.3 Limitní rozdělení

Podobně jako u řetězců s diskrétním časem lze i pro řetězce se spojitým časem zavést tzv. stacionární rozdělení.

**Definice 2.5** Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů $\mathsf{S}$ a maticemi pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$. Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{a}$ na $\mathsf{S}$ takové, že

$$\mathbf{a}\mathbf{P}(t) = \mathbf{a}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots), \tag{2.14}$$

se nazývá *stacionární rozdělení* daného řetězce.

**Definice 2.6** Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i, i \in \mathsf{S}\}$ na $\mathsf{S}$ se nazývá *limitní rozdělení*, jestliže pro všechna $i, j \in \mathsf{S}$ platí

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

**Věta 2.8** *Existuje-li limitní rozdělení* $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \ \forall i \in \mathsf{S}, \ \sum_{j\in\mathsf{S}} \pi_j = 1$, *potom existují limity absolutních pravděpodobností a platí*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j, \ \ \forall j \in \mathsf{S}.$$

*Důkaz:* Podle věty 2.1 platí

$$p_j(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0) p_{ij}(t).$$

Protože tato řada konverguje stejnoměrně, dostáváme

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0) \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \sum_{i\in\mathsf{S}} p_i(0) = \pi_j, \ \ j \in \mathsf{S}.$$

□

**Věta 2.9** *Jestliže existuje limitní rozdělení homogenního Markovova řetězce se spojitým časem, je to stacionární rozdělení.*

*Důkaz:* [Prášková, s. 90] Nechť $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i, i \in \mathsf{S}\}$ je limitní rozdělení. Z Chapmanovy–Kolmogorovovy rovnosti platí pro $t \geq 0, h \geq 0$ a přirozené $N$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in\mathsf{S}} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t) p_{kj}(h),$$

odkud limitním přechodem pro $t \to \infty$

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k p_{kj}(h)$$

a limitním přechodem pro $N \to \infty$

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}(h).$$

Pokud pro nějaké $j \in \mathsf{S}$ platí poslední nerovnost s ostrým znaménkem, dostaneme sečtením těchto nerovností vztah

$$\sum_{j \in \mathsf{S}} \pi_j \;>\; \sum_{j \in \mathsf{S}} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j \in \mathsf{S}} p_{kj}(h) = \sum_{k \in \mathsf{S}} \pi_k,$$

což je spor, a tedy

$$\pi_j = \sum_{k \in \mathsf{S}} \pi_k p_{kj}(h), \;\; h \geq 0, \;\; j \in \mathsf{S},$$

je stacionární rozdělení. □

**Příklad 2.3** V příkladu 2.2 jsme určili následující systém matic pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta, & \alpha \\ \beta, & \alpha \end{pmatrix} - \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} -\alpha, & \alpha \\ \beta, & -\beta \end{pmatrix}.$$

Limitní rozdělení existuje

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

Vektor

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)$$

tvoří podle předchozí věty stacionární rozdělení daného Markovova řetězce. Stejný výsledek dostaneme, řešíme-li soustavu (2.16)

$$-\alpha a_0 + \beta a_1 = 0,$$

$$\alpha a_0 - \beta a_1 = 0,$$

která bude zavedena ve větě 2.11. Řešení vyhovující podmínce $a_0 + a_1 = 1$

$$a_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad a_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

je shodné s předcházejícím výsledkem. ○

Limitní rozdělení nemusí existovat. Ukážeme si to v následujícím příkladě.

**Příklad 2.4** (*Kinetika chemických reakcí*) [Dupač (1976), s. 33] Uvažujeme tzv. unimolekulární reakci, kdy se molekuly látky $A$ nezvratně přeměňují na molekuly látky $B$. Nechť na počátku je $N$ molekul látky $A$. Je-li v čase $t$ právě $j$ molekul látky $A$, pak každá z nich (nezávisle na ostatních) přejde během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ v molekulu látky $B$ s pravděpodobností $qh + o(h)$, $q > 0$. Tedy počet molekul látky $A$ se během intervalu $(t, t+h)$ zmenší na $j-1$ molekul s pravděpodobností

$$\binom{j}{1}[qh + o(h)]^1[1 - qh + o(h)]^{j-1} = jqh + o(h),$$

zmenší se na méně než $j-1$ molekul s pravděpodobností

$$\sum_{k=2}^{j}\binom{j}{k}[qh + o(h)]^k[1 - qh + o(h)]^{j-k} = o(h),$$

a nezmění se s pravděpodobností $1 - jqh + o(h)$. Při úpravách užíváme vztah $[1 - qh + o(h)]^r = 1 - rqh + o(h)$, $r \in \mathbb{N}$.

Označíme-li $X_t$ počet molekul látky $A$ v čase $t$, potom je $\{X_t, t \geq 0\}$ konečný Markovův řetězec se spojitým časem, s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, počátečním rozdělením $p_N(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq N$, a s maticí intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2q & -2q & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q & -3q & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & Nq & -Nq \end{pmatrix}.$$

Ze soustavy rovnic (2.13) dostaneme (řešení viz [Dupač (1976), s. 34]) absolutní pravděpodobnosti

$$p_j(t) = \binom{N}{j} e^{-jqt}(1 - e^{-qt})^{N-j}, \quad j \in \mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}, \ t \geq 0.$$

Je zřejmé, že $\lim_{t\to\infty} p_0(t) = 1$ a $\lim_{t\to\infty} p_j(t) = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, N$, limitní rozdělení je tedy degenerované. Všimněme si, že tento řetězec je rozložitelný, stav 0 je absorpční (tvoří uzavřenou třídu), stavy $1, 2, \ldots, N$ jsou přechodné. $\circ$

V literatuře jsou dokázané následující věty o existenci limitního rozdělení.

**Věta 2.10** *V nerozložitelném homogenním Markovově řetězci se spojitým časem a konečnou množinou stavů existuje limitní rozdělení.*

*Důkaz:* [Dupač (1976), s. 12] $\square$

**Věta 2.11** *K tomu, aby v homogenním Markovově řetězci se spojitým časem a spočetnou množinou stavů* $\mathsf{S}$ *existovaly limitní pravděpodobnosti*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j$$

*nezávislé na počátečním rozdělení a splňující*

$$\pi_j > 0, \quad j \in \mathsf{S}, \quad \sum_{j\in\mathsf{S}} \pi_j = 1, \tag{2.15}$$

*je nutné a stačí, aby soustava rovnic*

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots), \tag{2.16}$$

*měla právě jedno řešení splňující (2.15).*

*Důkaz:* [Dupač (1976), s. 60] □

**Příklad 2.5** [Dupač (1976), s. 36–37; Prášková, s. 95–97] Uvažujme zákaznické centrum s $N$ linkami. Nechť $\lambda, \mu$ jsou kladné konstanty, které mají následující význam. Pravděpodobnost toho, že v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ přijde do centra hovor, je rovna $\lambda h + o(h)$. Tato pravděpodobnost je stejná pro všechna $t \geq 0$. Hovory přicházejí nezávisle; pravděpodobnost, že v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ přijdou do centra dva nebo více hovorů, je $o(h)$, pravděpodobnost, že nepřijde žádný hovor, je $1 - \lambda h + o(h)$. Pokud je všech $N$ linek obsazeno, další hovor se ztrácí. Předpokládejme dále, že doba trvání hovoru je náhodná veličina $T$, která má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\mu} > 0$, tj. hovor, který v čase $t$ ještě trvá, skončí během intervalu $(t, t+h\rangle$ s pravděpodobností

$$P(t < T \leq t+h|T > t) = \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} = 1 - e^{-\mu h} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu h)^n}{n!} =$$
$$= 1 - (1 - \mu h + \frac{1}{2!}\mu^2 h^2 - \frac{1}{3!}\mu^3 h^3 + \cdots) = \mu h + o(h).$$

Pravděpodobnost, že hovor, který trvá v čase $t$, neskončí v intervalu $(t, t+h\rangle$, je $1 - \mu h + o(h)$ (předpoklad exponenciálního rozdělení doby hovoru je podle tvrzení odborníků v dobré shodě s experimentálními daty).

Nechť $X_t$ je počet obsazených linek v čase $t$. Potom je $\{X_t, t \geq 0\}$ Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$p_{j,j+1}(h) = [\lambda h + o(h)][1 - \mu h + o(h)] = \lambda h + o(h).$$

Podobně

$$
\begin{aligned}
&p_{j,j-1}(h) = \\
&\binom{j}{1}[\mu h + o(h)][1-\mu h + o(h)]^{j-1}[1-\lambda h + o(h)] + o(h) = j\mu h + o(h), \\
&p_{j,j+k}(h) = o(h), \quad 2 \le k \le N-j, \\
&p_{j,j-k}(h) = o(h), \quad 2 \le k \le j, \\
&p_{jj}(h) = 1 - (\lambda + j\mu)h + o(h), \quad 1 \le j \le N-1, \\
&p_{NN}(h) = 1 - N\mu h + o(h).
\end{aligned}
$$

Určíme intenzity pomocí vztahů (2.2), (2.3)

$$
\begin{aligned}
q_{j,j+1} &= \lambda, \quad 0 \le j \le N-1, \\
q_{j,j-1} &= j\mu, \quad 1 \le j \le N, \\
q_j &= \lambda + j\mu, \quad 1 \le j \le N-1, \\
q_0 &= \lambda, \quad q_n = N\mu, \quad q_{ij} = 0 \text{ jinak.}
\end{aligned}
$$

Matice intenzit

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 \dots & (N-1)\mu & -(\lambda+[N-1]\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & N\mu & -N\mu
\end{pmatrix}.
$$

Určíme limitní rozdělení, které se v příkladech tohoto typu interpretuje jako rozdělení v ustáleném provozu. Řešíme soustavu rovnic (2.16), která má v tomto případě tvar

$$
\begin{gathered}
-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0, \\
\lambda\pi_{j-1} - (\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\pi_{j+1} = 0, \; 1 \le j \le N-1, \\
\lambda\pi_{N-1} - N\mu\pi_N = 0.
\end{gathered}
$$

Rovnice můžeme řešit postupně

$$
\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0, \quad \pi_3 = \frac{1}{2.3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0, \; \dots
$$

Obecně

$$
\pi_j = \pi_0 \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \quad j = 1, 2, \dots, N.
$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$ dostaneme

$$\pi_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{2.17}$$

Řešení soustavy (2.16) v tomto případě (i v podobných příkladech) můžeme získat také pomocí následujícího „triku". Označme

$$K_j = j\mu\pi_j - \lambda\pi_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Potom tyto rovnice mají tvar

$$K_1 = 0, \quad K_{j+1} - K_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad K_N = 0.$$

Tedy

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_n = 0 \;\Rightarrow\; \pi_j = \frac{\lambda}{j\mu}\pi_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Odtud

$$\pi_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$ dostaneme stejný výsledek (2.17). ○

**Příklad 2.6** [Dupač (1976), s. 37–39] Uvažujme, že na nějaké velké stavbě pracuje $N$ svářečů, kteří náhodně a vzájemně nezávisle odebírají elektrický proud. Předpokládejme, že svářeč, který v čase $t$ neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h\rangle$ odebírat proud s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$. Svářeč, který v čase $t$ odebíral proud, ukončí odběr v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, $\mu > 0$. Obdobnými úvahami jako v předchozím příkladu zjistíme, že jestliže v čase $t$ odebírá proud právě $j$ svářečů, potom se během intervalu $(t, t+h\rangle$ jejich počet o jednoho zvýší s pravděpodobností $(N-j)\lambda h + o(h)$ a o jednoho sníží s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$. Počet svářečů odebírajících proud se tedy nezmění s pravděpodobností $1 - [(N-j)\lambda + j\mu]h + o(h)$. Označíme-li $X_t$ počet svářečů, kteří v čase $t$ odebírají proud, je $\{X_t, t \geq 0\}$ homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Intenzity jsou

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= (N-j)\lambda, \;\; 0 \leq j \leq N-1, \\ q_{j,j-1} &= j\mu, \;\; 1 \leq j \leq N, \\ q_{jk} &= 0 \;\; \text{jinak.} \end{aligned}$$

Odtud

$$q_j = (N-j)\lambda + j\mu, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Matice intenzit:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
-N\lambda & N\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -([N-1]\lambda+\mu) & (N-1)\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -([N-2]\lambda+2\mu) & (N-2)\lambda & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -(N-1)\mu & -(\lambda+[N-1]\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & N\mu & -N\mu
\end{pmatrix}
$$

Soustava (2.16) pro výpočet limitního rozdělení $\pi_j$ má tvar

$$-N\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0,$$

$$(N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - ([N-j]\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} = 0, \quad 1 \le j \le N-1,$$

$$\lambda\pi_{N-1} - N\mu\pi_N = 0.$$

Označme opět

$$K_j = j\mu\pi_j - (N-j+1)\lambda\pi_{j-1}, \quad 1 \le j \le N,$$

potom lze rovnice přepsat do tvaru

$$K_1 = 0,$$

$$K_{j+1} - K_j = 0, \ \ 1 \le j \le N-1,$$

$$K_N = 0.$$

Tedy $K_1 = K_2 = \ldots = K_N = 0$, odtud

$$\pi_j = \frac{(N-j+1)\lambda}{j\mu}\pi_{j-1}, \quad 1 \le j \le N.$$

Postupnou úpravou dostaneme

$$\pi_j = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$ vypočteme

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1} = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-N} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N.$$

Po dosazení

$$\pi_j = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-j} =$$

$$= \binom{N}{j}\varrho^j(1-\varrho)^{N-j}, \quad 0 \le j \le N,$$

kde $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Limitní rozdělení $\{\pi_j\}$ je tedy binomické s parametry $N$ a $\varrho$. ○

Markovův řetězec se spojitým časem je vhodným modelem pro mnohé reálné procesy. Znalost matice $\mathbf{Q}$ intenzit přechodu umožňuje vypočítat pomocí odpovídající soustavy diferenciálních rovnic pravděpodobnosti přechodu nebo absolutní pravděpodobnosti. Ze soustavy lineárních algebraických rovnic lze určit limitní pravděpodobnosti jednotlivých stavů studovaného reálného systému. Nejznámějšími modely jsou Poissonův proces, proces růstu, proces zániku, proces růstu a zániku. Při jejich analýze se vychází z charakteru náhodných změn procesu v krátkém časovém intervalu.

## 2.4 Poissonův proces

Často zkoumáme procesy, při nichž jsou možnosti přechodů mezi jednotlivými stavy omezeny jen na některé. Tím se zkoumání usnadní. Nejjednodušším případem takového procesu je tzv. proces Poissonův, pojmenovaný po francouzském matematikovi Siméonu-Denisu Poissonovi (1781–1840). Jde o takový proces, při němž jsou změny možné pouze přechodem do nejblíže vyššího stavu. Navíc, jednotlivé události přicházejí spojitě a nezávisle na sobě. Poissonův proces se využívá při modelování radioaktivního rozpadu atomů, počtu požadavků na zobrazení webové stránky, dešťových srážek a mnoha dalších.

Uvažujeme události téhož typu, které nastávají náhodně v čase a to tak, že v (krátkém) časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ nastane událost s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$, nezávisle na $t$ a na počtu událostí, které nastaly v intervalu $(0, t\rangle$. Předpokládáme dále, že víc než jedna událost v intervalu $(t, t+h\rangle$ nastane jen s pravděpodobností $o(h)$ a že počty událostí, které se vyskytnou v disjunktních časových intervalech, jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Nechť $X_0 = 0$ a pro $t > 0$ nechť $X_t$ značí počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t\rangle$. Potom je $\{X_t,\ t \ge 0\}$ Markovův řetězec se spojitým časem a s množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, kterému se říká *Poissonův proces s intenzitou* $\lambda$.

Z předpokladů o charakteru náhodnosti popsaného děje plyne, že pravděpodobnost toho, kolik událostí nastane do okamžiku $t+h$, je jednoznačně určená počtem událostí, které nastaly do okamžiku $t$. Pro všechna $t \geq 0$ platí

$$P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(h) \begin{array}{ll} = \lambda h + o(h), & j = i+1, \\ = 1 - \lambda h + o(h), & j = i, \\ = o(h), & j > i+1, \\ = 0, & j < i. \end{array}$$

Pravděpodobnosti přechodu závisí pouze na délce $h$ časového intervalu. $\{X_t,\ t \geq \geq 0\}$ je homogenní řetězec, přechody mezi stavy jsou možné jen o jeden stav vpřed. Počáteční rozdělení je $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq 0$. Pro intenzity platí

$$q_{i,i+1} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda h + o(h)}{h} = \lambda,$$

$$q_i = -q_{ii} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - [1 - \lambda h + o(h)]}{h} = \lambda,$$

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = 0, \quad j \neq i,\ j \neq i+1.$$

Matice $\mathbf{Q}$ je tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Určíme nejprve absolutní pravděpodobnosti $p_j(t), j \in \mathsf{S}$, ze soustavy diferenciálních rovnic (2.13) s počáteční podmínkou $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq 0$.

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t), \\ p_1'(t) &= \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t), \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecně lze psát (vezmeme-li $p_{-1}(t) = 0$, $\forall t \geq 0$)

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t),\ j \in \mathsf{S}. \tag{2.18}$$

A) Tuto soustavu lze řešit postupně od první rovnice, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice lineární.

První rovnici lze separovat, její obecné řešení je $p_0(t) = Ce^{-\lambda t}$, z počáteční podmínky dostaneme $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Druhou rovnici $p_1'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_1(t)$ řešíme metodou variace konstant, dostaneme výsledek $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Obdobně řešíme další rovnici $p_2'(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda p_2(t)$, řešením je $p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$ atd., obecně

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t},\ j \in \mathsf{S}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = 1.$$

B) Soustavu diferenciálních rovnic (2.18) lze řešit pomocí následující *vytvořující funkce posloupnosti absolutních pravděpodobností* (viz Dodatek)

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j, \tag{2.19}$$

kde $t \geq 0$ a $s$ jsou taková čísla, pro která řada konverguje. Platí

$$\Pi(s,0) = 1, \qquad \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j.$$

Vynásobíme-li $j$-tou rovnici soustavy (2.18) výrazem $s^j$ a formálně sečteme všechny takto vynásobené rovnice, dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t)s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j + \lambda s \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j.$$

Tedy

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = -\lambda(1-s)\Pi(s,t), \quad \text{počáteční podmínka } \Pi(s,0) = 1.$$

Pro pevné $s$ zde máme diferenciální rovnici pro funkci $\Pi(s,t)$ proměnné $t$, její obecné řešení je

$$\Pi(s,t) = C(s)e^{-\lambda t(1-s)}.$$

Z počáteční podmínky dostaneme $C(s) = 1$, a tedy

$$\Pi(s,t) = e^{-\lambda t(1-s)} = e^{-\lambda t}e^{\lambda ts} = e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!}s^j.$$

Porovnáním se vzorcem (2.19) je vidět, že

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}, \quad j \in \mathsf{S}, \ t \geq 0,$$

jsou hledané pravděpodobnosti.

Tedy $X_t$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t$, tj. platí $E(X_t) = \lambda t$, $\mathrm{var}(X_t) = \lambda t$. Střední počet událostí, které nastanou do okamžiku $t$, je roven číslu $\lambda t$. Konstanta $\lambda$ představuje střední (očekávaný) počet událostí, které nastanou za časovou jednotku, proto se $\lambda$ nazývá „intenzita toku událostí“ nebo „intenzita procesu“.

Čísla $p_j(t)$ udávají pravděpodobnost, že v časovém intervalu $(0,t\rangle$ nastalo právě $j$ událostí (právě $j$ změn stavů systému).

Pravděpodobnost $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ vyjadřuje, že v intervalu $(0,t\rangle$ nenastala žádná událost, žádná změna mezi stavy. Označíme-li $T$ dobu čekání na změnu mezi stavy (dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu), lze tuto pravděpodobnost zapsat jako $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Odtud

$$P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

to znamená, že je-li rozdělení $X_t$ počtu událostí, které nastaly v intervalu $(0, t\rangle$ Poissonovo, je rozdělení doby $T$ čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

V případě Poissonova procesu neexistuje limitní rozdělení, protože

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{\lambda^j}{j!}\lim_{t\to\infty}\frac{t^j}{e^{\lambda t}} = 0, \quad \forall j \in \mathsf{S}.$$

Pravděpodobnosti přechodu ze stavu $i$ do stavu $j$ za dobu $t$ určíme řešením prospektivní soustavy Kolmogorovových diferenciálních rovnic (2.8)

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad i, j \in \mathsf{S}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} p'_{ii}(t) &= -\lambda p_{ii}(t), \quad i \in \mathsf{S}, \\ p'_{ij}(t) &= \lambda p_{i,j-1}(t) - \lambda p_{ij}(t), \quad j \geq i+1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Při řešení soustavy užijeme následující vytvořující funkci

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t) s^j,$$

pro kterou platí

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \sum_{j=i}^{\infty} p'_{ij}(t) s^j, \quad \Pi(s,0) = p_{ii}(0) s^i = s^i.$$

Vynásobíme-li druhou rovnici v (2.20) výrazem $s^j$ a sečteme formálně přes $j$ od $i$ do $\infty$ (užijeme toho, že $p_{i,i-1}(t) = 0$), dostaneme

$$\sum_{j=i}^{\infty} p'_{ij}(t)s^j = \lambda \sum_{j=i+1}^{\infty} p_{i,j-1}(t)s^j - \lambda \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t)s^j = \lambda s \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t)s^j - \lambda \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t)s^j,$$

odkud

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)\Pi(s,t).$$

Řešením této diferenciální rovnice pro pevné $s$ je funkce

$$\Pi(s,t) = C(s) e^{\lambda t(s-1)}.$$

Z počáteční podmínky $\Pi(s,0) = s^i$ dostáváme, že $C(s) = s^i$, a tedy

$$\Pi(s,t) = s^i e^{-\lambda t} e^{\lambda t s} = e^{-\lambda t} s^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k s^{k+i}}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} s^j.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin ve vytvořující funkci $\Pi(s,t)$ dostaneme

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0 & j < i. \end{cases}$$

**Poznámka 2.7** [Dupač (1976), s. 62] Příklady uvažovaných událostí mohou být:
- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic,
- rozpady radioaktivního prvku,
- volání přicházející na telefonní ústřednu,
- dopravní nehody registrované v nějakém silničním úseku,
- poruchy automatického stroje,
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Přísně vzato u žádného z těchto příkladů není splněn předpoklad o nezávislosti intenzity $\lambda$ výskytu událostí na čase $t$. Provoz v telefonní ústředně nějaké instituce je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží na denní době i na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá, a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po určitou vymezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity $\lambda$. Provoz telefonní ústředny nás zpravidla zajímá jen v její nejživější hodiny (ve špičce); je-li doba, po kterou registrujeme rozpady atomů dostatečně krátká ve srovnání s poločasem rozpadu radioaktivního prvku, pak úbytek množství prvku se během pozorovacího období neprojeví; stupeň opotřebení stroje nemusí mít vliv na jeho poruchovost tam, kde poruchy jsou převážně způsobovány vnějšími vlivy (např. surovinou, která se strojem zpracovává – přetržení niti na tkalcovském stavu).

**Příklad 2.7** Do tiskové agentury přicházejí po dvou linkách (např. fax a e-mail) zprávy z domova i ze světa. Příchody zpráv pokládáme za události dvou Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1, \lambda_2$, tyto procesy jsou nezávislé (říká se také, že zprávy vytvářejí dva nezávislé proudy). Určete pravděpodobnost, že za dobu $t$ přijde do agentury právě $n$ zpráv.

Řešení: Podle zadání platí pro absolutní pravděpodobnosti jednotlivých procesů

$$p_k^1(t) = e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_r^2(t) = e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Pro pravděpodobnost $p_n(t)$ toho, že v obou proudech přijde právě $n$ zpráv, platí

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k^1(t) p_{n-k}^2(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1)^k}{k!}\frac{(\lambda_2)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{n!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} t^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

○

## 2.5 Lineární proces růstu (Yuleův proces)

Proces růstu je matematickým modelem růstu populace, jejíž jedinci se mohou rozmnožovat (mohou být „zdrojem“ nových jedinců téhož druhu), ale nemohou zanikat. Navíc, rychlost růstu jedinců populace je proporcionální k současnému počtu jedinců v populaci. Tento proces zavedl britský matematik Udny Yule (1871–1951), který jej aplikoval právě k modelování biologických systémů. Není to ovšem zdaleka jediné možné použití tohoto procesu jako přirozeného modelu systémů reálného světa. Je například zřejmé, že pravděpodobnost návštěvy webové stránky bude růst s předchozím počtem návštěv; to ostatně souvisí s nastavením webových vyhledávačů, které takovouto stránku následně zobrazí jako jednu z předních možností. Níže tento proces podrobně prozkoumáme z matematického hlediska.

Předpokládáme, že v krátkém časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ vznikne z nějakého jedince nový jedinec s pravděpodobností $\lambda h + o(h), \lambda > 0$, nezávisle na ostatních jedincích a nevznikne nový jedinec s pravděpodobností $1 - \lambda h + o(h)$. Je-li v okamžiku $t$ v populaci právě $j$ jedinců, je pravděpodobnost toho, že v (krátkém) časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ přibude do populace jeden nový jedinec rovna

$$\binom{j}{1}[\lambda h + o(h)]^1[1 - \lambda h + o(h)]^{j-1} = j\lambda h + o(h).$$

Analogicky odvodíme, že pravděpodobnost toho, že se v populaci v uvedeném časovém intervalu objeví víc než jeden jedinec, je rovna

$$\sum_{r=2}^{j}\binom{j}{r}[\lambda h + o(h)]^r[1 - \lambda h + o(h)]^{j-r} = o(h).$$

Nechť $X_t$ značí počet jedinců, kteří jsou v populaci v čase $t$ (tzv. rozsah populace). Z předpokladů o charakteru vývoje populace plyne, že $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A) Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že na začátku je v populaci právě jeden jedinec, tj. že počáteční rozdělení je $p_1(0) = 1, p_j(0) = 0,\ \forall j \neq 1$, tj. $\mathsf{S} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Pravděpodobnosti přechodu jsou

$$\begin{gathered}
p_{j,j+1}(h) = j\lambda h + o(h), \quad j \in \mathsf{S}, \\
p_{j,j+k}(h) = o(h), \quad k \geq 2, \\
p_{jj}(h) = [1 - \lambda h + o(h)]^j = 1 - j\lambda h + o(h), \\
p_{j,r}(h) = 0, \quad r < j.
\end{gathered}$$

Intenzity přechodu jsou

$$q_{j,j+1} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{j,j+1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{j\lambda h + o(h)}{h} = j\lambda,$$

$$q_{j,j+k} = \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{j,j+k}(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0, \quad k \geq 2,$$

$$-q_{jj} = q_j = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-p_{j,j}(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-[1-j\lambda h + o(h)]}{h} = j\lambda, \quad j \in \mathsf{S}.$$

Tedy matice intenzit $\mathbf{Q}$ je tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda & 4\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Vypočteme absolutní pravděpodobnosti řešením soustavy (2.13). Po dosazení matice $\mathbf{Q}$ zjistíme, že absolutní pravděpodobnosti musí splňovat soustavu diferenciálních rovnic

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t), \quad p_j'(t) = -\lambda j p_j(t) + \lambda(j-1)p_{j-1}(t), \ j > 1, \tag{2.21}$$

s počáteční podmínkou $p_1(0) = 1$.

1. Soustavu lze řešit postupně. První rovnice je separovatelná, její obecné řešení je $p_1(t) = Ce^{-\lambda t}$; z počáteční podmínky dostaneme $C = 1$, a tedy $p_1(t) = e^{-\lambda t}$.

Dosadíme do druhé rovnice, která má potom tvar $p_2'(t) + 2\lambda p_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, její řešení je $p_2(t) = e^{-\lambda t}[1 - e^{-\lambda t}]$.

Po dosazení do třetí rovnice máme $p_3'(t) + 3\lambda p_3(t) = 2\lambda(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})$, její řešení $p_3(t) = e^{-\lambda t}[1-e^{-\lambda t}]^2$. Obecně $p_j(t) = e^{-\lambda t}[1-e^{-\lambda t}]^{j-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$

2. Soustavu diferenciálních rovnic lze řešit také pomocí vytvořující funkce posloupnosti $\{p_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$:

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t)s^j,$$

přičemž platí

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j'(t)s^j, \quad \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} \quad \Pi(s,0) = s, \quad \Pi(1,t) = 1.$$

Vynásobíme-li $j$-tou rovnici soustavy (2.21) výrazem $s^j$ a sečteme-li všechny rovnice od 1 do $\infty$, dostaneme (klademe $p_0(t) = 0$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j'(t)s^j = -\lambda \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^j + \lambda \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)p_{j-1}(t)s^j =$$

$$= -\lambda s \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)p_{j-1}(t)s^{j-2} = (-\lambda s + \lambda s^2) \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1}.$$

Zapíšeme tyto vztahy pomocí vytvořující funkce

$$\lambda s(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}+\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t}=0, \quad \Pi(s,0)=s.$$

Jedná se o parciální diferenciální rovnici, kterou řešíme následujícím způsobem (viz Dodatek). Nejprve řešíme pomocnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{ds}{\lambda s(1-s)}=dt.$$

Její řešení je

$$\ln s-\ln(1-s)=\lambda t+C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{1-s}=e^{\lambda t+C_1},$$

tedy obecné řešení pomocné rovnice je

$$\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}=C.$$

Obecné řešení parciální diferenciální rovnice má tvar

$$\Pi(s,t)=G\left(\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}\right),$$

kde $G$ je nějaká diferencovatelná funkce. Z počáteční podmínky máme $G(\frac{s}{1-s})=s$. Položíme-li $\frac{s}{1-s}=x$, dostaneme

$$G(x)=\frac{x}{1+x},$$

a tedy

$$\Pi(s,t)=\frac{\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}}{1+\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}}=\frac{se^{-\lambda t}}{1-s(1-e^{-\lambda t})}.$$

Užitím vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $q=s(1-e^{-\lambda t})$ vyjádříme poslední výraz ve tvaru mocninné řady

$$\Pi(s,t)=se^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}[s(1-e^{-\lambda t})]^n=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}s^k.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin ve vytvořující funkci dojdeme k závěru, že platí

$$P(X_t=j)=p_j(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j\in \mathsf{S}=\{1,2,3,\ldots\},\ t>0.$$

Platí $\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)=1,\ \forall t>0$. Pomocí vzorců

$$\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}=\frac{2}{(1-q)^3}, \quad |q|<1, \tag{2.22}$$

vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $X_t$.

$$E(X_t)=\sum_{j=1}^{\infty}je^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}=e^{-\lambda t}\frac{1}{(1-[1-e^{-\lambda t}])^2}=e^{\lambda t},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X_t) &= E[X_t(X_t-1)] + E(X_t) - [E(X_t)]^2 = \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1} + E(X_t) - [E(X_t)]^2 = \\ &= e^{-\lambda t}\frac{2(1-e^{-\lambda t})}{(1-[1-e^{-\lambda t}])^3} + e^{\lambda t} - e^{2\lambda t} = e^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1).\end{aligned}$$

B) Předpokládejme nyní, že v čase 0 je v populaci právě $i$ jedinců, tj. že počáteční rozdělení je $p_i(0) = 1, p_j(0) = 0, \forall j \neq i$. Potom $\mathsf{S} = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ a matice $\mathbf{Q}$ má tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -i\lambda & i\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -(i+1)\lambda & (i+1)\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -(i+2)\lambda & (i+2)\lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Soustava diferenciálních rovnic pro určení absolutních pravděpodobností $\{p_j(t)\}_{j=i}^{\infty}$ má v tomto případě tvar

$$p_i'(t) = -i\lambda p_i(t), \qquad p_j'(t) = -\lambda j p_j(t) + \lambda(j-1)p_{j-1}(t), \quad j > i,$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1, \ p_j(0) = 0, \quad \forall j \neq i$.

Soustavu vyřešíme pomocí následující vytvořující funkce

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=i}^{\infty} p_j(t)s^j, \quad \Pi(s,0) = p_{ii}(0)s^i = s^i.$$

Vynásobíme $j$-tou rovnici výrazem $s^j$ a sečteme od $i$ do $\infty$ (klademe $p_{i-1}(t) = 0$), dostaneme

$$\sum_{j=i}^{\infty} p_j'(t)s^j = -\lambda \sum_{j=i}^{\infty} jp_j(t)s^j + \lambda \sum_{j=i+1}^{\infty} (j-1)p_{j-1}(t)s^j =$$

$$= -\lambda s \sum_{j=i}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=i+1}^{\infty} (j-1)p_{j-1}(t)s^{j-2} = -\lambda s \sum_{j=i}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=i}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1}.$$

Tedy

$$\sum_{j=i}^{\infty} p_j'(t)s^j = (-\lambda s + \lambda s^2)\sum_{j=i}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1},$$

tj. vyjádřeno pomocí vytvořující funkce

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \lambda s(s-1)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}, \quad \text{počáteční podmínka } \Pi(s,0) = s^i.$$

Je to stejná rovnice jako v situaci, kdy v čase 0 populaci tvořil jeden jedinec, liší se pouze počáteční podmínka. Proto

$$\Pi(s,t) = G\left(\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}\right),$$

kde $G$ je nějaká diferencovatelná funkce. Z počáteční podmínky plyne, že $G(\frac{s}{1-s}) = s^i$. Položíme-li $\frac{s}{1-s} = x$, dostaneme $G(x) = (\frac{x}{1+x})^i$, tedy

$$\Pi(s,t) = \left(\frac{\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}}{1+\frac{s}{1-s}e^{-\lambda t}}\right)^i = \left(\frac{se^{-\lambda t}}{1-s+se^{-\lambda t}}\right)^i = s^i e^{-\lambda it}\frac{1}{[1-s(1-e^{-\lambda t})]^i}.$$

Užitím vzorce

$$(1+x)^c = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R},$$

rozvineme zlomek ve výrazu pro $\Pi(s,t)$ do mocninné řady. Označme $a = 1-e^{-\lambda t}$. Potom

$$(1-sa)^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)(-i-1)(-i-2)\cdots(-i-n+1)}{n!}(-sa)^n,$$

dosadíme do vytvořující funkce

$$\begin{aligned}
\Pi(s,t) &= s^i e^{-\lambda it}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-i)(-i-1)(-i-2)\cdots(-i-n+1)}{n!}s^n a^n = \\
&= e^{-\lambda it}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+n-1)}{n!}a^n s^{n+i} = \\
&= e^{-\lambda it}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{i+n-1}{n}a^n s^{n+i} = \sum_{k=i}^{\infty}e^{-\lambda it}\binom{k-1}{k-i}(1-e^{-\lambda t})^{k-i}s^k.
\end{aligned}$$

Porovnáním s definičním vzorcem vytvořující funkce dostáváme výsledek

$$P(X_t = j) = p_j(t) = \binom{j-1}{j-i}e^{-\lambda it}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \geq i, \quad t > 0.$$

Označme $j - i = k$ a zaveďme novou náhodnou veličinu $Y_t = X_t - i$, potom

$$P(Y_t = k) = \binom{i+k-1}{k}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^k, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

tj. náhodná veličina $Y_t$ má negativní binomické rozdělení (viz [Kunderová, s. 67]) s parametry $p = e^{-\lambda t}$, $n = i \in \{1,2,\ldots\}$. Platí

$$E(Y_t) = \frac{n(1-p)}{p} = \frac{i(1-e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} = ie^{\lambda t} - i,$$

$$\operatorname{var}(Y_t) = \frac{n(1-p)}{p^2} = \frac{i(1-e^{-\lambda t})}{(e^{-\lambda t})^2} = ie^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1),$$

tedy

$$E(X_t) = E(Y_t) + i = ie^{\lambda t}, \qquad \operatorname{var}(X_t) = \operatorname{var}(Y_t) = ie^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1).$$

**Poznámka 2.8** (*Obecný proces růstu*) [Dupač (1976), s. 67] Nechť je v čase 0 v populaci právě $i$ jedinců. V předchozích úvahách jsme předpokládali, že $q_{j,j+1} = j\lambda$, tj. že intenzity jsou součinem počtu jedinců v populaci a společného parametru $\lambda > 0$. Obecně lze předpokládat, že $q_{j,j+1} = \lambda_j$, $q_{jj} = -q_j = -\lambda_j$, $i \leq j < \infty$, $q_{jk} = 0$ jinak. (Musí platit $\lambda_j > 0$, $\forall i \leq j < \infty$. Kdyby některé $\lambda_n = 0$, byl by řetězec konečný se stavy $i, i+1, \ldots, n$.)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_i & \lambda_i & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda_{i+1} & \lambda_{i+1} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda_{i+2} & \lambda_{i+2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ vyhovují soustavě diferenciálních rovnic

$$p_i'(t) = -\lambda_i p_i(t), \quad p_j'(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - \lambda_j p_j(t), \quad j > i.$$

Postupným řešením od první rovnice s užitím počáteční podmínky $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq i$, dostaneme [Prášková, s. 106]

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t},$$

$$p_j(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} p_{j-1}(s) ds, \quad i < j < \infty, \ t > 0.$$

## 2.6 Lineární proces zániku

Uvažujeme populaci tvořenou jedinci (částicemi), kteří mohou zanikat, ale nemohou se rozmnožovat. Předpokládáme, že jedinec zanikne (nezávisle na ostatních jedincích) v krátkém časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, $\mu > 0$, a nezanikne s pravděpodobností $1 - \mu h + o(h)$. Předpokládejme, že v čase 0 je v populaci právě $r$ jedinců, $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

Je-li v populaci v okamžiku $t$ právě $j$ jedinců, je pravděpodobnost toho, že v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ jeden jedinec zanikne,

$$\binom{j}{1} (\mu h + o(h))^1 (1 - \mu h + o(h))^{j-1} = j\mu h + o(h).$$

Analogicky je pravděpodobnost toho, že v krátkém časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ zanikne víc než jeden jedinec, rovna

$$\sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} (\mu h + o(h))^k (1 - \mu h + o(h))^{j-k} = o(h).$$

Označíme-li $X_t$ počet jedinců, kteří jsou v populaci v čase $t$, je systém náhodných veličin $\{X_t,\ t \geq 0\}$ homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, \ldots, r\}$, počátečním rozdělením $p_r(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq r$, a pravděpodobnostmi přechodu

$$\begin{aligned} p_{j,j-1}(h) &= j\mu h + o(h), \\ p_{jj}(h) &= [1 - \mu h + o(h)]^j = 1 - j\mu h + o(h), \\ p_{jk}(h) &= o(h), \quad k < j - 1, \\ p_{jk}(h) &= 0, \quad k > j. \end{aligned}$$

Intenzity přechodu jsou

$$\begin{aligned} q_{j,j-1} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{j\mu h + o(h)}{h} = j\mu, \\ -q_{jj} = q_j &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - [1 - j\mu h + o(h)]}{h} = j\mu, \\ q_{jk} &= 0, \quad \forall k \neq i, \ k \neq i - 1. \end{aligned}$$

Matice intenzit má tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & r\mu & -r\mu \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti určíme řešením soustavy (2.13), která má v tomto případě $r + 1$ rovnic

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu p_1(t), \\ p_1'(t) &= -\mu p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\ p_2'(t) &= -2\mu p_2(t) + 3\mu p_3(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_j'(t) &= -j\mu p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \qquad (2.23) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{r-1}'(t) &= -(r-1)\mu p_{r-1}(t) + r\mu p_r(t), \\ p_r'(t) &= -r\mu p_r(t). \end{aligned}$$

A) Soustavu lze řešit postupně od poslední rovnice. Dostaneme $p_r(t) = Ce^{-r\mu t}$, z počáteční podmínky $C = 1$, a tedy $p_r(t) = e^{-r\mu t}$. (Je to pravděpodobnost toho, že v časovém intervalu $(0, t\rangle$ nedošlo k žádné změně, žádný jedinec nezanikl.) Potom řešíme rovnici

$$p'_{r-1}(t) + (r-1)p_{r-1}(t) = r\mu e^{-r\mu t},$$

výsledkem je

$$p_{r-1}(t) = re^{-r\mu t}(e^{\mu t} - 1).$$

Opakovaným postupem dostaneme [Maixner, s. 68]

$$p_j(t) = \binom{r}{j} e^{-r\mu t}(e^{\mu t} - 1)^{r-j}, \; j = r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0, \quad t > 0.$$

Platí

$$\sum_{j=0}^{r} p_j(t) = e^{-r\mu t} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (e^{\mu t} - 1)^{r-k} = e^{-r\mu t}[1 + (e^{\mu t} - 1)]^r = 1, \quad t > 0.$$

B) Absolutní pravděpodobnosti lze určit také pomocí vytvořující funkce

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=0}^{r} p_j(t)s^j, \quad \Pi(s,0) = s^r,$$

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{r} p'_j(t)s^j, \quad \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = \sum_{j=0}^{r} jp_j(t)s^{j-1} = \sum_{j=1}^{r} jp_j(t)s^{j-1}.$$

Vynásobíme-li $j$-tou rovnici (2.23) výrazem $s^j$ a sečteme od 0 do $r$, dostaneme

$$\sum_{j=0}^{r} p'_j(t)s^j = -\mu \sum_{j=0}^{r} jp_j(t)s^j + \mu \sum_{j=0}^{r-1} (j+1)p_{j+1}(t)s^j = -\mu s \sum_{j=0}^{r} jp_j(t)s^{j-1} + \mu \sum_{j=1}^{r} jp_j(t)s^{j-1}.$$

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \mu(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}. \tag{2.24}$$

Tuto parciální diferenciální rovnici budeme řešit obdobně jako v předchozích odstavcích. Pomocná rovnice má tvar

$$\frac{ds}{\mu(1-s)} = -\frac{dt}{1},$$

její obecné řešení je $(1-s)e^{-\mu t} = C$. Obecné řešení rovnice (2.24) je

$$\Pi(s,t) = G[(1-s)e^{-\mu t}],$$

kde $G$ je libovolná diferencovatelná funkce. Pro $t = 0$ dostaneme

$$\Pi(s,0) = s^r = G(1-s).$$

Položíme-li $1 - s = x$, tj. $s = 1 - x$, je $G(x) = (1-x)^r$. Tedy

$$\Pi(s,t) = [1 - (1-s)e^{-\mu t}]^r = [e^{-\mu t}(s - 1 + e^{\mu t})]^r = e^{-\mu tr}([e^{\mu t} - 1] + s)^r.$$

Užitím binomické věty pro poslední mocninu dostaneme

$$\Pi(s,t) = e^{-r\mu t} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (e^{\mu t} - 1)^{r-j} s^j.$$

Porovnáním s tvarem vytvořující funkce odtud plyne, že absolutní pravděpodobnosti jsou

$$p_j(t) = \binom{r}{j} e^{-r\mu t}(e^{\mu t} - 1)^{r-j}, \quad t > 0,\ j = 0, 1, \ldots, r.$$

Dospěli jsme ke stejnému výsledku jako v bodě A.

Vypočteme číselné charakteristiky

$$E(X_t) = \sum_{j=0}^{r} j p_j(t) = \sum_{j=1}^{r} j \binom{r}{j} e^{-r\mu t}(e^{\mu t} - 1)^{r-j} =$$

$$= e^{-r\mu t} r \sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} (e^{\mu t} - 1)^{r-j} = r e^{-r\mu t} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (e^{\mu t} - 1)^{r-1-k} =$$

$$= r e^{-r\mu t}[1 + e^{\mu t} - 1]^{r-1} = r e^{-\mu t}.$$

$$\mathrm{var}(X_t) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2 = E[X_t(X_t - 1)] + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= \sum_{j=2}^{r} j(j-1) \frac{r!}{j!(r-j)!} e^{-r\mu t}(e^{\mu t} - 1)^{r-j} + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= r(r-1) e^{-r\mu t} \sum_{j=2}^{r} \binom{r-2}{j-2} (e^{\mu t} - 1)^{r-j} + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= r(r-1) e^{-r\mu t} \sum_{k=0}^{r-2} \binom{r-2}{k} (e^{\mu t} - 1)^{r-2-k} + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= r(r-1) e^{-r\mu t}[1 + e^{\mu t} - 1]^{r-2} + r e^{-\mu t} - r^2 e^{-2\mu t} = r e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t}).$$

**Poznámka 2.9** (*Obecný proces zániku*) Nechť je v populaci v čase 0 právě $r$ jedinců. Stejně jako v případě procesu růstu lze obecně předpokládat, že

$$q_{j,j-1} = \mu_j, \quad q_{jj} = -q_j = -\mu_j, \quad j = r, r-1, \ldots, 1, \quad \mu_j > 0,\ \forall j,$$

$$q_{jk} = 0, \quad k \neq j-1,\ k \neq j, \quad q_{0,j} = 0, \quad \forall j.$$

Tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_r & -\mu_r \end{pmatrix}.$$

Systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{gathered}
p_0'(t) = \mu_1 p_1(t), \\
p_j'(t) = -\mu_j p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots, r-1, \\
p_r'(t) = -\mu_r p_r(t)
\end{gathered}
$$

řešíme postupně od poslední rovnice. Pro $r = 1$ dostaneme ihned

$$p_1(t) = e^{-\mu_1 t}, \qquad p_0(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}.$$

Pro $r = 2$

$$p_2(t) = e^{-\mu_2 t}, \qquad p_1(t) = -\mu_2 \left[ \frac{e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} \right],$$

$$p_0(t) = \mu_1 \mu_2 \left[ \frac{e^{-\mu_2 t} - 1}{\mu_2(\mu_2 - \mu_1)} + \frac{e^{-\mu_1 t} - 1}{\mu_1(\mu_1 - \mu_2)} \right].$$

Pro $r = 3$

$$p_3(t) = e^{-\mu_3 t}, \qquad p_2(t) = -\mu_3 \left[ \frac{e^{-\mu_3 t}}{\mu_3 - \mu_2} + \frac{e^{-\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_3} \right],$$

$$p_1(t) = \mu_2 \mu_3 \left[ \frac{e^{-\mu_3 t}}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} + \frac{e^{-\mu_2 t}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{e^{-\mu_1 t}}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} \right],$$

$$
\begin{aligned}
p_0(t) &= -\mu_1 \mu_2 \mu_3 \times \\
&\times \left[ \frac{e^{-\mu_3 t} - 1}{\mu_3(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} + \frac{e^{-\mu_2 t} - 1}{\mu_2(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{e^{-\mu_1} - 1}{\mu_1(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} \right].
\end{aligned}
$$

Obecně

$$p_r(t) = e^{-\mu_r t}, \qquad p_{r-1}(t) = -\mu_r \left[ \frac{e^{-\mu_r t}}{\mu_r - \mu_{r-1}} + \frac{e^{-\mu_{r-1} t}}{\mu_{r-1} - \mu_r} \right],$$

$$
\begin{aligned}
p_k(t) &= (-1)^{r-k} \mu_{k+1} \mu_{k+2} \cdots \mu_r \times \\
&\times \sum_{i=k}^{r} \frac{e^{-\mu_i t}}{(\mu_i - \mu_1)(\mu_i - \mu_2) \cdots (\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1}) \cdots (\mu_i - \mu_r)}, \\
&\hfill k = 1, 2, \ldots, r-2, \\
p_0(t) &= (-1)^r \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r \times \\
&\times \sum_{i=1}^{r} \frac{e^{-\mu_i t} - 1}{\mu_i(\mu_i - \mu_1)(\mu_i - \mu_2) \cdots (\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1}) \cdots (\mu_i - \mu_r)}.
\end{aligned}
$$

Ze vzorců je zřejmé, že musíme předpokládat $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_r$.

## 2.7 Lineární proces růstu a zániku

Tento proces je neužívanějším v aplikacích, jak uvidíme v další kapitole na příkladu systémů hromadné obsluhy. Lze též říci, že proces růstu a proces zániku jsou speciálními případy tohoto procesu.

Lineární proces růstu a zániku modeluje vývoj populace, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat. Pravděpodobnost, že z jedince vznikne během krátkého časového intervalu $(t, t+h\rangle$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$, více jedinců vznikne s pravděpodobností $o(h)$. Každý jedinec během intervalu $(t, t+h\rangle$ zanikne s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, $\mu > 0$. Jedinci se chovají vzájemně nezávisle (jejich osudy jsou nezávislé). Je-li rozsah populace (počet jedinců) v čase $t$ roven $j$, potom se během intervalu $(t, t+h\rangle$ počet jedinců o jednoho zvětší s pravděpodobností $j\lambda h + o(h)$, o jednoho zmenší s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$. K více než jedné změně dojde s pravděpodobností $o(h)$ a k žádné změně s pravděpodobností $1 - j\lambda h - j\mu h + o(h)$. Skutečně,

$$p_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1}(\lambda h + o(h))^1(1-\lambda h + o(h))^{j-1}(1-\mu h + o(h))^j + o(h) = j\lambda h + o(h),$$

$$p_{j,j-1}(h) = \binom{j}{1}(\mu h + o(h))^1(1-\mu h + o(h))^{j-1}(1-\lambda h + o(h))^j + o(h) = j\mu h + o(h),$$

$$p_{jj}(h) = (1 - \lambda h + o(h))^j(1 - \mu h + o(h))^j = 1 - j(\lambda + \mu)h + o(h),$$

$$p_{j,j+2}(h) = p_{j,j-2}(h) = o(h), \qquad p_{jk}(h) = 0, \quad \forall k > j+2, \ \forall k < j-2.$$

Je-li $X_t$ počet jedinců v populaci v čase $t$, je $\{X_t, \, t \geq 0\}$ homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, spočetnou množinou stavů $\mathsf{S} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$ a s intenzitami přechodu

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= j\lambda, \quad 0 \leq j < \infty, \\ q_{j,j-1} &= j\mu, \quad 1 \leq j < \infty, \\ q_{jj} &= -q_j = -j(\lambda + \mu), \quad 0 \leq j < \infty, \\ q_{jk} &= 0, \quad \text{jinak}. \end{aligned}$$

Tedy matice intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Předpokládáme, že v čase nula je v populaci alespoň jeden jedinec. Absolutní pravděpodobnosti vyhovují podle (2.13) soustavě diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
p_0'(t) &= \mu p_1(t), \\
p_j'(t) &= (j-1)\lambda p_{j-1}(t) - j(\lambda+\mu)p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Pro řešení soustavy užijeme opět vytvořující funkci

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j, \quad \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1}.$$

Násobením (2.25) výrazem $s^j$ a sečtením od 0 do $\infty$ dostaneme (zde klademe $p_{-1}(t) = 0$)

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\lambda p_{j-1}(t)s^j - \sum_{j=1}^{\infty} j(\lambda+\mu)p_j(t)s^j + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\mu p_{j+1}(t)s^j =$$

$$= \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)p_{j-1}(t)s^{j-2} - (\lambda+\mu)s\sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} + \mu \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_{j+1}(t)s^j =$$

$$= \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} - (\lambda+\mu)s\sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1} + \mu \sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1}.$$

Tedy

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j = (\lambda s^2 - \lambda s - \mu s + \mu)\sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t)s^{j-1},$$

tj.

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = [\mu + \lambda s^2 - s(\lambda+\mu)]\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = (\mu - \lambda s)(1-s)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s}. \tag{2.26}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že na počátku je v populaci jeden jedinec, tj. že počáteční rozdělení je $p_1(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq 1$, potom $\Pi(s,0) = s$.

A) Uvažujme nejprve situaci, kdy $\lambda = \mu$.

Pomocná obyčejná diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{ds}{\lambda(1-s)^2} = -\frac{dt}{1},$$

její obecné řešení je $\frac{1}{1-s} + \lambda t = C$. Tedy obecné řešení parciální diferenciální rovnice (2.26) je

$$\Pi(s,t) = G\left(\frac{1}{1-s} + \lambda t\right),$$

kde $G$ je libovolná diferencovatelná funkce. Tuto funkci určíme pomocí počáteční podmínky.

$$\Pi(s,0) = G\left(\frac{1}{1-s}\right) = s.$$

Položíme-li $\frac{1}{1-s} = x$, dostaneme $s = \frac{x-1}{x}$, a tedy

$$\Pi(s,t) = \frac{\frac{1}{1-s} + \lambda t - 1}{\frac{1}{1-s} + \lambda t} = \frac{\lambda t - \lambda ts + s}{1 + \lambda t - \lambda ts} = \frac{\lambda t + s(1-\lambda t)}{1 + \lambda t - \lambda ts}\,\frac{\frac{1}{1+\lambda t}}{\frac{1}{1+\lambda t}} = \frac{\frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}s}{1 - \frac{\lambda t}{1+\lambda t}s}.$$

Tento výraz rozdělíme na dva zlomky a užijeme vzorec pro součet geometrické řady.

$$\Pi(s,t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^n s^n + \frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^n s^{n+1} =$$

$$= \frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{k-1} s^k + \frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{k-1} s^k =$$

$$= \frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \frac{1}{(1+\lambda t)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{k-1} s^k = \frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}} s^j$$

a porovnáme koeficienty u stejných mocnin ve funkci $\Pi(s,t)$.

Máme

$$p_0(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t}, \quad t > 0, \qquad p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad t > 0.$$

Platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = p_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \frac{1}{(1+\lambda t)^2}\frac{1}{1-\frac{\lambda t}{1+\lambda t}} = \frac{1+\lambda t}{1+\lambda t} = 1.$$

Pomocí vzorců (2.22) vypočteme

$$E(X_t) = 0 \cdot \frac{\lambda t}{1+\lambda t} + \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}} = \frac{1}{(1+\lambda t)^2}\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda t)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^2} = 1.$$

$$\mathrm{var}(X_t) = E[X_t(X_t-1)] + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}} + E(X_t) - [E(X_t)]^2 =$$

$$= \frac{\lambda t}{(1+\lambda t)^3}\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{j-2} = \frac{\lambda t}{(1+\lambda t)^3}\frac{2}{\left(1-\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^3} = 2\lambda t.$$

Pravděpodobnost, že populace někdy zanikne, je v případě $\mu = \lambda$ rovna

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda t}{1+\lambda t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\lambda t}+1} = 1.$$

Platí

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda t}+1\right)^{j-1}}\frac{1}{(1+\lambda t)^2} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

B) Nechť $\lambda \neq \mu$.
Řešíme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} - [\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu]\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = 0.$$

Pomocná obyčejná diferenciální rovnice je v tomto případě

$$\frac{ds}{\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu} = -\frac{dt}{1}.$$

Při jejím řešení užijeme vztahy

$$\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu = (s-1)(\lambda s - \mu),$$
$$\frac{1}{\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu} = \frac{1}{\lambda-\mu}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\cdot\frac{1}{\lambda s-\mu}.$$

Tedy

$$-\int \frac{ds}{s-1} + \int \frac{\lambda}{\lambda s - \mu} ds = (\lambda-\mu)\int dt,$$
$$\ln\frac{\lambda s-\mu}{s-1} = (\lambda-\mu)t + C_1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda s - \mu}{s-1} = Ce^{(\lambda-\mu)t}.$$

Obecné řešení pomocné rovnice je

$$\frac{\mu-\lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t} = C.$$

Vytvořující funkce je proto tvaru

$$\Pi(s,t) = G\left(\frac{\mu-\lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t}\right),$$

kde $G$ je libovolná diferencovatelná funkce. Její tvar určíme z počáteční podmínky, platí

$$\Pi(s,0) = s = G\left(\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\right).$$

Tedy

$$\frac{\mu-\lambda s}{1-s} = x \;\Rightarrow\; s = \frac{\mu-x}{\lambda-x} \;\Rightarrow\; G(x) = \frac{\mu-x}{\lambda-x}.$$

$$\Pi(s,t) = \frac{\mu - \frac{\mu-\lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \frac{\mu-\lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t}} =$$

$$= \frac{\mu-\lambda s-\mu e^{(\lambda-\mu)t}(1-s)}{\mu-\lambda s-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}(1-s)} = \frac{\mu[1-e^{(\lambda-\mu)t}]-[\lambda-\mu e^{(\lambda-\mu)t}]s}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\lambda[1-e^{(\lambda-\mu)t}]s} =$$

$$= \frac{\mu[1-e^{(\lambda-\mu)t}]-[\lambda-\mu e^{(\lambda-\mu)t}]s}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\lambda[1-e^{(\lambda-\mu)t}]s} = \frac{\mu\frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}} - \frac{\lambda-\mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}}s}{1-\lambda\frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}}s}.$$

Označíme-li

$$A(t) = \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}},$$

dostaneme zjednodušený výraz

$$\Pi(s,t) = \frac{\mu A(t) - [\lambda A(t) + \mu A(t) - 1]s}{1 - \lambda A(t)s}.$$

Výraz pro $\Pi(s,t)$ rozdělíme na dva zlomky, užitím vzorce pro součet geometrické řady dostaneme

$$\Pi(s,t) = \mu A(t) \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda A(t)]^n s^n - [\lambda A(t) + \mu A(t) - 1] \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n [A(t)]^n s^{n+1} =$$

$$= \mu A(t) + \lambda A(t) \mu A(t) \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda A(t)]^{j-1} s^j - [\lambda A(t) + \mu A(t) - 1] \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda A(t)]^{j-1} s^j =$$

$$= \mu A(t) s^0 + [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)] \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda A(t)]^{j-1} s^j$$

a porovnáme koeficienty u stejných mocnin ve funkci $\Pi(s,t)$.
Dostaneme absolutní pravděpodobnosti

$$p_0(t) = \mu A(t), \quad t > 0,$$

$$p_j(t) = [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \; t > 0,$$

kde

$$A(t) = \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}.$$

Číselné charakteristiky náhodné veličiny $X_t$ vypočteme pomocí vzorců (2.22)

$$E(X_t) = 0 \cdot \mu A(t) + \sum_{j=1}^{\infty} j [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1} =$$

$$= [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)] \frac{1}{(1 - \lambda A(t))^2} = \frac{1 - \mu A(t)}{1 - \lambda A(t)} = \frac{1 - \mu \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}}{1 - \lambda \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}} = e^{(\lambda - \mu)t}.$$

Pro výpočet rozptylu užijeme vztah $\mathrm{var}(X_t) = E[X_t(X_t - 1)] + E(X_t) - [E(X_t)]^2$.
Nejprve vypočteme

$$E[X_t(X_t - 1)] = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)[1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1} =$$

$$= [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)] \lambda A(t) \frac{2}{[1 - \lambda A(t)]^3} = \frac{2\lambda A(t)[1 - \mu A(t)]}{[1 - \lambda A(t)]^2}.$$

Tedy

$$\mathrm{var}(X_t) = \frac{2\lambda A(t)[1 - \mu A(t)]}{[1 - \lambda A(t)]^2} + \frac{1 - \mu A(t)}{1 - \lambda A(t)} - \frac{[1 - \mu A(t)]^2}{[1 - \lambda A(t)]^2} =$$

$$= \frac{1 - \mu A(t)}{1 - \lambda A(t)} \cdot \frac{A(t)(\lambda + \mu)}{1 - \lambda A(t)} =$$

$$= E(X_t)(\lambda + \mu) \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda} = \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda} e^{(\lambda - \mu)t} \left(1 - e^{(\lambda - \mu)t}\right).$$

Určíme pravděpodobnost, že populace někdy zanikne. Nejprve vypočteme

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}} = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(\lambda-\mu)t}-1}{\mu e^{-(\lambda-\mu)t}-\lambda} = \frac{1}{\lambda}, & \text{pro} \quad \lambda > \mu, \\ \frac{1}{\mu}, & \text{pro} \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Potom

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \lim_{t\to\infty} \mu A(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda}, & \text{pro} \quad \lambda > \mu, \\ 1, & \text{pro} \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Ze vzorce pro $p_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, je zřejmé, že $\lim_{t\to\infty} p_j(t) = 0$, $\forall j = 1, 2, 3, \ldots$ To znamená, že všechny stavy $j = 1, 2, 3, \ldots$ jsou přechodné, pro $t \to \infty$ buď proces skončí ve stavu 0 (s pravděpodobností 1, je-li $\lambda \leq \mu$, nebo s pravděpodobností $\frac{\mu}{\lambda}$, je-li $\lambda > \mu$), nebo počet jedinců v systému poroste nade všechny meze (s pravděpodobností $1 - \frac{\mu}{\lambda}$, je-li $\lambda > \mu$).

**Poznámka 2.10** Předpokládáme-li, že v čase 0 je v populaci právě $i \neq 1$ jedinců, tj. že počáteční rozdělení je $p_i(0) = 1, p_j(0) = 0$, $\forall j \neq i$, lze pro určení absolutních pravděpodobností užít obdobných postupů jako v předchozích odstavcích. Výpočty jsou ale časově náročné, vedou ke složitým vzorcům.

**Poznámka 2.11** (*Obecný proces růstu a zániku*) Obdobně jako v předchozích kapitolách lze v procesu růstu a zániku uvažovat, že pro intenzity přechodu platí obecně

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\ q_{j,j-1} &= \mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \\ q_0 &= \lambda_0, \\ q_{jk} &= 0, \quad \text{jinak}, \\ q_j &= \lambda_j + \mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Matice intenzit je tedy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Soustava diferenciálních rovnic pro absolutní pravděpodobnosti (2.13) má tvar

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),$$

$$p_j'(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq i$, za předpokladu, že všechna $\lambda_j$, $\mu_j$ jsou kladná.

Řešení této soustavy je obtížné, v praxi se řeší obvykle pro speciální volbu intenzit $\lambda_j, \mu_j$ (viz např. [Maixner, s. 70]).

Pro obecný proces růstu a zániku lze určit limitní pravděpodobnosti (viz např. [Dupač (1976), s. 74; Prášková, s. 110]).

**Poznámka 2.12** [Dupač (1976), s. 79] Procesy růstu a zániku mají četné aplikace v různých oborech, zejména v systémech hromadné obsluhy, v kinetice chemických reakcí, v epidemiologii (vznik jedince znamená jeho onemocnění určitou infekční nemocí, zánik jedince znamená jeho uzdravení) apod. Příklady uvidíme v následující kapitole.

# 3 Aplikace Markovových řetězců

Většina znalostí z předchozích dvou kapitol, které byly orientovány spíše teoreticky, nyní poslouží při studiu aplikací Markovových řetězců. Přitom budete využívat jak poznatky o řetězcích s diskrétním časem (Markovovy řetězce s výnosy, simulace Markovových řetězců), tak i se spojitým časem, které jsou nepostradatelnou součástí systémů hromadné obsluhy. Pod systémem hromadné obsluhy si můžete představit nejenom pokladní systémy v supermarketech nebo obslužné systémy pro seřizování automatických strojů, zmíněné v předmluvě tohoto učebního textu, ale například též centra urgentního příjmu v nemocnicích: i zde nás zajímá, kolik lékařů musí být v pohotovosti, aby zvládli ošetřit náhlé akutní případy, ale přitom nebyli zbytečně blokováni pro další zdravotnické úkoly. Porozumíte několika v praxi důležitým modelům, například systémům s neomezenou a omezenou délkou fronty. Na závěr se také na příkladech seznámíte s použitím Markovových řetězců v teorii učení.

Doposud zmíněné příklady užití Markovových řetězců měly především ilustrativní charakter a sloužily zejména k osvětlení teorie. Navíc, na konci minulé kapitoly jsme zmínili některé známé Markovovy řetězce se spojitým časem jako Poissonův proces, lineární procesy růstu, zániku a růstu a zániku. S aplikacemi Markovových řetězců se ale také setkáte při řešení mnoha praktických problémů z oblasti ekonomiky či přírodních věd. Vzhledem k rozsahu tohoto učebního textu se omezíme pouze na některé z nich, a to jak pro řetězce s diskrétním, tak spojitým časem. Zmíníme se tak o Markovových řetězcích s výnosy, simulacích Markovových řetězců, a dále uvedeme aplikace v teorii hromadné obsluhy a v teorii zásob.

## 3.1 Markovovy řetězce s výnosy

V praktických úlohách, kde se vyskytují Markovovy řetězce s diskrétním časem a konečnou množinou stavů $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, m\}$, se často setkáváme s případy, kdy můžeme prvkům $p_{ij}$, $i, j \in \mathsf{S}$, matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ přiřadit určité ocenění (výnos) $r_{ij} \in \mathbb{R}$. Toto má především ekonomické aplikace, kdy ocenění umožňuje vyjádřit různé situace ve srovnatelných jednotkách (peněžních či naturálních). V příkladu 1.6 jsme se setkali s výrobkem, který podnik podle počtu jeho prodaných kusů dělí na úspěšný a neúspěšný. Je zřejmé, že přechod od prodeje úspěšného výrobku k prodeji výrobku, který zůstává na skladě, vede k určité ztrátě, kterou je možno vyčíslit „oceněním“ této situace. Stejně tak lze vyčíslit náklady na přechod stroje z provozního stavu do stavu vyřazení či opravy a náklady s tím související.

Již samotná ocenění přechodů, která odpovídají daným pravděpodobnostem přechodů, nám poskytují další cennou informaci. Navíc, volbou ocenění a volbou pravděpodobností přechodu můžeme zasáhnout do struktury řetězce s cílem dosáhnout maxima výnosu v průběhu realizace náhodného procesu.

Protože je celkový výnos daného Markovova řetězce vzešlého ze stavu $i \in \mathsf{S}$ za $n$ přechodů náhodná veličina, musíme pro její ohodnocení použít střední hodnotu, kterou označíme $v_i^{(n)}$. Celkový střední výnos za $n$ kroků (podmíněný tím, že v čase 0 je řetězec ve stavu $i$) můžeme zapsat rekurentním vztahem

$$v_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \left( r_{ij} + v_j^{(n-1)} \right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Takto vyjadřujeme, že celkový očekávaný výnos za $n$ kroků závisí nejen na matici výnosů $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in \mathsf{S}}$, ale též na celkovém očekávaném výnosu v předchozích krocích.

Označíme-li $q_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při prvním přechodu ze stavu $i$ ($q_i = v_i^{(1)}$), můžeme psát předchozí vztah také ve tvaru

$$v_i^{(n)} = q_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} v_j^{(n-1)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

či maticově

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{q} + \mathbf{v}^{(n-1)} \mathbf{P}^T,$$

kde $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\mathbf{v}^{(n)} = (v_1^{(n)}, \ldots, v_m^{(n)})$.

Přestože jsme se na začátku zmínili o ekonomické motivaci Markovových řetězců s výnosy, lze si jejich použití představit i v dalších situacích. Jednu takovou si uvedeme v následujícím příkladu.

**Příklad 3.1** Dva tenisté, A a B, se pravidelně každý týden setkávají na kondičním utkání. Tenista A začal sledovat svou úspěšnost a tak zjistil, že pravděpodobnost jeho výhry proti tenistovi B je ovlivněna jeho výkonem v předchozím utkání. Pokud minule vyhrál, bude jeho šance na výhru 0,7 oproti 0,3 ve prospěch prohry, a pokud v předchozím zápase naopak prohrál, mění se pravděpodobnosti jeho výhry a prohry s B na hodnoty 0,6 a 0,4. Pro zvýšení motivace tenistů se rozhodl sportovní klub dotovat vítěze každého zápasu částkou 10 dolarů. Tenista, který prohrál, má naopak zaplatit do klubové pokladny 5 dolarů, při opakované prohře 10 dolarů. Jaký bude za těchto okolností očekávaný stav konta tenisty A po pěti zápasech?

Ze zadání plyne, že množina $\mathsf{S}$ obsahuje dva stavy, „vyhrané utkání tenisty A“ a „prohrané utkání tenisty A“; dále máme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{S} = \{1, 2\},$$

tedy $\mathbf{q} = (5{,}5; 2{,}0)$. Předpokládáme-li, že počáteční výnos je nulový, tj. $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}$, dostáváme pro střední výnos hráče A za $n$ kroků $\mathbf{v}^{(n)}$ při $n = 0, \dots, 5$ tuto posloupnost:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1^{(n)}$ | 0 | 5,5 | 9,95 | 14,295 | 18,6295 | 22,96295 |
| $v_2^{(n)}$ | 0 | 2,0 | 6,10 | 10,410 | 14,7410 | 19,07410 |
| $v_1^{(n)} - v_2^{(n)}$ | 0 | 3,5 | 3,85 | 3,885 | 3,8885 | 3,88885 |

Jak je vidět z posledního řádku tabulky, rozdíl $v_1^{(n)} - v_2^{(n)}$ se pro $n \to \infty$ blíží číslu $3,\overline{8}5$. Pokud budeme pod stavem systému v čase 0 rozumět výsledek posledního utkání s hráčem B před začátkem sledování úspěšnosti hráče A, je možné tento rozdíl interpretovat tak, že vyhrané výchozí utkání přináší o $3,\overline{8}5$ dolarů vyšší střední výnos než prohrané výchozí utkání prvního tenisty. Současně můžeme pozorovat, že přírůstek $v_i^{(n)} - v_i^{(n-1)}$, $i = 1, 2$, se při rostoucím $n$ blíží $4,\overline{3}$ dolarů. Tato vlastnost úzce souvisí s limitními vlastnostmi řetězce, o kterých se zmíníme dále.

○

Rozepíšeme si rekurentní vztah pro $v_i^{(n)}$,

$$
\begin{aligned}
v_i^{(n)} &= \sum_{j=1}^m p_{ij} r_{ij} + \sum_{k=1}^m p_{ik} v_k^{(n-1)} = \\
&= \sum_{j=1}^m p_{ij} r_{ij} + \sum_{k=1}^m p_{ik} \left( \sum_{l=1}^m p_{kl} r_{kl} + \sum_{l=1}^m p_{kl} v_l^{(n-2)} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^m p_{ij} r_{ij} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_{ik}^{(1)} p_{kl} r_{kl} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_{ik}^{(2)} p_{kl} r_{kl} + \cdots + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_{ik}^{(n-1)} p_{kl} r_{kl}.
\end{aligned}
$$

Je-li uvažovaný Markovův řetězec s výnosy nerozložitelný, existuje podle věty 1.23 stacionární rozdělení $\{\pi_j, j \in \mathsf{S}\}$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = \pi_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \left( v_i^{(n+1)} - v_i^{(n)} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_{ik}^{(n)} p_{kl} r_{kl} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \pi_k p_{kl} r_{kl} = g,$$

přičemž jsme využili možnosti zaměnit pořadí sumace a limity. Konstanta

$$g = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \pi_k p_{kl} r_{kl} = \sum_{k=1}^m \pi_k q_k$$

se často nazývá *zisk řetězce*.

**Příklad 3.2** Vraťme se k předchozímu příkladu s tenisty A a B. Limitní rozdělení pravděpodobnosti určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} 0{,}7\pi_1 + 0{,}6\pi_2 &= \pi_1, \\ 0{,}3\pi_1 + 0{,}4\pi_2 &= \pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1, \end{aligned}$$

odkud $\pi_1 = 0{,}\overline{6}, \pi_2 = 0{,}\overline{3}$. Pro zisk řetězce obdržíme

$$g = \pi_1 q_1 + \pi_2 q_2 = 0{,}\overline{6} \cdot 5{,}5 + 0{,}\overline{3} \cdot 2{,}0 = \frac{13}{3} = 4{,}\overline{3},$$

což odpovídá našemu předběžnému odhadu.

**Příklad 3.3** [Maixner, s. 144; Lukáš, s. 38] Mějme podnik produkující určitý spotřební výrobek, u kterého můžeme vždy v časových intervalech jednoho roku rozeznat dva stavy: stav 1 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou; stav 2 – výrobek je neúspěšný, odbyt vázne a cena je nízká. Předpokládejme, že vedení závodu neinvestuje do reklamy ani do technického rozvoje a že matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými stavy a příslušná matice výnosů je

$${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \quad {}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Pokud podnik zajistí technický rozvoj a vynaloží prostředky na reklamu, zvýší se pravděpodobnost, že výrobek bude úspěšný. Vyšší náklady se ovšem promítnou do zisku, proto budou výnosy při setrvání ve stavu 1, resp. ve stavu 2, nižší než dříve. Nechť je druhá *strategie* (v tomto kontextu se jí rozumí právě dvojice matice pravděpodobností přechodu a matice výnosů) dána též Markovovým řetězcem s maticemi

$${}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}.$$

Úkolem je zjistit, jakou strategii řízení závodu doporučit, aby zisk byl maximální.

Pro obě uvažované strategie vypočteme hodnoty $v_1^{(n)}$, $v_2^{(n)}$, $n = 1, \dots, 5$, stejně jako hodnoty zisku řetězce $g$ ($\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}$). Porovnáním odpovídajících si hodnot $v_1^{(n)}$, resp. $v_2^{(n)}$, pak zřejmě zvolíme tu strategii, pro kterou jsou pro každé $i$ hodnoty $v_i^{(n)}$ s rostoucím $n$ větší (viz tabulka).

| krok $n$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| výchozí stav | strategie | výnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $g$ |
| 1 | 1 | $v_1^{(n)}$ | 6 | 7,5 | 8,55 | 9,56 | 10,56 | 1 |
| 1 | 2 | $v_1^{(n)}$ | 4 | 6,2 | 8,22 | 10,22 | 12,22 | 2 |
| 2 | 1 | $v_2^{(n)}$ | −3 | −2,4 | −1,44 | −0,44 | 0,56 | 1 |
| 2 | 2 | $v_2^{(n)}$ | −5 | −3,7 | −1,77 | 0,22 | 2,22 | 2 |

Ukažme si výpočet hodnoty zisku řetězce $g$ pro první strategii. Ze soustavy

$$\begin{aligned} 0{,}5\pi_1 + 0{,}4\pi_2 &= \pi_1, \\ 0{,}5\pi_1 + 0{,}6\pi_2 &= \pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

určíme $\pi_1 = 0{,}\overline{4}$, $\pi_2 = 0{,}\overline{5}$; dále $q_1 = 0{,}5 \cdot 9 + 0{,}5 \cdot 3 = 6$, $q_2 = 0{,}4 \cdot 3 - 0{,}6 \cdot 7 = -3$, dohromady tedy $g = 0{,}\overline{4} \cdot 6 - 0{,}\overline{5} \cdot 3 = 1$.

Z hodnot $v_i^{(n)}$ vidíme, že v krátkém období (v prvních třech časových intervalech) se zdá účelnější „neperspektivní" strategie bez technického rozvoje a reklamy, která především těží z absence nevýrobních nákladů. V následujících intervalech se ukazuje tato strategie jako krátkozraká, která nezajišťuje dynamický nárůst zisku. ○

Ukazuje se, že předchozí postup, modelující vývoj systému prostou volbou jednoho z Markovových řetězců s oceněním, lze též zefektivnit, a to tak, že budeme vybírat optimální strategii *v každém kroku.* Uvažujme tedy, že v každém $n$ je možné Markovův řetězec definovat $h$ různými stochastickými maticemi a $h$ různými maticemi výnosů (tedy $h$ strategiemi),

$$^1\mathbf{P} = (^1p_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}}, \dots, {}^h\mathbf{P} = (^hp_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}};\ {}^1\mathbf{R} = (^1r_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}}, \dots, {}^h\mathbf{R} = (^hp_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}}.$$

Cílem volby jednotlivých strategií je maximální střední hodnota celkového výnosu Markovova řetězce o $n$ krocích (opět podmíněná tím, že v čase 0 je řetězec ve stavu $i$), přičemž v každém kroku vybíráme vhodnou strategii. Tuto volbu v $n$-tém kroku ve stavu $i$ označujeme $d_i^{(n)}$ (nabývá jedné z hodnot $1, \dots, h$) a nazýváme *optimální rozhodovací funkce.* V praxi tak může zřejmě posouzení všech možných alternativ vést i ke značně rozsáhlým výpočtům.

Při postupném zkoumání jednotlivých alternativ se ukazuje, že optimální postup v $(n+1)$-ním kroku je nejvýhodnější, vycházíme-li z optima v $n$-tém kroku [Walter, s. 91]. Nechť byla v krocích $n, n-1, \dots, 1$ optimální rozhodovací funkce nalezena a maximalizovány $v_i^{(n)}$ pro $i = 1, \dots, m$. Při určení strategie, kterou je nutno zvolit v $(n+1)$-ním kroku a $i$-tém stavu k dosažení maximálního očekávaného výnosu $\widehat{v}_i^{(n+1)}$, vyjdeme z rekurentních vztahů

$$\widehat{v}_i^{(n+1)} = \max_{k=1,\dots,h} \left[ \sum_{j=1}^{m} {}^kp_{ij}({}^kr_{ij} + \widehat{v}_j^{(n)}) \right] = \max_{k=1,\dots,h} \left[ {}^kq_i + \sum_{j=1}^{m} {}^kp_{ij}\widehat{v}_j^{(n)} \right] = \\ = \max_{k=1,\dots,h} {}^kv_i^{(n+1)}.$$

Je-li ${}^kv_i^{(n+1)}$ maximální pro $k = k_0$, pak optimální strategie v $(n+1)$-ním kroku ve stavu $i$ je $d_i^{(n+1)} = k_0$. Poznamenejme, že při výpočtu výnosů ${}^kv_i^{(n+1)}$ byly užity *optimální* výnosy z $n$-tého kroku.

**Příklad 3.4** Uvedené poznatky budeme aplikovat při určení strategie k maximalizaci výnosu výroby. V prvním a druhém kroku tak s využitím údajů z příkladu 3.3 obdržíme

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_1^{(1)} &= \max\{{}^1p_{11}{}^1r_{11} + {}^1p_{12}{}^1r_{12} = {}^1q_1;\ {}^2p_{11}{}^2r_{11} + {}^2p_{12}{}^2r_{12} = {}^2q_1\} = \\
&= \max\{6;\ 4\} = 6 \ \Rightarrow\ d_1^{(1)} = 1; \\
\widehat{v}_2^{(1)} &= \max\{{}^1p_{21}{}^1r_{21} + {}^1p_{22}{}^1r_{22} = {}^1q_2;\ {}^2p_{21}{}^2r_{21} + {}^2p_{22}{}^2r_{22} = {}^2q_2\} = \\
&= \max\{-3;\ -5\} = -3 \ \Rightarrow\ d_2^{(1)} = 1; \\
\widehat{v}_1^{(2)} &= \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{11}\widehat{v}_1^{(1)} + {}^1p_{12}\widehat{v}_2^{(1)};\ {}^2q_1 + {}^2p_{11}\widehat{v}_1^{(1)} + {}^2p_{12}\widehat{v}_2^{(1)}\} = \\
&= \max\{7{,}5;\ 8{,}2\} = 8{,}2 \ \Rightarrow\ d_1^{(2)} = 2; \\
\widehat{v}_2^{(2)} &= \max\{{}^1q_2 + {}^1p_{21}\widehat{v}_1^{(1)} + {}^1p_{22}\widehat{v}_2^{(1)};\ {}^2q_2 + {}^2p_{21}\widehat{v}_1^{(1)} + {}^2p_{22}\widehat{v}_2^{(1)}\} = \\
&= \max\{-2{,}4;\ -1{,}7\} = -1{,}7 \ \Rightarrow\ d_2^{(2)} = 2.
\end{aligned}$$

Výsledky pro prvních pět kroků společně s hodnotami optimální rozhodovací funkce $d_i^{(n)}$, které tak reprezentují nejvýhodnější strategii v $n$-tém kroku, opět zaneseme do přehledné tabulky:

| krok $n$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| výchozí stav | strategie | výnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | ${}^1v_1^{(n)}$ | 6 | 7,5 | 9,25 | 11,22 | 13,23 |
| 1 | 2 | ${}^2v_1^{(n)}$ | 4 | 8,2 | 10,22 | 12,22 | 14,22 |
| 2 | 1 | ${}^1v_2^{(n)}$ | −3 | −2,4 | −6,14 | 1,23 | 3,23 |
| 2 | 2 | ${}^2v_2^{(n)}$ | −5 | −1,7 | 0,23 | 2,23 | 4,22 |
| 1 | – | $d_1^{(n)}$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | – | $d_2^{(n)}$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Odtud vidíme, že při volbě optimální strategie v každém kroku se zřejmě již po prvním období vyplatí zvolit strategii založenou na reklamě a inovacích. ○

Poznamenejme, že podobně lze vytvořit též model údržby výrobního zařízení. Zde první strategie předpokládá opravu zařízení až při vzniku poruchy, zatímco při druhé strategii zavádíme navíc preventivní údržbu zařízení, která na jedné straně zvyšuje provozní náklady, ale na druhé straně zkracuje výrobní prostoje a zvyšuje jakost výroby.

## 3.2 Simulace Markovových řetězců

Každou posloupnost (i nekonečnou) náhodných čísel mezi 0 a 1 lze interpretovat jako realizaci výběru z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$. I když v praxi jsme odkázáni pouze na tzv. pseudonáhodná čísla, generovaná počítačem, lze i tato použít ke konstrukci Markovova řetězce s diskrétním časem pomocí posloupnosti nezávislých rovnoměrně na $(0,1)$ rozdělených náhodných veličin $U_0, U_1, U_2, \dots$ a následně využít vlastností takto zkonstruovaného řetězce.

Ukažme si postup simulace Markovova řetězce $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ s konečnou množinou stavů $\mathsf{S}$ (je-li $\mathsf{S}$ nekonečná, „shrneme“ prakticky nemožné hodnoty do jediné), počátečním rozdělením pravděpodobnosti $\{p_i^{(0)},\ i \in \mathsf{S}\}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathsf{S}}$. Protože platí $\sum_{i \in \mathsf{S}} p_i^{(0)} = 1$, můžeme rozdělit interval $(0,1)$ na disjunktní podintervaly $\langle a_i, a_{i+1})$, $i \in \mathsf{S}$, s délkami $a_{i+1} - a_i = p_i^{(0)}$. Podobně můžeme pro každé $i \in \mathsf{S}$ provést rozklad $(0,1)$ na disjunktní podintervaly $\langle a_{ij}, a_{i,j+1})$, $j \in \mathsf{S}$ tak, že $a_{i,j+1} - a_{ij} = p_{ij}$. Dále definujme funkce

$$h_0\colon (0,1) \to \mathsf{S}, \qquad h\colon \mathsf{S} \times (0,1) \to \mathsf{S},$$

kde $h_0(u) = i$ pro $u \in \langle a_i, a_{i+1})$, $h(i,u) = j$ pro $u \in \langle a_{ij}, a_{i,j+1})$, $i \in \mathsf{S}$. Funkce $h_0$ slouží ke generování počátečního rozdělení řetězce a funkce $h$ generuje, do kterého stavu řetězec přejde z daného stavu $i \in \mathsf{S}$ (generuje přechody za jeden krok).

Konečně nechť $U_0, U_1, U_2, \dots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$, a položme

$$X_0 = h_0(U_0), \quad X_{n+1} = h(X_n, U_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Potom zřejmě

$$P(X_0 = i) = P(U_0 \in \langle a_i, a_{i+1})) = p_i^{(0)},$$
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(U_{n+1} \in \langle a_{ij}, a_{i,j+1})) = p_{ij},$$

tedy $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec s počátečním rozdělením pravděpodobnosti $\{p_i^{(0)},\ i \in \mathsf{S}\}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

**Příklad 3.5** Postup simulace Markovova řetězce si ukážeme pro počáteční rozdělení $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ na množině stavů $\mathsf{S} = \{0,1,2\}$ a matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Pro sestrojení funkce $h_0$ bude zřejmě potřeba vytvořit tři podintervaly, $(a_0, a_1) = (0, \frac{1}{2})$, $\langle a_1, a_2) = \langle \frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ a $\langle a_2, a_3) = \langle \frac{5}{6}, 1)$. Odtud

$$h_0(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{pro } u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{5}{6}), \\ 2 & \text{pro } u \in \langle \frac{5}{6}, 1). \end{cases}$$

Obdobně budeme postupovat při konstrukci funkce $h$. Takto postupně obdržíme

$$h(0,u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \in (0, \frac{1}{3}), \\ 1 & \text{pro } u \in \langle \frac{1}{3}, 1) \end{cases}$$

pro podintervaly $(a_{00}, a_{01}) = (0, \frac{1}{3})$ a $\langle a_{01}, a_{02}) = \langle \frac{1}{3}, 1)$; dále analogicky:

$$h(1,u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{pro } u \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 2 & \text{pro } u \in \langle \frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

$$h(2,u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \in (0, \frac{3}{4}) \\ 2 & \text{pro } u \in \langle \frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

Realizací posloupnosti náhodných veličin $U_0, U_1, U_2, \ldots$ následně obdržíme konkrétní průběh daného Markovova řetězce, jak můžeme vidět pro prvních sedm kroků v následující tabulce.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_i$ | 0,5466 | 0,8948 | 0,1474 | 0,3660 | 0,7574 | 0,2307 | 0,8395 | 0,5207 |
| $X_i$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

○

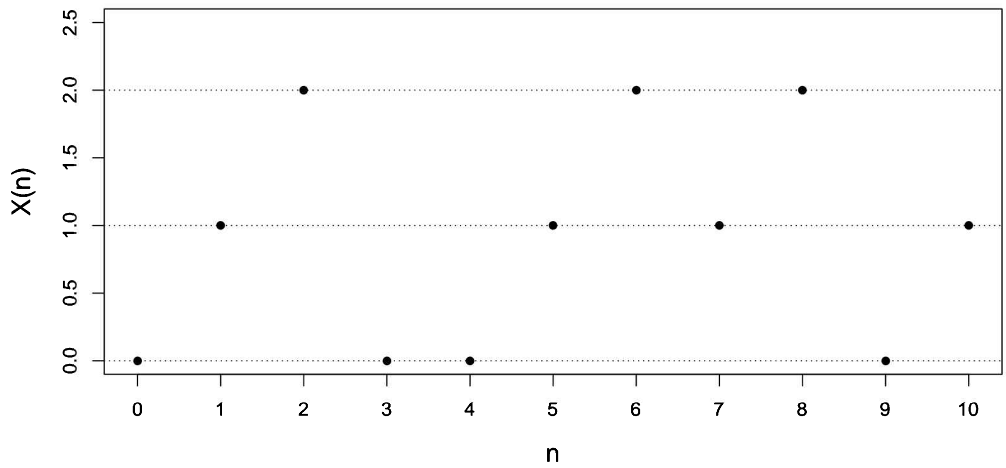
**Příklad 3.6** Generujme realizace Markovova řetězce se třemi stavy $\mathsf{S} = \{0, 1, 2\}$ z příkladu 1.9 zadaného

$$\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Funkce $h_0$ bude zřejmě triviální (přiřadí každé realizaci $U_0$ hodnotu 0, tedy $h_0(u) = 0$, $u \in (0, 1)$), funkce $h$ pak bude ve tvaru

$$h(i,u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = 0, u \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{pro } i = 0, u \in \langle \frac{1}{2}, 1), \\ 2 & \text{pro } i = 1, u \in (0, 1), \\ 0 & \text{pro } i = 2, u \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{pro } i = 2, u \in \langle \frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Průběh jedné z realizací tohoto Markovova řetězce v prvních deseti krocích, která byla obdržena s využitím generátoru náhodných čísel ve statistickém softwaru R (dostupný na adrese `www.r-project.org`), je znázorněn na obr. 1.




Obr. 1: Průběh realizace Markovova řetězce z příkladu 3.6.

○

Ve zbytku této kapitoly nahlédneme do jedné z nejznámějších aplikací simulací Markovových řetězců, známé jako MCMC (Monte Carlo Markov Chains) metoda, která má zásadní využití ve statistice (zejména v bayesovských metodách), data miningu, statistické fyzice a dalších přírodních vědách [Norris, s. 208]. Monte Carlo si lze zjednodušeně představit jako jiný název pro počítačové simulace, může se tedy zdát, že se MCMC principiálně nijak zásadně neliší od výše popsané procedury. V tomto případě se ovšem jedná o simulaci *pomocí* Markovových řetězců, tedy objektem primárního zájmu je rozdělení Markovova řetězce, ne řetězec jako takový.

Zmíníme se asi o nejznámějším algoritmu MCMC metod, podle svého objevitele nazýván Metropolisův (či Metropolisův–Hastingsův) algoritmus, kdy chceme simulovat (známé) rozdělení, v praxi nejčastěji spojitého typu [Robert, s. 168]. Protože se ovšem obsah tohoto učebního textu omezuje na studium Markovových řetězců s diskrétními stavy, ukážeme si princip použití Metropolisova algoritmu při simulaci diskrétního rozdělení $\{\pi_i,\ i \in \mathsf{S}\}$ na konečné množině stavů $\mathsf{S} = \{1, \ldots, m\}$ (jako příklad můžeme uvést binomické nebo hypergeometrické rozdělení). Jeho základní myšlenkou, která vede k (přibližnému) řešení, je najít Markovův řetězec $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, který má stacionární rozdělení $\{\pi_i,\ i \in \mathsf{S}\}$, a nechat tento realizovat pro $n \to \infty$.

Nechť $\mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}}$ je stochastická matice, pro jejíž prvky platí, že $t_{ij} > 0$, právě když $t_{ji} > 0$. Metropolisův algoritmus změní matici $\mathbf{T}$ na $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in\mathsf{S}}$, která je maticí pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ se stacionárním rozdělením $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$, neboli maticově $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$. Definujme tzv. akceptační poměr

$$a_{ij} = \frac{\pi_j t_{ji}}{\pi_i t_{ij}}, \ i, j \in \mathsf{S}, i \neq j.$$

Protože $t_{ij}$ určuje pravděpodobnost přechodu ze stavu $i$ do stavu $j$, potom při $a_{ij} \geq 1$ přejde řetězec ze stavu $i$ do stavu $j$ [Diaconis]. Jestliže $a_{ij} < 1$, hodíme si falešnou mincí, kde pravděpodobnost padnutí rubu je právě $a_{ij}$. Pokud padne rub, řetězec opět přejde do $j$. V opačném případě zůstane tento ve stavu $i$. Prvky matice $\mathbf{P}$ jsou potom určeny následujícím vztahem

$$p_{ij} = \begin{cases} t_{ij} & \text{pro } i \neq j, \ a_{ij} \geq 1, \\ t_{ij} a_{ij} & \text{pro } i \neq j, \ a_{ij} < 1, \\ t_{ij} + \sum_{k: a_{ik} < 1} t_{ik}(1 - a_{ik}) & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Je dokázáno, že nový řetězec splňuje vlastnost $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ [Diaconis, Lemma 1.1], a tedy

$$\sum_{i \in \mathsf{S}} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in \mathsf{S}} \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_{i \in \mathsf{S}} p_{ji} = \pi_j, \ \forall j \in \mathsf{S},$$

neboli $\{\pi_i, \ i \in \mathsf{S}\}$ je skutečně stacionárním rozdělením řetězce s maticí $\mathbf{P}$.

Poznamenejme, že dané diskrétní rozdělení bychom samozřejmě mohli simulovat též přímo jako náhodný výběr pomocí generátoru náhodných čísel, kdy bychom rozdělili interval $(0, 1)$ na podintervaly, jejichž délky odpovídají pravděpodobnostem jednotlivých hodnot náhodné veličiny s tímto rozdělením. Výhoda MCMC metod (a speciálně Metropolisova algoritmu) je v tom, že jednotlivé výběrové hodnoty nejsou nezávislé, a tedy v porovnání s náhodným výběrem stačí provést méně simulací k dosažení stejné přesnosti aproximace daného rozdělení [Robert, s. 173].

**Příklad 3.7** Nechť je dáno stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (to představuje třeba alternativní rozdělení s parametrem $p = \frac{2}{3}$) a matice pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Pomocí Metropolisova algoritmu vytvoříme matici $\mathbf{P}$ a ověříme, že se jedná o matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce se stacionárním rozdělením $\boldsymbol{\pi}$.

Nejprve určíme akceptační poměry,

$$a_{12} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 3, \quad a_{21} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{3},$$

a následně prvky matice $\mathbf{P}$,

$$p_{12} = \frac{1}{2}, \ p_{21} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \ p_{11} = t_{11} = \frac{1}{2},$$

$$p_{22} = t_{22} + t_{21}(1 - a_{21}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4},$$

tedy

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Ověříme, že tato opravdu povede k zadanému stacionárnímu rozdělení. Budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 &= \pi_1, \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 &= \pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1, \end{aligned}$$

odkud opravdu $\pi_1 = \frac{1}{3}, \pi_2 = \frac{2}{3}$.

Nakonec ověříme kvalitu aproximace daného rozdělení pomocí Metropolisova algoritmu srovnáním se standardním způsobem simulace (založeném na generátoru náhodných čísel) pomocí funkce `rbinom` z knihovny `stats` softwaru R. Pro tento účel pokaždé nagenerujeme 1000 krát výběr z rozdělení o rozsahu $k$, přičemž u Metropolisova algoritmu budeme brát hodnoty po 100 krocích Markovova řetězce s počátečním rozdělením $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (jeho volba nemá po tolika krocích řetězce na kvalitu simulace prakticky žádný vliv). Z každého výběru vždy následně odhadneme hodnotu parametru $p = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ a jako celkový odhad parametru pomocí obou metod vezmeme aritmetické průměry dílčích odhadů. Výsledky pro jednu konkrétní realizaci takovéto simulace jsou uvedeny v následující tabulce:

| $k$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Metropolisův algoritmus | 0,6582 | 0,6695 | 0,6661 | 0,6662 | 0,6664 |
| `rbinom` | 0,6848 | 0,6724 | 0,6641 | 0,6657 | 0,6655 |

Z ní vidíme, že zejména při malých rozsazích výběru vede Metropolisův algoritmus k lepšímu odhadu skutečné hodnoty parametru $p$ (rovné $\frac{2}{3}$) než užití standardního postupu (vyjádřeného funkcí `rbinom`). Naopak při velkých rozsazích nehraje volba metody simulace téměř žádnou významnější roli.

## 3.3 Aplikace v teorii hromadné obsluhy

Teorie hromadné obsluhy, která se opírá zejména o vlastnosti Markovových řetězců se spojitým časem, se zabývá takovými systémy, ve kterých dochází k realizaci obsluhy požadavků, přicházejících do systému hromadné obsluhy. Tímto se rozumí určité zařízení skládající se z jedné nebo více linek, které poskytuje určitý druh obsluhy přicházejícím požadavkům. Uvedená definice je velmi obecná, protože pod trojicí požadavek–linka–obsluha si vedle zjevné asociace kupující–pokladna–placení nákupu můžeme představit též trojice nemocný–lékař–ošetření, letadlo–přistávací dráha–přistání nebo zařízení–údržbáři–oprava poruchy.

Pro analýzu systému hromadné obsluhy z matematického hlediska je potřeba stanovit způsob příchodu požadavků do systému, tj. charakteristiky vstupního toku požadavků, dále způsob obsluhy a počet obslužných linek. Co se týče vstupního toku, budeme nadále předpokládat, že příchody požadavků tvoří Poissonův proces s intenzitou (příchodu) $\lambda$. Přitom zřejmě výskyt požadavků je bez následných účinků, tzn. že počet požadavků, které se vyskytly po daném čase $t$, nezávisí na počtu výskytu požadavků do okamžiku $t$. Každé místo obsluhy (obslužný objekt) je schopno v daném okamžiku obsluhovat pouze jediný požadavek, délka obsluhy je přitom náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu$ a hustotou ve tvaru

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & \text{pro } t \geq 0, \\ 0, & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Počet míst obsluhy je vždy konečný; jestliže vzniklými požadavky jsou obsazena všechna místa obsluhy, řadí se další požadavky do řady (do fronty). Nejčastěji přitom předpokládáme, že fronta může být teoreticky nekonečná (potom hovoříme o systémech s neomezenou délkou fronty), případně je stanovena její maximální přípustná délka. Výběr požadavků z fronty na obsluhu může být značně rozmanitý. Nejčastější situací je, když jsou vznikající požadavky obsluhovány v pořadí, ve kterém vstupují do systému obsluhy (tzv. režim FIFO – First In First Out), mohou být také vybírány náhodně, s určitými prioritami a existují též systémy, kde je poslední požadavek obsloužen jako první (LIFO – Last In First Out).

Kvalitativně lze systémy hromadné obsluhy posuzovat podle ukazatelů efektivnosti, kterými jsou především číselné charakteristiky typu středních hodnot a pravděpodobností. K nejčastěji užívaným lze zařadit zejména střední délku fronty či střední počet obsazených linek, pravděpodobnost obsazení všech míst obsluhy či pravděpodobnost, že všechna místa obsluhy jsou volná.

Uvedené požadavky na rozdělení vstupního toku požadavků a doby obsluhy se ukázaly být rozumným kompromisem mezi teoretickými vlastnostmi matematických modelů a jejich praktickou použitelností. Nakonec si proto ještě ukažme důležitost vlastnosti doby obsluhy, mající exponenciální rozdělení pravděpodobnosti [Kalas, s. 80].

**Lemma 3.1** *Při exponenciálním rozdělení (s parametrem $\mu$) délky doby obsluhy nezávisí rozdělení zbývající délky doby obsluhy na tom, jakou dobu je již požadavek obsluhovaný.*

*Důkaz:* Označme $Y$ délku doby obsluhy. Potom pro libovolné $t$, $h \geq 0$ je s využitím definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(Y > t+h|Y > t) =$$
$$= \frac{P(Y > t+h, Y > t)}{P(Y > t)} = \frac{P(Y > t+h)}{P(Y > t)} = \frac{e^{-\mu(t+h)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu h} = P(Y > h),$$

tedy pravděpodobnost, že obsluha bude trvat ještě alespoň dobu $h$, nezávisí na tom, jak dlouho již trvá. □

**Poznámka 3.1** Jestliže má délka obsluhy exponenciální rozdělení, je pravděpodobnost toho, že obsluha skončí v intervalu $(t, t+h\rangle$ (pro dostatečně malé $h$), s využitím Taylorova rozvoje, rovna

$$1 - e^{-\mu h} = 1 - (1 - \mu h + o(h)) = \mu h + o(h).$$

Odtud je pravděpodobnost toho, že obsluha během daného intervalu neskončí,

$$e^{-\mu h} = 1 - \mu h + o(h).$$

Výše uvedeného využijeme v dalším textu při představení jednoho ze základních systémů hromadné obsluhy. V něm budeme předpokládat, že vstupní tok požadavků tvoří Poissonův proces s intenzitou $\lambda$ (tedy doby mezi příchody požadavků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$); dále předpokládejme, že doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Zákazníci mají k dispozici $s$ obslužných linek; přitom libovolný zákazník, který požádá o obsluhu, je obsloužený a fronta se řídí režimem FIFO. Tyto informace byly shrnuty do zkratky v názvu následující kapitoly.

*Označení:* V teorii systémů hromadné obsluhy se užívají zkratky, které popisují studovaný systém. V tzv. Kendallově klasifikaci je systém popsán trojicí symbolů $(A/B/c)$, kde symbol $A$ zastupuje rozdělení doby mezi příchody požadavků (zákazníků), $B$ rozdělení doby obsluhy a symbol $c$ počet míst obsluhy. Za písmena $A$, $B$ se zpravidla dosazují $M$ (exponenciální rozdělení), $D$ (deterministické rozdělení) nebo $G$ (obecné rozdělení).

### 3.3.1 Systém $M/M/s$ s neomezenou délkou fronty

Označme $X_t$ počet požadavků, které se v okamžiku $t$ nacházejí v systému, to znamená, které jsou obsluhovány, resp. čekají ve frontě. Počet požadavků v čase $t+h$ zřejmě závisí na následujících faktorech:

- okamžiky ukončení obsluh těch požadavků, které jsou v čase $t$ obsluhovány,
- počet požadavků, které požádají o obsluhu v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$,
- okamžiky ukončení obsluh požadavků, jejichž obsluha začne v intervalu $(t, t+h\rangle$.

Žádný z těchto faktorů vzhledem k předpokladům nezávisí na počtu požadavků v systému před okamžikem $t$. Tedy systém $\{X_t, t \geq 0\}$, popisující stav daného systému hromadné obsluhy v čase $t$, je Markovovým řetězcem se spojitým časem a množinou stavů $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

V tomto řetězci tak pro pravděpodobnosti přechodu během doby $h$ platí následující vztahy ($j, k \in \mathsf{S}$):

a) $p_{j,j+1}(h) = (\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^j = (\lambda h + o(h))(1 - j\mu h + o(h)) =$
$= \lambda h + o(h)$;

b) je-li $j \leq s$,
$p_{j,j-1}(h) = j(\mu h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^{j-1}(1 - \lambda h + o(h)) = j\mu h + o(h)$;
je-li $j > s$,
$p_{j,j-1}(h) = s(\mu h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^{s-1}(1 - \lambda h + o(h)) = s\mu h + o(h)$;

c) je-li $j \leq s$,
$p_{j,j}(h) = (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^j = 1 - (\lambda + j\mu)h + o(h)$;
je-li $j > s$,
$p_{j,j}(h) = (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^s = 1 - (\lambda + s\mu)h + o(h)$;

d) $p_{jk} = o(h)$ jinak.

Z definice intenzit přechodu následně dostaneme, že

$$q_{j,j+1} = \lambda,\ q_{j,j-1} = j\mu\,(\text{pro } j \leq s),\ q_{j,j-1} = s\mu\,(\text{pro } j > s),$$

$$q_j = \lambda + j\mu\,(\text{pro } j \leq s),\ q_j = \lambda + s\mu\,(\text{pro } j > s),\ q_{jk} = 0 \text{ jinak},$$

tedy matice intenzit $\mathbf{Q}$ bude ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\dots \end{pmatrix}$$

(ostatní prvky matice jsou nulové). Pokud navíc předpokládáme, že pro počáteční rozdělení pravděpodobnosti platí $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $\forall j \neq 0$, je zřejmé, že se jedná o speciální případ procesu růstu a zániku. Soustava Kolmogorových diferenciálních rovnic pro tento Markovův řetězec bude mít dle věty 2.7 následující tvar:

$$
\begin{aligned}
p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t),\ j \le s, \\
p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + s\mu)p_j(t) + s\mu p_{j+1}(t),\ j > s.
\end{aligned}
$$

Výpočet absolutních pravděpodobností v čase $t$, $p_j(t)$, je poměrně náročný, proto se spokojíme s výpočtem jejich limitních hodnot a jim odpovídajících charakteristik systému. V tomto případě říkáme, že vypočítané charakteristiky systému jsou charakteristikami pro „stacionární“, resp. „stabilizovaný“ chod systému, tj. stav, kdy jsou absolutní pravděpodobnosti invariantní vůči posunu v čase. Ve shodě s větou 2.11 budeme řešit soustavu

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1, \\
0 &= \lambda\pi_{j-1} - (\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1},\ j < s, \\
0 &= \lambda\pi_{j-1} - (\lambda + s\mu)\pi_j + s\mu\pi_{j+1},\ j \ge s,
\end{aligned}
$$

a to následovně [Kalas, s. 82]. Položme

$$
\begin{aligned}
Z_j &= \lambda\pi_{j-1} - j\mu\pi_j,\ j < s, \\
\overline{Z}_j &= \lambda\pi_{j-1} - s\mu\pi_j,\ j \ge s.
\end{aligned}
$$

Z předchozí soustavy dostáváme, že

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 0, \\
Z_j - Z_{j+1} &= 0,\ j < s, \\
\overline{Z}_j - \overline{Z}_{j+1} &= 0,\ j \ge s.
\end{aligned}
$$

To znamená, že

$$
0 = Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_s = \overline{Z}_s = \overline{Z}_{s+1} = \ldots
$$

Z vyjádření $Z_j$, $\overline{Z}_j$ potom rekurentně dostáváme limitní pravděpodobnosti $\pi_j$,

$$
\pi_j = \frac{\lambda}{j\mu}\pi_{j-1} = \cdots = \pi_0 \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,\ 0 < j \le s,
$$

$$
\pi_j = \frac{\lambda}{s\mu}\pi_{j-1} = \cdots = \pi_0 \frac{1}{s! s^{j-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \pi_s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s},\ j > s.
$$

Pro $\frac{\lambda}{\mu} < s$ řada

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j}{\pi_0} = 1 + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{s^s}{s!}\sum_{j=s+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j
$$

konverguje a z podmínky $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ lze určit $\pi_0$ ve tvaru

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \frac{s^s}{s!} \sum_{j=s+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{s\mu} \right)^j \right]^{-1},$$

respektive po úpravě s využitím součtu geometrické řady pro $\frac{\lambda}{\mu} < s$

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \frac{s^s}{s!} \cdot \frac{\left( \frac{\lambda}{s\mu} \right)^s}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right]^{-1}.$$

Uvedené vztahy budeme ilustrovat na následujícím příkladu, adaptovaném z [Maixner, s. 100].

**Příklad 3.8** Dlouhodobým sledováním bylo zjištěno, že intervaly mezi příchody zákazníků do poradenského oddělení banky v období špičky mají exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Doby nutné k vyřešení požadavků mají též exponenciální rozdělení se střední dobou obsluhy 30 minut. K dispozici je pět obslužných míst. Stanovte limitní rozdělení pravděpodobnosti uvedeného systému hromadné obsluhy.

Protože budeme následující úvahy provádět v hodinách, obdržíme vstupní parametry systému ve tvaru $\lambda = 3 = \frac{60}{20}$, $\mu = 2 = \frac{60}{30}$ a $s = 5$. Poznamenejme, že parametr $\lambda$ představuje intenzitu příchodů (v počtu zákazníků za hodinu) a parametr $\mu$ intenzitu obsluhy. Protože je splněna podmínka $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} < s = 5$, může se tento systém stabilizovat. Proto lze již bezprostředně použít výše uvedené vztahy. Nejprve stanovíme hodnotu

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j!}(1{,}5)^j + \frac{5^5}{120} \cdot \frac{0{,}3^5}{1 - 0{,}3}} = 0{,}2228,$$

pomocí které obdržíme údaje v následující tabulce:

| počet požadavků ($j$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| počet čekajících | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\pi_j$ | 0,2228 | 0,3342 | 0,2506 | 0,1253 | 0,0470 |
| počet požadavků ($j$) | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| počet čekajících | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\pi_j$ | 0,0141 | 0,0042 | 0,0013 | 0,0004 | 0,0001 |

Z tabulky vidíme, že s největší pravděpodobností se bude v systému při jeho stacionárním chodu nacházet jeden zákazník a v případě plného provozu oddělení (tj. při obsazení všech míst obsluhy zaměstnanci banky) bude pravděpodobnost tvorby fronty prakticky nulová. ○

Systém $M/M/1$ s neomezenou délkou fronty je speciálním případem systému $M/M/s$ pro jediné místo obsluhy. Limitní rozdělení existuje, pokud $\lambda < \mu$; pak

$$\pi_j = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \; j = 1, 2, \ldots.$$

Protože platí, že $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, můžeme psát

$$1 - \pi_0 = \pi_0 \left[\frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\right]$$

nebo

$$1 = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \;\Rightarrow\; \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu},$$

tedy

$$\pi_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \; j = 0, 1, 2, \ldots,$$

což je geometrické rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$. Poznamenejme, že v některé literatuře se zlomek $\frac{\lambda}{\mu}$, který udává stupeň vytížení systému hromadné obsluhy, značí $\varrho$ a nazývá se *průměrnou intenzitou provozu.*

### 3.3.2 Systém $M/M/s$ s omezenou délkou fronty

Nechť je maximální délka fronty rovna $m$. Potom charakteristiky tohoto systému hromadné obsluhy jsou shodné s předcházejícím systémem s výjimkou situace, pokud požadavek přichází v okamžiku, kdy se v systému již nachází $s + m$ požadavků – tehdy je totiž odmítnut. Tento případ se v praxi vyskytuje v situacích, kdy je z různých důvodů omezena kapacita „čekárny“ požadavků. Jestliže opět označíme $X_t$ počet zákazníků v systému v čase $t$, pak ze stejných důvodů jako v předcházejícím systému je $\{X_t, t \geq 0\}$ Markovovým řetězcem s $\mathsf{S} = \{0, \ldots, s + m\}$ (někde se lze setkat s označením tohoto systému jako $M/M/s/m$). Postup analýzy je shodný s předchozí situací s přihlédnutím k faktu, že maximální počet zákazníků v systému je $s+m$. Nejprve budeme zkoumat pravděpodobnosti přechodu, které je zřejmě nutno rozdělit do dvou situací [Piatka, s. 132]:

1. Jestliže je v systému v čase $t$ přítomno $j$ požadavků, kde $j \leq s$, potom jsou všichni obslouženi a jejich počet se v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ zvětší o jednotku s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a o jednotku zmenší s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$. Pro pravděpodobnosti přechodu tak při obdobném odvození jako v kapitole 3.1

dostaneme

$$
\begin{aligned}
p_{j,j-1}(h) &= j\mu h + o(h),\\
p_{jj}(h) &= 1-(j\mu+\lambda)h + o(h),\\
p_{j,j+1}(h) &= \lambda h + o(h),\\
p_{jk} &= o(h),\ \text{jinak } (k \le s).
\end{aligned}
$$

2. Pokud je systému v čase $t$ přítomno $j$ požadavků, přičemž $j > s$, potom je obsluhovaných pouze $s$ požadavků a zbývajících $j - s \le m$ čeká ve frontě na obsluhu. Počet požadavků se v časovém intervalu $(t, t+h\rangle$ o jeden zvětší s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a o jeden zmenší s pravděpodobností $s\mu h + o(h)$ (je úměrná počtu obsluhovaných požadavků). Takto pro $j \le s + m$ dostaneme pravděpodobnosti přechodu

$$
\begin{aligned}
p_{j,j-1}(h) &= s\mu h + o(h),\\
p_{jj}(h) &= 1-(s\mu+\lambda)h + o(h),\\
p_{j,j+1}(h) &= \lambda h + o(h),\\
p_{jk} &= o(h),\ \text{jinak } (k > s).
\end{aligned}
$$

Odtud obdržíme intenzity přechodu ve tvaru

$$
\begin{aligned}
q_{j,j+1} &= \lambda,\ \text{pro } j = 0,1,\ldots,s+m-1,\\
q_{j,j-1} &= j\mu,\ \text{pro } 1 \le j < s,\\
&= s\mu,\ \text{pro } s \le j \le s+m,\\
q_j &= \lambda + j\mu,\ \text{pro } 0 \le j < s,\\
&= \lambda + s\mu,\ \text{pro } s \le j < s+m,\\
q_{s+m} &= s\mu,\\
q_{jk} &= 0,\ \text{jinak},
\end{aligned}
$$

maticově

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, \mathbf{D} \end{pmatrix},
$$

kde

$$
\mathbf{A}_{(s+1,s+1)} = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0\\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \ldots 0 & 0\\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 \ldots 0 & 0\\
0 & 0 & 3\lambda & -(\lambda+3\mu) & \lambda \ldots 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots s\mu & -(\lambda+s\mu)
\end{pmatrix},
$$

$$\mathbf{B}_{(s+1,m)} = \begin{pmatrix} 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \\ \vdots\ \vdots \dots \vdots\ \vdots\ \vdots \\ \lambda\ 0 \dots 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{(m,s+1)} = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ s\mu \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ \ 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \dots \vdots\ \ \vdots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ \ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ \ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{(m,m)} = \begin{pmatrix} -(\lambda+s\mu) & \lambda & \dots 0 & 0 & 0 \\ s\mu & -(\lambda+s\mu) & \dots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots s\mu & -(\lambda+s\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \dots 0 & s\mu & -s\mu \end{pmatrix}.$$

Obdobně jako v předcházejícím systému obdržíme limitní pravděpodobnosti $\pi_j$ řešením soustavy

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1, \\ 0 &= \lambda\pi_{j-1} - (\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1},\ 1 \le j < s, \\ 0 &= \lambda\pi_{j-1} - (\lambda + s\mu)\pi_j + s\mu\pi_{j+1},\ s \le j < s+m, \\ 0 &= \lambda\pi_{s+m-1} - s\mu\pi_{s+m}, \end{aligned}$$

za podmínky $\sum_{j=0}^{s+m} \pi_j = 1$. Řešením této soustavy dostáváme [Lukáš, s. 70]

$$\pi_j = \pi_0 \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,\ 1 \le j \le s,$$

$$\pi_j = \pi_0 \frac{1}{s!s^{j-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \pi_s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{j-s},\ s < j \le s+m,$$

kde

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s+1}^{s+m} \frac{1}{s!s^{j-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}.$$

Je zřejmé, že v systému s omezenou délkou fronty limitní rozdělení existuje vždy. Příklad na tento systém uvedeme v následujícím odstavci (příklad 3.11).

### 3.3.3 Kvalitativní analýza systémů $M/M/s$

Jestliže známe stacionární rozdělení pravděpodobností $\pi_j$, vyjadřující pravděpodobnosti počtu požadavků nacházejících se v systému hromadné obsluhy po dost dlouhé době fungování systému, můžeme určit základní charakteristiky používané k posouzení efektivnosti systému jak z hlediska obsluhovaných požadavků, tak z hlediska využití obslužných zařízení.

1. Zaměřme se nejprve na *systém s neomezenou délkou fronty.* Pokud uvažujeme ustálený systém hromadné obsluhy, lze vnímat počet požadavků v systému jako náhodnou veličinu $X$ a následně určit pravděpodobnost obsazení všech míst obsluhy (tedy další příchozí požadavek bude čekat) jako

$$P(X \geq s) = \sum_{j=s}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \frac{1}{s!} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}},$$

pravděpodobnost, že všechna místa obsluhy jsou volná, bude

$$P(X = 0) = \pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{s^s}{s!} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^s}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right]^{-1}.$$

Dále, označíme-li $Y$ počet zákazníků ve frontě v (ustáleném) systému, obdržíme náhodnou veličinu s rozdělením pravděpodobností daným následující tabulkou:

| $i$ | $0$ | $1$ | $2$ | | $k$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = i)$ | $\sum_{j=0}^{s} \pi_j$ | $\pi_{s+1}$ | $\pi_{s+2}$ | $\dots$ | $\pi_{s+k}$ | $\dots$ |

a *průměrná délka fronty* je střední hodnota $Y$,

$$\mathsf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{s+k} = \pi_s \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k = \pi_s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-1} = \pi_s \frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}.$$

Při odvození jsme využili zřejmého vztahu $\pi_{s+k} = \pi_s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k$, $k = 1, 2, \dots$, a možnosti derivovat řadu člen po členu. V literatuře se s touto charakteristikou lze setkat také pod označením $\overline{N}_f$. Dále nás často zajímá *průměrný počet obsazených míst obsluhy.* Pro tento účel označme $Z$ veličinu charakterizující počet obsazených linek s rozdělením pravděpodobnosti

| $i$ | $0$ | $1$ | $2$ | | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z = i)$ | $\pi_0$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\dots$ | $\sum_{j=s}^{\infty} \pi_j$ |

a vypočítáme její střední hodnotu,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Z) &= \sum_{j=0}^{s-1} j\pi_j + s \sum_{j=s}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=0}^{s} j\pi_j + s \sum_{j=s+1}^{\infty} \pi_j = \\
&= \sum_{j=0}^{s} j \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0 + s \sum_{j=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j \frac{s^s}{s!} \pi_0 = \\
&= \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{s^s}{s!} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^s}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right] = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \pi_0^{-1} = \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}$$

Připomeňme, že právě zlomek $\frac{\lambda}{\mu}$ jsme již v kapitole 3.3.1, když jsme studovali systém $M/M/1$, nazvali pod označením $\varrho$ průměrnou intenzitou provozu. Takto jsme tedy nyní ukázali opodstatněnost tohoto názvu.

Nakonec ještě zavedeme náhodnou veličinu $W$, která vyjadřuje dobu čekání libovolného zákazníka ve frontě. Dá se odvodit [Kalas, s. 85], že její hustota pravděpodobnosti je rovna

$$f(t) = \begin{cases} s\mu\pi_s \exp\left(-s\mu\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)t\right) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

a tedy *průměrná doba čekání zákazníka na obsluhu* je rovna

$$\mathsf{E}(W) = \int_0^\infty t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t s\mu\pi_s \exp\left(-s\mu\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi_s}{s\mu\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}.$$

S touto charakteristikou se lze v literatuře nejčastěji setkat pod označením $\overline{T}_f$.

Porovnáním vzorců pro průměrnou délku fronty a průměrnou dobu čekání na obsluhu je zřejmé, že platí tzv. Littleův vztah

$$\mathsf{E}(Y) = \lambda \cdot \mathsf{E}(W).$$

2. Také v *systému s omezenou délkou fronty* můžeme dospět k obdobným charakteristikám jako výše, pouze s přihlédnutím k jinému tvaru limitního rozdělení (viděli jsme, že toto rozdělení existuje vždy). Při stejném označení tak obdržíme pravděpodobnost obsazení všech míst obsluhy po dostatečné době chodu systému (s využitím součtu konečné geometrické řady)

$$P(X \geq s) = \sum_{j=s}^{s+m} \pi_j = \pi_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{j=s}^{s+m} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j = \pi_0 \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^s \frac{\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{m+1} - 1}{\frac{\lambda}{s\mu} - 1},$$

pravděpodobnost nevyužití systému hromadné obsluhy

$$P(X = 0) = \pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s+1}^{s+m} \frac{1}{s! s^{j-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1},$$

průměrnou délku fronty

$$\mathsf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{m} k\pi_{s+k} = \pi_s \frac{\lambda}{s\mu} \frac{m\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{m+1} - (m+1)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^m + 1}{\left(\frac{\lambda}{s\mu} - 1\right)^2},$$

průměrný počet obsazených míst obsluhy

$$\mathsf{E}(Z) = \sum_{k=0}^{s} k\pi_k + s\sum_{k=s+1}^{s+m} \pi_k = \frac{\lambda}{\mu},$$

a nakonec průměrnou dobu čekání zákazníka, který nebyl odmítnutý,

$$\mathsf{E}(W) = \frac{\pi_s \left[(m+1)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^m \left(\frac{\lambda}{s\mu} - 1\right) + 1\right]}{s\mu(1 - \pi_{s+m})\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

[Kalas, s. 87]. Pro tento systém je další důležitou charakteristikou pravděpodobnost odmítnutí zákazníka $\pi_{s+m}$.

Uvedené poznatky budeme ilustrovat na následujících příkladech. Hned první z nich ukazuje, jak je v praxi potřeba postupovat při zjišťování určujících charakteristik modelu hromadné obsluhy.

**Příklad 3.9** [Kořenář, s. 153] Z časového snímku pořízeného během $n = 25$ jednominutových intervalů máme k dispozici rozdělení četností různého počtu zákazníků, přicházejících do samoobslužné linky restauračního zařízení s jednou pokladnou a s dostatečně velkým počtem míst ve frontě (předpokládáme tedy, že je fronta neomezená). Víme, že příchody zákazníků do systému tvoří Poissonův proces. V praxi ovšem spojitý čas diskretizujeme, tj. uvažujeme časové intervaly (v našem případě jednominutové), ve kterých sledujeme počty událostí (počty zákazníků), které nastaly. Zjištěné četnosti a teoretické hodnoty Poissonova rozdělení jsou obsaženy v následující tabulce ($p_i$ značí odpovídající pravděpodobnosti Poissonova rozdělení).

| počet zákazníků | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\geq 7$ | celkem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zjištěné četnosti | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 3 | 1 | 1 | 25 |
| teor. četnosti $np_i$ | 1,2 | 3,7 | 5,6 | 5,6 | 4,2 | 2,5 | 1,3 | 0,9 | 25 |

Vypočteme-li např. hodnotu testovací statistiky v testu dobré shody empirického rozdělení četností různého počtu zákazníků s Poissonovým rozdělením, dojdeme k závěru, že předpoklad o náhodném charakteru rozdílů teoretického a empirického rozdělení nelze zamítnout na hladině $\alpha = 0{,}025$. Můžeme proto pokládat rozdělení četností počtu zákazníků vstupujících do systému obsluhy během jednominutových intervalů za Poissonovo rozdělení. Je ovšem nutné poznamenat, že relevantnost tohoto závěru je poznamenána nesplněním podmínky $np_i \geq 5$, která je nutná pro dosažení odpovídající aproximace $\chi^2$ rozdělení testovací statistiky, v některých třídách. Pro dosažení tohoto předpokladu by zřejmě bylo nutné některé třídy sloučit nebo (lépe) vzít větší rozsah výběru. Intenzitu příchodů $\lambda$ odhadneme na základě provedených pozorování. Víme, že v případě Poissonova rozdělení je parametr $\lambda$ střední hodnotou a že bodovým odhadem střední hodnoty je výběrový průměr. Z tabulky určíme $\overline{x} = 3$, a tedy odhad intenzity $\lambda$ je 3 zákazníci za minutu.

Víme-li dále, že doby trvání obsluhy mají exponenciální rozdělení (bylo by možné ověřit např. Kolmogorovovým–Smirnovovým testem), přičemž průměrná doba obsluhy jednoho zákazníka, zjištěná opět z časového snímku, činí 15 sekund, neboli odhad intenzity obsluhy $\mu$ je 4 zákazníci za minutu, potom průměrná intenzita provozu $\mathsf{E}(Z) = 3/4 = 0{,}75$.

Protože $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, můžeme přejít k určení základních charakteristik efektivnosti uvedeného systému hromadné obsluhy. Předpokládáme přitom, že pořadí obsluhy je shodné s pořadím příchodů, přičemž zákazníci čekající ve frontě neodcházejí ze systému, aniž by byli obslouženi.

Nejprve stanovíme pravděpodobnost obsazení místa obsluhy, tedy pravděpodobnost toho, že další zákazník, který přijde do samoobslužné linky, bude muset čekat. V tomto případě zřejmě

$$P(X \geq 1) = \frac{\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}{1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}75,$$

takže 75 zákazníků ze 100 neprojde linkou plynule, ale musí čekat ve frontě (tedy pravděpodobnost nevyužití systému je rovna 0,25). Dále můžeme stanovit průměrnou délku fronty, která je rovna

$$\mathsf{E}(Y) = \pi_1 \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 2{,}25.$$

Nakonec můžeme také určit průměrnou dobu čekání zákazníků ve frontě jako

$$\mathsf{E}(W) = \frac{1}{1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0{,}75 \text{ minuty},$$

tj. 45 sekund. ○

**Příklad 3.10** Vraťme se nyní k příkladu 3.8, kdy jsme vyšetřovali (ustálený) systém hromadné obsluhy zákazníků v bance, a spočítejme výše uvedené charakteristiky (také v tomto případě předpokládáme, že fronta je neomezená). Nejprve tedy určíme pravděpodobnost obsazení všech míst obsluhy (poradenských míst). S využitím tabulky v uvedeném příkladu obdržíme

$$P(X \geq 5) = 1 - (0{,}2228 + 0{,}3342 + 0{,}2506 + 0{,}1253 + 0{,}0470) = 0{,}0201.$$

Je zřejmé, že tato pravděpodobnost je velmi malá, proto by se dalo v rámci případné úspory nákladů uvažovat i o snížení počtu obslužných míst. Dále, $\pi_0 = 0{,}2228$ určuje pravděpodobnost nevyužití systému hromadné obsluhy, která je cenou za klientský komfort. Nízké hodnotě $P(X \geq 5)$ odpovídá též průměrná délka fronty

$$\mathsf{E}(Y) = 0{,}0141 \frac{\frac{3}{10}}{\left(1 - \frac{3}{10}\right)^2} = 0{,}0086.$$

Průměrný počet obsazených míst obsluhy $\mathsf{E}(Z) = 3/2 = 1{,}5$ a průměrná doba čekání zákazníka na obsluhu

$$\mathsf{E}(W) = \frac{0{,}0141}{10\left(1-\frac{3}{10}\right)^2} = 0{,}0029 \text{ hodiny},$$

tj. cirka 10 sekund, nám dají poslední vodítka, že by bylo možné systém optimalizovat.

Zkusme tedy namodelovat, jak by se sitace změnila, snížil-li by se počet obslužných míst o jedno, tedy na $s = 4$. Takto dostaneme následující tabulku limitních pravděpodobností:

| počet požadavků ($j$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| počet čekajících | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\pi_j$ | 0,2210 | 0,3315 | 0,2486 | 0,1243 | 0,0466 |
| počet požadavků ($j$) | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| počet čekajících | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\pi_j$ | 0,0175 | 0,0066 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 |

ze které obratem určíme

$$P(X \geq 4) = 0{,}0746,\ P(X = 0) = 0{,}2210, \mathsf{E}(Y) = 0{,}0447, \mathsf{E}(W) = 0{,}0149$$

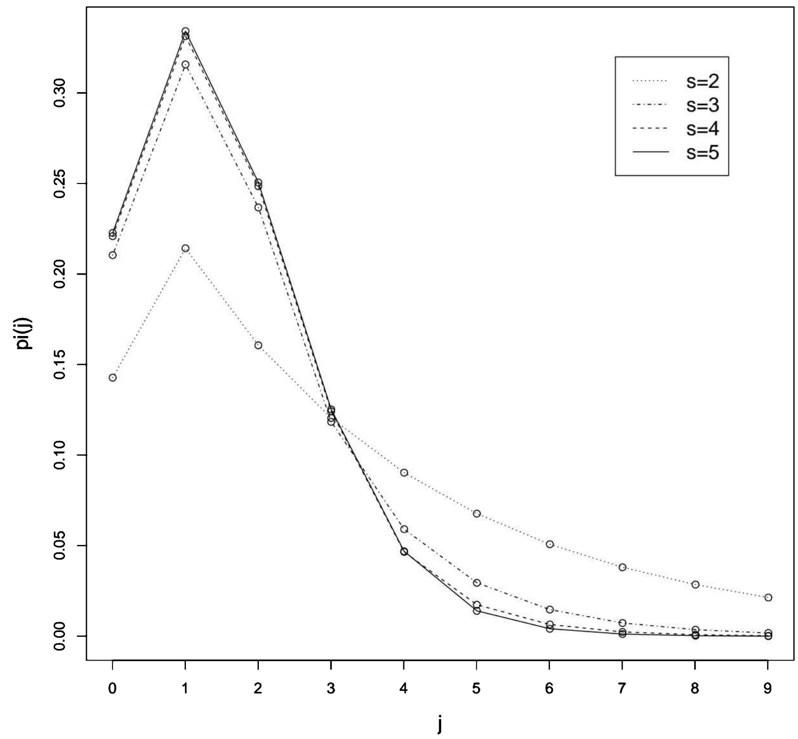
(průměrná doba čekání je 0,0149 hodiny, tj. přibližně 54 sekund; hodnota $\mathsf{E}(Z)$ se nemění). Můžeme tedy zřejmě konstatovat, že snížení počtu obslužných míst by nemělo zásadní vliv na snížení komfortu klientů. Pro úplnost si ještě namodelujme situaci pro všechny přípustné hodnoty počtu obslužných míst ($s > \frac{\lambda}{\mu}$ pro $\lambda = 3$ a $\mu = 2$) včetně již vyšetřovaných případů, tedy $s = 2, 3, 4, 5$ pro počet požadavků $i = 0, \ldots, 9$. Výsledek je znázorněn na obr. 2. Z něj je možné usoudit, že již pro $s = 3$ bychom dostali velmi podobné hodnoty kvalitativních parametrů daného systému jako při čtyřech a pěti místech obsluhy. ○

**Příklad 3.11** Za systém hromadné obsluhy $M/M/s$ s omezenou délkou fronty můžeme pokládat oddělení nemocnice, na kterém jsou ve dvou operačních sálech ve směnách nepřetržitě prováděny neurgentní operace. Na každém sále (obslužném místě) se operuje s intenzitou $\mu = 4$ pacienti za den. Intenzita vstupního proudu $\lambda$ je průměrně 7 pacientů denně. Přitom z organizačních důvodů bylo stanoveno, že na pořadníku smí být maximálně deset pacientů, ostatní jsou odesíláni do okolních nemocničních zařízení s větší kapacitou. Máme určit základní charakteristiky efektivnosti tohoto systému hromadné obsluhy.

Ze zadání plyne, že $s = 2$ a $m = 10$. Pro výpočet příslušných charakteristik je zapotřebí nejprve určit pravděpodobnost nevyužití systému ($\pi_0 = 0{,}0821$) a pravděpodobnost výskytu dvou požadavků (pacientů) v systému ($\pi_2 = 0{,}1257$), tedy pravděpodobnost čekání dalšího příchozího pacienta; určíme také pravděpodobnost odmítnutí dalšího pacienta $\pi_{s+m} = \pi_{12} = 0{,}0331$. Tato poslední pravděpodobnost je velmi důležitá, její velká hodnota by znamenala nutnost převozu velkého procenta pacientů do okolních nemocnic. Připomeňme, že veličina $X$ značí počet požadavků v systému, $Y$ počet požadavků ve frontě, $Z$ počet obsazených míst obsluhy a $W$ dobu čekání ve frontě. Potom dosazením do příslušných vztahů dostaneme pravděpodobnost toho, že oba operační sály budou obsazeny, $P(X \geq 2) = 0{,}7742$, a střední hodnoty

$$\mathsf{E}(Y) = 2{,}8729, \ \mathsf{E}(Z) = 7/4 = 1{,}75, \ \mathsf{E}(W) = 0{,}6639,$$

tedy před novým pacientem v průměru čekají tři další (při průměrné $\frac{1{,}75}{2} \cdot 100\% = 87{,}5\%$ vytíženosti obou sálů), operace se ovšem pacient v průměru dočká během $24 \cdot 0{,}6639 = 15{,}9$ hodin. ○




Obr. 2: Limitní rozdělení pro jednotlivé hodnoty počtu míst obsluhy $s$. Hodnoty limitních pravděpodobností jsou pro větší názornost spojeny.

### 3.3.4 Systém $M/M/\infty$

V určitých systémech je potřebné, aby obsluha požadavku začala ihned v okamžiku jeho příchodu do daného systému hromadné obsluhy. Jako příklad můžeme uvést situaci z předchozího příkladu v případě, že by daným systémem byl urgentní příjem pacientů, např. na traumatologii. Je zřejmé, že v tomto případě je každý pacient (až na zcela výjimečné případy, např. při hromadné havárii) ihned obsloužen (tj. zoperován) a nemusí čekat ve frontě. Takové systémy je teoreticky možno studovat jako systémy s neomezeným počtem míst obsluhy. Budeme opět předpokládat, že příchody požadavků do tohoto systému tvoří Poissonův proces s intenzitou $\lambda$ (tedy doby mezi příchody jsou nezávislé veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$); obsluha začne okamžitě, doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Je-li $X_t$ počet zákazníků v systému v čase $t$, je $\{X_t, t \geq 0\}$ proces růstu a zániku s intenzitami růstu a zániku

$$\lambda_j = \lambda,\ 0 \leq j < \infty,$$
$$\mu_j = j\mu,\ 1 \leq j < \infty,$$

a tedy Markovův řetězec se spojitým časem a maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Kolmogorovy diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou podle věty 2.7 ve tvaru

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$
$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \quad 1 \leq j < \infty,$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $j \neq i$. Tato soustava se řeší metodou vytvořující funkce [Prášková, s. 113] a obdržíme

$$p_j(t) = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - e^{-\mu t}\right)^j \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right)\right],\ j \geq 0.$$

Odtud následně obržíme limitní pravděpodobnosti jako

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \quad j \geq 0,$$

což jsou pravděpodobnosti Poissonova rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

Z dříve uvedených charakteristik zde většina pozbývá na významu, smysl má zřejmě (za předpokladu dostatečně dlouhé doby provozu systému) určit pouze pravděpodobnost nevyužití systému $\pi_0 = \exp(-\frac{\lambda}{\mu})$ a průměrný počet obsazených míst obsluhy (střední hodnotu náhodné veličiny $Z$ s Poissonovým rozdělením s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$, tj. $\mathsf{E}(Z) = \frac{\lambda}{\mu}$).

**Příklad 3.12** Vraťme se ještě k příkladu 3.11. V případě urgentního příjmu bychom při stejných vstupních parametrech $\lambda$ a $\mu$ obdrželi

$$\pi_0 = 0{,}1738, \quad \mathsf{E}(Z) = 1{,}75,$$

je tedy opodstatněné mít k dispozici (alespoň) dvě místa obsluhy (operační sály). ○

V další kapitole se ještě zmíníme o tzv. uzavřených modelech, kdy zdroj požadavků na obsluhu není neomezený jako dříve. Zde je totiž zdroj požadavků tvořen již dříve obslouženými požadavky, z čehož plyne, že intenzita obsluhy ovlivňuje intenzitu vstupu požadavků.

### 3.3.5 Uzavřené systémy hromadné obsluhy

V předchozích situacích jsme se setkávali s případy, kdy byl zdroj požadavků neomezený, tedy pravděpodobnosti příchodů během daného časového intervalu nezávisely na stavu systému. V případě uzavřených (cyklických) systémů hromadné obsluhy je zdroj vstupních požadavků omezený, tj. obsloužené požadavky přechází znovu do zdroje požadavků. S těmito systémy se nejčastěji setkáváme při problému obsluhy systému $n$ nezávislých automatických výrobních strojů (např. automatické obráběcí stroje), kdy se předpokládá, že tyto jsou naprosto zaměnitelné (mají stejný výkon a provozní i spolehlivostní parametry). Tyto automaty pak tvoří zdroje požadavků na obnovu provozuschopnosti při jejich poruchách, přičemž doba bezporuchového provozu každého automatu má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda$ (intenzita poruch). Přitom každá dílna je vybavena určitým počtem seřizovačů (místa obsluhy), kteří zajišťují obnovování provozuschopnosti (opravu) automatů. Doba opravy má rovněž exponenciální rozdělení, ovšem s parametrem $\mu$ (intenzita obnovy). Vedle stanovení počtu seřizovačů se pak budeme zajímat zejména o stupeň jejich využití, případně také o stanovení vlivu spolehlivosti automatů na výkon celého pracoviště.

Problém obsluhy strojů byl původní motivací k rozvoji těchto systémů hromadné obsluhy a ilustraci teorie. Uvedeného modelu se ovšem dá využít k řešení i dalších situací, kdy je smysluplné uvažovat pouze konečný počet požadavků. Jako příklad uveďme pracoviště s $n$ zaměstnanci, kteří využívají služeb daného počtu kopírek. Tyto zde vlastně hrají roli seřizovačů. Pod dobou bezporuchového provozu nyní rozumíme dobu, kdy jednotliví zaměstnanci nepotřebují služeb kopírek využít. Dobou opravy se v tomto případě rozumí doba kopírování. Je zřejmé, že nás bude zajímat zejména úloha stanovit počet potřebných kopírek, aniž by se před nimi tvořily fronty, a také stupeň využití jednotlivých přístrojů.

Uveďme nyní představenou úlohu ve formě matematického modelu. Řekneme, že systém $n$ automatů je v čase $t$ ve stavu $k$, jestliže se právě $k$ automatů opravuje, přičemž $0 \leq k \leq n$. Dále nechť je pro jejich opravy k dispozici $s$ seřizovačů ($0 \leq s \leq n$), kteří jsou rovnocenní, a po zásahu (opravě) je zařízení uvedeno do výchozího stavu; v literatuře se lze setkat s označením tohoto modelu ve tvaru $M/M/s/./n$. Vzhledem k výše uvedeným předpokladům lze činnost tohoto systému popsat Markovovým řetězcem se spojitým časem (jedná se vlastně o variantu procesu růstu a zániku), kde $X_t$ představuje počet automatů v opravě a $\mathsf{S} = \{0, 1, \ldots, n\}$. Pro intenzity pravěpodobností přechodu pak dostaneme [Maixner, s. 111]

$$\begin{aligned}
q_0 &= n\lambda, \\
q_{j,j+1} &= (n-j)\lambda, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \\
q_{j,j-1} &= j\mu, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \\
q_j &= (n-j)\lambda + j\mu, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \\
q_{j,j-1} &= s\mu, \quad j = s+1, \ldots, n, \\
q_j &= (n-j)\lambda + s\mu, \quad j = s+1, \ldots, n, \\
q_{ij} &= 0, \text{ jinak},
\end{aligned}$$

maticově

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{A}_{(s+1,s+1)} =$$

$$= \begin{pmatrix}
-n\lambda & n\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\mu & -[(n-1)\lambda + \mu] & (n-1)\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -[(n-2)\lambda + 2\mu] & (n-2)\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3\mu & -[(n-3)\lambda + 3\mu] & (n-3)\lambda & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & s\mu & -[(n-s)\lambda + s\mu]
\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{(s+1,n-s-1)} = \begin{pmatrix}
0 & 0 \ldots 0\, 0\, 0\, 0 \\
0 & 0 \ldots 0\, 0\, 0\, 0 \\
0 & 0 \ldots 0\, 0\, 0\, 0 \\
0 & 0 \ldots 0\, 0\, 0\, 0 \\
\vdots & \vdots \ldots \vdots\, \vdots\, \vdots\, \vdots \\
(n-s)\lambda & 0 \ldots 0\, 0\, 0\, 0
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{C}_{(n-s-1,s+1)} = \begin{pmatrix}
0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 & s\mu \\
\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots \ldots \vdots & \vdots \\
0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 & 0 \\
0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 & 0 \\
0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{(n-s-1,n-s-1)} = \begin{pmatrix}
-[(n-s-1)\lambda + s\mu] & (n-s-1)\lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & s\mu & -[2\lambda + s\mu] & 2\lambda & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & s\mu & -[\lambda + s\mu] & \lambda \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & s\mu & -s\mu
\end{pmatrix}.$$

Je tedy zřejmé, že systém Kolmogorovových diferenciálních rovnic bude ve tvaru

$$\begin{aligned}
p_0'(t) &= -n\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
p_j'(t) &= (n-j+1)\lambda p_{j-1}(t) - [(n-j)\lambda + j\mu]p_j(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t),\\
&\quad j = 1, \dots, s,\\
p_j'(t) &= (n-j+1)\lambda p_{j-1}(t) - [(n-j)\lambda + s\mu]p_j(t) + s\mu p_{j+1}(t),\\
&\quad j = s+1, \dots, n,\\
p_n'(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - s\mu p_n(t).
\end{aligned}$$

Pro jeho explicitní řešení by bylo potřeba tzv. Laplaceovy transformace, která překračuje rámec tohoto kurzu. Proto se opět omezíme na vyšetřování systému při dosti dlouhé době provozu, pro výpočet limitního rozdělení pravděpodobností tedy vyjdeme ze soustavy

$$\begin{aligned}
0 &= -n\lambda\pi_0 + \mu\pi_1,\\
0 &= (n-j+1)\lambda\pi_{j-1} - [(n-j)\lambda + j\mu]\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1},\\
&\quad j = 1, \dots, s,\\
0 &= (n-j+1)\lambda\pi_{j-1} - [(n-j)\lambda + s\mu]\pi_j + s\mu\pi_{j+1},\\
&\quad j = s+1, \dots, n,\\
0 &= \lambda\pi_{j-1} - s\mu\pi_n.
\end{aligned}$$

Takto obdržíme [Kořenář, s. 168]

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \binom{n}{j}, \quad 0 \le j < s,\\
\pi_j &= \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{n!}{s^{j-s}s!(n-j)!} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \binom{n}{j}\frac{j!}{s^{j-s}s!}, \quad s \le j \le n,
\end{aligned}$$

kde $\pi_0$ bychom opět určili z podmínky $\sum_{j=0}^{n}\pi_j = 1$, tedy

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \binom{n}{j} + \sum_{j=s}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \binom{n}{j}\frac{j!}{s^{j-s}s!}\right]^{-1}.$$

Využijeme-li stejného označení jako v kapitole 3.3, kde $X$ nyní vyjadřuje počet strojů vyžadujících opravu, můžeme následně určit pravděpodobnost prostoje alespoň jednoho automatu (tedy pravděpodobnost čekání jednoho nebo více strojů na opravu) jako

$$P(X > s) = \sum_{j=s+1}^{n}\pi_j,$$

pravděpodobnost nevyužití seřizovačů $P(X = 0) = \pi_0$, dále pravděpodobnost využití $k$ seřizovačů ($k = 1, \ldots, s$) jako

$$P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \pi_j$$

a nakonec střední délku fronty (vlastně střední hodnotu počtu automatů, které čekají na opravu)

$$\mathsf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n-s} k\pi_{s+k}.$$

Uvedené pravděpodobnosti se již nevyjadřují explicitně, ale určují se přímo z konkrétního zadání úlohy.

V některých případech má též smysl zkoumat výkon daného systému [Maixner, s. 108]. Pak předpokládejme, že po odečtení organizačních a technologických prostojů $d_1$ (přestávky, doplňování materiálu, seřizování automatů pro novou zakázku) je v průběhu $l$-hodinové směny k dispozici $d = l - d_1$ času (v hodinách) pro vlastní provoz výrobního systému. Střední výkon $V_S$ systému za směnu (při dlouhé době provozu) je dán vztahem

$$V_S = d\,V \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\pi_j$$

(v kusech za směnu), kde $V$ je teoretický výkon (v kusech) jednoho automatu za hodinu.

Provedené teoretické úvahy budeme ilustrovat na příkladech, kde využijeme obě motivace z úvodu této kapitoly.

**Příklad 3.13** (adaptováno z [Kořenář, s. 169]) Ve firmě jsou k dispozici dvě kopírky pro pět zaměstnanců, z nichž každý přichází kopírovat v průměru jednou za 40 minut. Požadavky na užití kopírky tvoří Poissonův proces s parametrem 1/40. Rozdělení dob trvání obsluhy (délka kopírování) je exponenciální s průměrem 4 minuty.

Připomeňme, že v tomto kontextu jsou automaty jednotliví zaměstnanci, role seřizovačů hrají kopírky a opravou rozumíme akt kopírování, tedy $n = 5$ a $s = 2$. Ze zadání dále plyne, že odhad intenzity příchodů $\lambda$ je 1/40 za minutu a odhad intenzity obsluhy $\mu$ je 1/4 za minutu. Začneme určením pravděpodobnosti nevyužití kopírek,

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{1} \binom{5}{j} \left( \frac{1}{10} \right)^j + \sum_{j=2}^{5} \binom{5}{j} \left( \frac{1}{10} \right)^j \frac{j!}{2!2^{j-2}} \right]^{-1} =$$

$$= (1 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}015 + 0{,}0015 + 0{,}000075)^{-1} = 0{,}6186,$$

odkud již můžeme určit celé limitní rozdělení:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_i$ | 0,6186 | 0,3093 | 0,0619 | 0,0093 | 0,0009 | $4,6 \times 10^{-5}$ |

Pravděpodobnost čekání jednoho nebo více zaměstnanců na kopírování je rovna

$$P(X > 2) = \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 0{,}0103,$$

přitom procento využití jedné kopírky je

$$100 \cdot P(X \geq 1)\% = 100 \cdot (1 - \pi_0)\% = 38{,}14\%$$

a obou kopírek pouze

$$100 \cdot P(X \geq 2)\% = 100 \cdot (1 - \pi_0 - \pi_1)\% = 7{,}21\%.$$

Je tedy zřejmé, že vytíženost obou kopírek není dostatečná, což otevírá možnost k redukci jejich počtu. Zkusme tedy vypočítat, jak by vypadaly charakteristiky systému pouze s jednou kopírkou ($s = 1$). Nejprve opět určíme limitní rozdělení pravděpodobností:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_i$ | 0,5640 | 0,2028 | 0,1128 | 0,0338 | 0,0068 | 0,0007 |

tedy vidíme, že pravděpodobnost nevyužití zařízení se snížila na 0,5640 (a tedy vytížení kopírky bude 43,60 %). Na druhou stranu ovšem stoupne pravděpodobnost čekání na kopírování, a to na 0,1541, s průměrnou délkou fronty

$$\mathsf{E}(Y) = 1 \cdot 0{,}1128 + 2 \cdot 0{,}0338 + 3 \cdot 0{,}0068 + 4 \cdot 0{,}0007 = 0{,}2035.$$

$\circ$

**Příklad 3.14** [Maixner, s. 116] Výrobní systém obsahuje pět soustružnických automatů s parametry $V = 120$ ks/h; $\lambda = 0{,}125$ h$^{-1}$; $\mu = 1$ h$^{-1}$; $d = 14$ h (uvažujeme dohromady dvě osmihodinové směny s hodinovým prostojem v každé z nich). Jaký je střední denní výkon při jednom seřizovači, tedy $s = 1$? Jak se zvýší střední výkon, zvýšíme-li počet seřizovaču na dva? Stanovte časové vytížení obou seřizovačů.

Pro $s = 1$ je výpočet limitního rozdělení a středního výkonu proveden v následující tabulce:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_i$ | 0,479 | 0,299 | 0,150 | 0,056 | 0,014 | 0,002 | 1 |
| $dV(5-i)\pi_i$ | 4 024 | 2 009 | 756 | 188 | 23 | – | 7 000 |

Střední denní výkon je $V_S = 7\,000$ ks za dvě směny. Pravděpodobnost, že jeden nebo více strojů budou čekat na opravu je $P(X > 1) = 0{,}222$. Poměrně vysokou hodnotu pravděpodobnosti prostojů alespoň jednoho stroje snížíme zařazením dalšího seřizovače.

Pro $s = 2$ dostaneme:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_i$ | 0,551 | 0,345 | 0,086 | 0,016 | 0,002 | $1,2 \times 10^{-4}$ | 1 |
| $dV(5-i)\pi_i$ | 4 628 | 2 318 | 433 | 54 | 3 | – | 7 436 |

Střední výkon výrobního systému při dvou seřizovačích je tedy $V_S = 7\,436$ ks za 2 směny, což je o 6,2 % více oproti výkonu systému s jedním seřizovačem. Pravděpodobnost, že jeden nebo více strojů budou čekat na opravu, je

$$P(X > 2) = 0{,}018.$$

Jeden seřizovač je využit po

$$(1 - \pi_0) \cdot 100\,\% = 0{,}449 \cdot 100\,\% = 44{,}9\,\%$$

a druhý

$$(1 - \pi_0 - \pi_1) \cdot 100\,\% = 0{,}104 \cdot 100\,\% = 10{,}4\,\%$$

provozního času.

Stejným postupem lze zkoumat i vliv zlepšení spolehlivosti automatů. Předpokládejme, že se podařilo snížit intenzitu poruch o 20 %, tj. na $\lambda = 0{,}1$ h$^{-1}$. Vyhodnotíme-li případ s jedním seřizovačem podobnou tabulkou, zjistíme, že střední výkon je 7 330 ks za dvě směny, tj. o 4,7 % vyšší než v původním výrobním systému. ○

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že systémy hromadné obsluhy generují ještě daleko bohatší třídu modelů, než jsou ty, o kterých jsme se v tomto textu mohli zmínit. Možná zobecnění se přitom týkají zejména rozdělení dob mezi příchody zákazníků nebo dob obsluhy, které může být i jiné než exponenciální. Takto obdržíme modely (v jejich symbolickém označení jsou $M$ nahrazena $G$ či písmenem odpovídajícím danému rozdělení), kdy již nemůžeme počet zákazníků v systému obsluhy popsat Markovovým řetězcem, neboť takový proces nemusí mít markovskou vlastnost; v některých případech však lze teorie Markovových řetězců využít, více v [Prášková, Kořenář]. Další možná zobecnění uvedených modelů se pak mohou týkat systémů hromadné obsluhy s netrpělivostí či prioritami požadavků.

## 3.4 Další aplikace Markovových řetězců

Škála možných aplikací Markovových řetězců je daleko rozmanitější, než jaké jsme v tomto textu mohli zmínit. Mezi nejznámější patří *modelování a řízení zásob*, neboli jak stanovit rozumnou velikost zásob pro určitý sklad. Studium matematických modelů pohybu zásob je předmětem teorie zásob, která je jednou z disciplin operační analýzy. Je ovšem zřejmé, že situace, se kterými se při řízení zásob můžeme setkat, jsou velmi rozmanité a snaha o jejich přesný popis nějakým matematickým modelem by tento učinila velmi komplikovaným a v praxi obtížně použitelným. Proto se většinou uvádí pouze jednodušší modely [Walter, Maixner], které lze popsat Markovovým řetězcem se spojitým časem a jež lze zároveň chápat jako metodické postupy k řešení problematiky řízení zásob.

Jako další aplikaci lze též zmínit použití Markovových řetězců *v teorii učení*. Předmětem modelování je nejčastěji posloupnost odpovědí, jimiž reaguje subjekt (student) v procesu postupného formování asociace, tj. v procesu učení. Proces učení má dva stavy: „subjekt odpovídá správně" a „subjekt odpovídá chybně"; v popředí zájmu je potom závislost odpovědi subjektu v aktuálním kroku procesu učení na jeho odpovědích v krocích předcházejících. Další podrobnosti jsou uvedeny např. v literatuře [Komenda], včetně hlubších pedagogicko-psychologických souvislostí. Zde uvedeme pouze jeden příklad použití Markovových řetězců v pedagogické praxi.

**Příklad 3.15** [Komenda, s. 69] Studenti chodí ke zkoušce a každý z nich si zapamatuje, jakou otázku si vytáhl (zkouška sestává z jediné otázky). Je známo, že zkoušející má soubor $N$ otázek, který během zkoušek nedoplňuje, a každou použitou otázku vrací do souboru zpět. Studenti se vzájemně informují a tak postupně získávají představu o otázkách souboru. S jakou pravděpodobností může očekávat student, který jde ke zkoušce v pořadí $n$-tý, že si vytáhne dosud neznámou otázku?

Jako stav procesu budeme brát počet otázek, který studenti dosud „neměli v ruce". Množina těchto stavů $\mathsf{S}$ má pak $N+1$ prvků $0, 1, 2, \ldots, N$. Takto definovaný proces je zřejmě homogenní Markovův řetězec s počátečním rozdělením možností prvního studenta $\mathbf{p}^{(0)} = (0, \ldots, 0, 1)$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & \frac{N-2}{N} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & \frac{N-3}{N} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{N-1}{N} & \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice pravděpodobností přechodu se sestaví na základě skutečnosti, že bylo-li už taženo $m$ různých otázek, vytáhne student další neznámou otázku s pravděpodobností $(N-m)/N$ nezávisle na tom, jaké je jeho pořadí. Z tvaru matice je zřejmé, že řetězec se nemůže vrátit do stavu $N$, jakmile jej v prvním kroku opustí. V každém kroku řetězec buď setrvá v daném stavu nebo se posune do sousedního stavu vlevo. Tedy stavy $N, N-1, \ldots, 1$ jsou přechodné a stav 0 je absorpční.

Matice $\mathbf{P}^n$ bude mít na diagonále mocniny $p_{ii}^n$ (to plyne z faktu, že $\mathbf{P}$ je zde dolní trojúhelníková matice), vyjadřující pravděpodobnosti, že se řetězec v průběhu $n$ kroků „nepohne“. Uvažujme následující vektorovou funkci stavů procesu

$$\mathbf{f} = \left(\frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, \frac{N}{N}\right)$$

mající význam rizika, že se student setká s neznámou otázkou. Rozdělení pravděpodobností na množině $\mathsf{S}$ je pro $n$-tého studenta (a tedy pro $(n-1)$-ní krok řetězce) dáno známým výrazem $\mathbf{p}^{(n-1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{n-1}$. To umožňuje definovat *střední riziko* pro $n$-tého studenta jako $\mathsf{E}_n(\mathbf{f}) = \mathbf{p}^{(n-1)}\mathbf{f}^T$.

Není obtížné zjistit, že sloupcový vektor, který dostaneme jako součin $\mathbf{Pf}^T$ je roven $(N-1)/N$-násobku sloupcového vektoru $\mathbf{f}^T$ (vzniklého transpozicí vektoru $\mathbf{f}$). Při násobení $i$-tého řádku matice $\mathbf{P}$, $i = 1, \dots, N-1$, vektorem $\mathbf{f}^T$ totiž dostaneme

$$\frac{i}{N}\frac{i-1}{N} + \frac{N-i}{N}\frac{i}{N} = \frac{N-1}{N}\frac{i}{N},$$

tedy uvedený násobek $i$-té složky vektoru $\mathbf{f}^T$. Další násobení zleva maticí $\mathbf{P}$ dává postupně

$$\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{f}^T = \mathbf{P}^{n-2}\mathbf{P}\mathbf{f}^T = \frac{N-1}{N}\mathbf{P}^{n-2}\mathbf{f}^T =$$
$$= \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \mathbf{P}^{n-3}\mathbf{f}^T = \dots = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} \mathbf{f}^T,$$

takže s využitím vztahu $\mathbf{p}^{(0)}\mathbf{f}^T = 1$ je hledané střední riziko, že se $n$-tý student setká s neznámou otázkou, rovno číslu $\mathsf{E}_n(\mathbf{f}) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}$. ○

**Příklad 3.16** [Komenda, s. 72] Uvažujme kolektiv $N$ jedinců, ve kterém se přenáší nákaza podle následujících principů.

a) potká-li nemocný zdravého, nakazí ho s pravděpodobností $\alpha$,

b) všechna setkání jsou setkáními právě dvou osob, rozsáhlejší shromažďování mají pravděpodobnost zanedbatelně malou,

c) setkání každého s každým je stejně pravděpodobné,

d) za jednotku času dochází k právě jedinému setkání (nějakých dvou osob).

Stavy systému tvoří počty nemocných, $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 2$, přitom model neuvažuje možnost uzdravení. Protože během jedné časové jednotky může dojít pouze k jedinému setkání, jsou dvě možnosti změny systému: buď zůstane beze změny (setkají-li se dva zdraví jedinci nebo dva nemocní jedinci a rovněž s pravděpodobností $1-\alpha$ při setkání zdravého jedince s nemocným) nebo přibude jeden další nemocný s pravděpodobností $\alpha$ (při setkání zdravého a nemocného jedince).

Tento jednoduchý model může sloužit např. k popisu počáteční fáze přenosné nákazy ve školním kolektivu a představuje určitou diskrétní obdobu lineárního procesu růstu při konečném počtu stavů.

Z výše uvedených podmínek plyne, že v kolektivu přichází do úvahy $\binom{N}{2}$ stejně pravděpodobných setkání dvou osob. Jestliže už je $i$ jedinců nemocných, $i = 2, \dots, N-2$, je z těchto setkání $\binom{i}{2} + \binom{N-i}{2}$ setkání takových, které nemění stav systému (nikdo další neonemocní), tj. setkání mezi zdravými navzájem a mezi nemocnými navzájem. Při jednom nemocném ($i = 1$) je takových setkání $\binom{N-1}{2}$ (zdraví v počtu $N-1$ mezi sebou) a pro $N-1$ nemocných půjde zřejmě o tentýž počet setkání (nemocní v počtu $N-1$ mezi sebou). Naopak $i(N-i)$ setkání, $i = 1, 2, \dots, N-1$, povede s pravděpodobností $\alpha$ k nákaze. Diagonální prvky matice pravděpodobností přechodu jsou tedy

$$\begin{aligned}
p_{00} &= 1, \\
p_{11} &= \frac{\binom{N-1}{2}}{\binom{N}{2}} + \frac{N-1}{\binom{N}{2}}(1-\alpha) = \frac{N-2}{N} + \frac{2}{N}(1-\alpha), \\
p_{ii} &= \frac{1}{\binom{N}{2}}\left\{\binom{i}{2} + \binom{N-i}{2}\right\} + \frac{i(N-i)}{\binom{N}{2}}(1-\alpha), \quad i = 2, \dots, N-2, \\
p_{N-1,N-1} &= \frac{N-2}{N} + \frac{2}{N}(1-\alpha), \\
p_{NN} &= 1,
\end{aligned}$$

dále

$$p_{i,i+1} = \frac{i(N-i)}{\binom{N}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

a ostatní prvky jsou rovny nule.

Je zřejmé, že stavy 0 a $N$ jsou absorpční. Je-li totiž výchozím stavem 0, setrvá v něm řetězec bez omezení (zdraví jedinci se vzájemně nenakazí), naopak z každého jiného výchozího stavu dospěje řetězec dříve nebo později do stavu $N$ (nakonec onemocní všichni). Je přitom ovšem nutné vzít do úvahy, že model je schopen popsat reálný proces pouze v omezeném časovém úseku. ○

# Dodatek

**Věta 4.1** (Abelova – pro posloupnosti) *Mějme $a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ posloupnost nezáporných reálných čísel, která nejsou všechna rovna nule a pro kterou platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0.$$

*Potom pro každou posloupnost reálných čísel $b_n$, $n = 1, 2, \dots$, která má konečnou nebo nekonečnou limitu platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*Důkaz:* [Maixner, s. 35] □

Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice typu $m \times m$, nazývá se polynom $\mathbf{A}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, *charakteristický polynom matice* $\mathbf{A}$ a rovnice $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, *charakteristická rovnice matice* $\mathbf{A}$. Kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ charakteristické rovnice jsou tzv. *charakteristická (vlastní) čísla matice* $\mathbf{A}$.

Pro čtvercovou matici $\mathbf{A} = \{a_{ij},\ i \le i, j \le m\}$ definujeme *adjungovanou matici* $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \{b_{ij},\ 1 \le i, j \le m\}$ předpisem

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det\{a_{rs},\ 1 \le r, s \le m, r \ne j, s \ne i\}.$$

**Věta 4.2** (Perronův vzorec) *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu $m \times m$. Nechť charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je tvaru*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s},$$

*kde $m_i$, $i = 1, \dots, s$ jsou násobnosti charakteristických čísel $\lambda_i$ splňující podmínku $m = m_1 + \cdots + m_s$. Potom pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí*

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{d\lambda^{m_i - 1}} \left\{ \frac{\lambda^n \operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_i(\lambda)} \right\}_{\lambda = \lambda_i}, \tag{4.1}$$

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{d\lambda^{m_i - 1}} \left\{ \frac{e^\lambda \operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_i(\lambda)} \right\}_{\lambda = \lambda_i}, \tag{4.2}$$

*kde*

$$\psi_i(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}} \mathbf{A}(\lambda),\ \ i = 1, 2, \dots, s.$$

*Důkaz:* [Gantmacher, s. 113] □

**Poznámka 4.1** Je-li $\mathbf{A}$ stochastická matice, je jedno charakteristické (vlastní) číslo rovno jedné a ostatní charakteristická čísla jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovna jedné. Důkaz je uveden v [Maixner, s. 51].

**Poznámka 4.2** Nemá-li charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ násobné kořeny, tj. jestliže

$$\mathbf{A}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m),$$

má Perronův vzorec tvar

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^n \operatorname{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_i(\lambda_i)},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{\lambda_i} \operatorname{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_i(\lambda_i)},$$

kde

$$\psi_i(\lambda) = \frac{\mathbf{A}(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}.$$

**Definice 4.1** Nechť $\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $s < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme *vytvořující funkcí posloupnosti* $\{a_n\}$.

**Binomický koeficient**

Na střední škole se zavádí binomický koeficient $\binom{n}{k}$ pouze pro celá kladná $n$, $k$. Je užitečné definici rozšířit takto: pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a libovolné celé kladné $k$ definujeme

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Dále definujeme

$$\binom{x}{0} = 0, \quad \binom{x}{k} = 0, \quad k \text{ celé záporné.}$$

Není-li $k$ celé číslo, symbol $\binom{x}{k}$ nemá smysl.

**Parciální diferenciální rovnice** [Prášková, s. 145]

Parciální diferenciální rovnice je vztah mezi neznámou funkcí $z(x_1, \ldots, x_n)$ proměnných $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$ a jejími derivacemi

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, \ldots\right) = 0. \tag{4.3}$$

Derivace ve vzorci (4.3) mohou být obecně i smíšené. Řádem této rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Řešením (inregrálem) rovnice nazveme každou funkci $z(x_1, \ldots, x_n)$, která má příslušný počet derivací a vyhovuje rovnici (4.3) v každém bodě $x_1, \ldots, x_n$ .

**Definice 4.2** Homogenní lineární parciální diferenciální rovnicí prvního řádu ve dvou proměnných $x, y$ rozumíme rovnici

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{4.4}$$

kde $a, b$ jsou spojité funkce ve vyšetřovaném oboru a nejsou v něm nikde zároveň rovny nule.

**Věta 4.3** *Nechť $\psi(x, y) = c$ je prvním integrálem rovnice*

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

*Potom řešení rovnice (4.4) je*

$$z = F(\psi(x, y)),$$

*kde $F$ je libovolná diferencovatelná funkce.*

**Limes superior a inferior**

Nechť $A \subset \mathbb{R}_1$, $a$ je hromadný bod množiny $A$ a nechť $f$ je funkce definovaná ve všech bodech $x$ množiny $A$, pro než platí $0 < |x - a| < \Delta$ , kde $\Delta$ je jisté kladné číslo. Potom pro $0 < \delta \leq \Delta$ jsou definovány funkce

$$\Phi(\delta) = \sup_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x\in A}} f(x), \tag{4.5}$$

$$\varphi(\delta) = \inf_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x\in A}} f(x). \tag{4.6}$$

Funkce $\Phi(\delta)$ je neklesající (při zvětšení čísla $\delta$ se supremum v (4.5) nemůže zmenšit) a funkce $\varphi(\delta)$ je nerostoucí v $(0, \Delta\rangle$. Proto existují limity

$$\lim_{\delta\to 0^+} \Phi(\delta) = \limsup_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x), \quad \lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta) = \liminf_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x), \tag{4.7}$$

které se nazývají *limes superior a limes inferior funkce $f$ v bodě $a$ vzhledem k množině $A$*. Protože $\varphi(\delta) \leq \Phi(\delta)$, platí $\liminf \leq \limsup$.

Platí následující věta:

**Věta 4.4**

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x), \tag{4.8}$$

*existuje tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\limsup_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \liminf_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x). \tag{4.9}$$

*V tom případě jsou čísla (4.8), (4.9) stejná.*

*Důkaz:* [Jarník, s. 175] □

**Symbol o(g(x))**

Nechť $f$ je konečná reálná funkce definovaná v množině $A \subset \mathbb{R}_1$ a nechť $a$ je hromadný bod množiny $A$. Dále nechť $g$ je konečná reálná funkce, která je kladná pro všechna $x \in A$. Symbol

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } \quad x \to a,\ x \in A,$$

značí, že

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Tento symbol tedy srovnává funkci $f(x)$ s funkcí $g(x)$. Součet dvou funkcí, které jsou $o(g(x))$, je také $o(g(x))$, symbolicky lze psát $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$, symbol $o(1)$ značí funkci mající limitu 0.

Příklady: pro $x \to 0,\ x \in \mathbb{R}_1$ je $\sin(x) = o(1), \quad x^2 = o(|x|)$,
pro $x \to \infty,\ x \in \mathbb{R}_1$ je $x^{10} = o(e^x), \quad \ln x = o(x)$.

# Literatura


[Diaconis] Diaconis, P., Saloff-Coste, L.: *What do we know about the Metropolis algorithm?* Journal of Computer and System Sciences, 57, s. 20–36, 1998.

[Dupač (1975)] Dupač, V., Dupačová, J.: *Markovovy procesy I.* SPN, Praha, 1975.

[Dupač (1976)] Dupač, V., Dupačová, J.: *Markovovy procesy II.* SPN, Praha, 1976.

[Dymarski] Dymarski, P. (ed.): *Hidden Markov models, theory and applications.* DOI: 10.5772/601, https://www.intechopen.com/books/hidden-markov-models-theory-and-applications [staženo 29.9.2018].

[Gantmacher] Gantmacher, F.R.: *Teorija matric.* Nauka, Moskva, 1966.

[Grinstead] Grinstead, Ch. M., Snell, J. L.: *Introduction to Probability, second revised edition.* American Mathematical Society, Providence, 1997.

[Hron] Hron, K., Kunderová, P., Vencálek, O.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*, 3. vydání. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2018.

[Jarník] Jarník, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha, 1976.

[Kalas] Kalas, J.: *Markovove reťazce.* Univerzita Komenského, Bratislava, 1993.

[Karlin] Karlin, S.: *A first course in stochastic processes.* Academic Press, New York and London, 1968. Ruský překlad: Karlin, S.: *Osnovy teorii slučajnych processov.* Mir, Moskva, 1971.

[Komenda] Komenda, S., Klementa, J.: *Analýza náhodného v pedagogickém experimentu a praxi.* SPN, Praha, 1981.

[Kořenář] Kořenář, V.: *Stochastické procesy.* VŠE, Praha, 2002.

[Levin] Levin, D.A., Peres, Y., Wilmer, E.L.: *Markov Chains and Mixing Times.* American Mathematical Society, Providence, 2009.

[Lukáš] Lukáš, L.: *Pravděpodobnostní modely.* ZČU, Plzeň, 2005.

[Maixner] Maixner, P.: *Markovovy procesy a jejich aplikace.* Vyd. Univerzity Palackého, Olomouc, 1991.

[Norris] Norris, J. R.: *Markov chains.* Cambridge University Press, New York, 2008.

[Ocone] Ocone, D.: *Discrete and probabilistic models in biology - Course notes.* Online studijní opora, https://www.math.rutgers.edu/academics/undergraduate/270-course-materials/338/1255-course-notes [staženo 29.9.2018].

[Piatka] Piatka, L.: *Markovove procesy.* VŠDS, Žilina, 1981.

[Prášková] Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů.* Karolinum, Praha, 2005.

[Rabiner] Rabiner, P., Juang, B.H.: *Fundamentals of speech recognition.* Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.

[Robert] Robert, C. P., Casella, G.: *Introducing Monte Carlo Methods with R.* Springer, New York, 2010.

[Walter] Walter, J.: *Stochastické modely v ekonomii.* SNTL/Alfa, Praha, 1970.