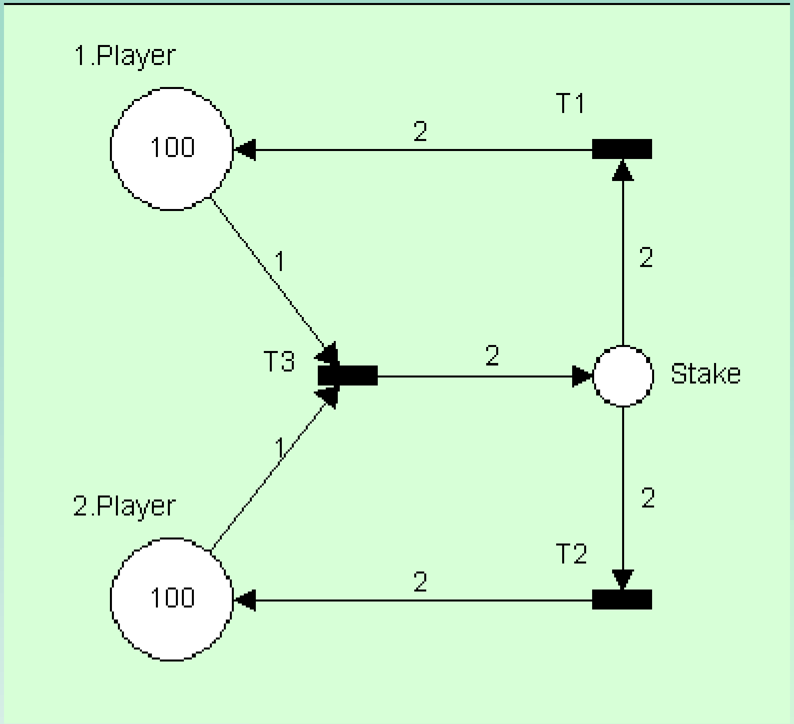


PETRIHO SÍTĚ

STOCHASTICKÉ PETRIHO SÍTĚ

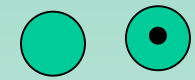
1962 - Carl Adam Petri
formalismus pro popis souběžných
synchronních distribučních systémů

Modelování Petriho sítěmi

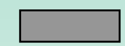
- Grafický popis a analýza systémů, ve kterých se vyskytují synchronizační, komunikační a zdroje sdílející procesy.
- Popis paralelních jevů a konfliktních závislostí
  - Jednoduchost, přehlednost
  - Modelování dynamiky procesů
- Existuje celá řada typů Petriho sítí
  - P/T (Place/Transitions) Petriho sítě,
  - P/T Petriho sítě s inhibičními hranami,
  - P/T Petriho sítě s prioritami,
  - TPN Časované (Timed) Petriho sítě,
  - CPN Barevné (Coloured, barvené) Petriho sítě,
  - OOPN Objektové (Object Oriented) Petriho sítě.

Základní pojmy

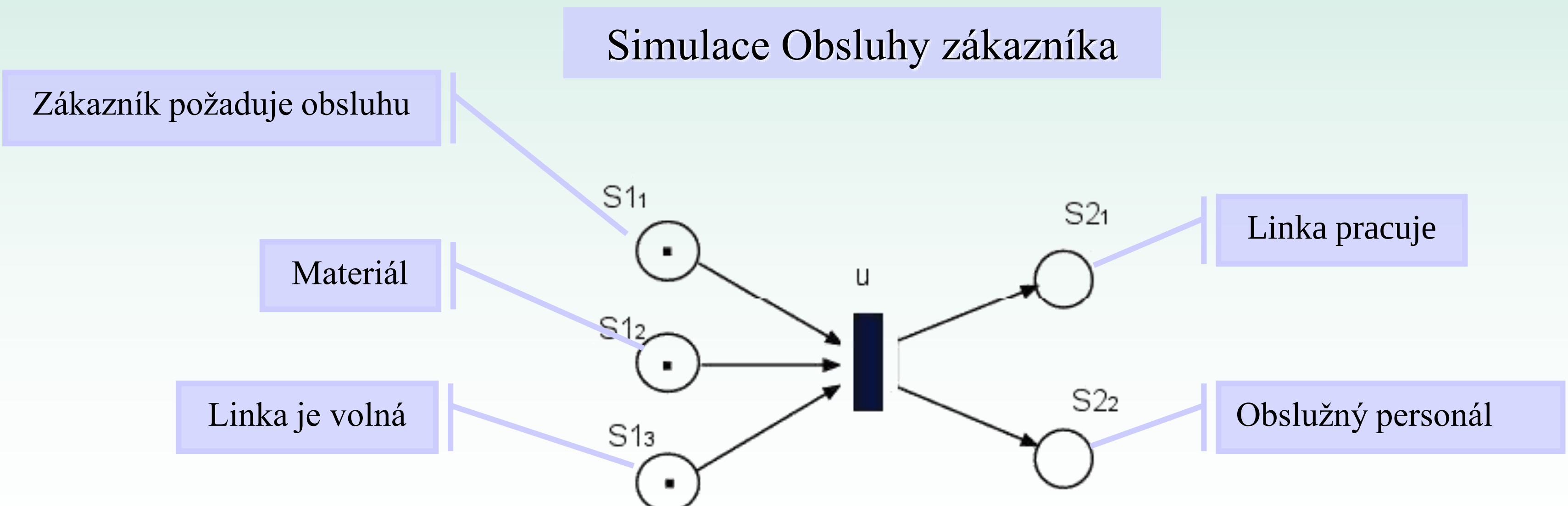
- **Places** (místa)
  obsahují stavovou informaci ve formě značek (token)



- **Transitions** (přechody)
  vyjadřují možné změny stavů
  (vzory možných událostí)

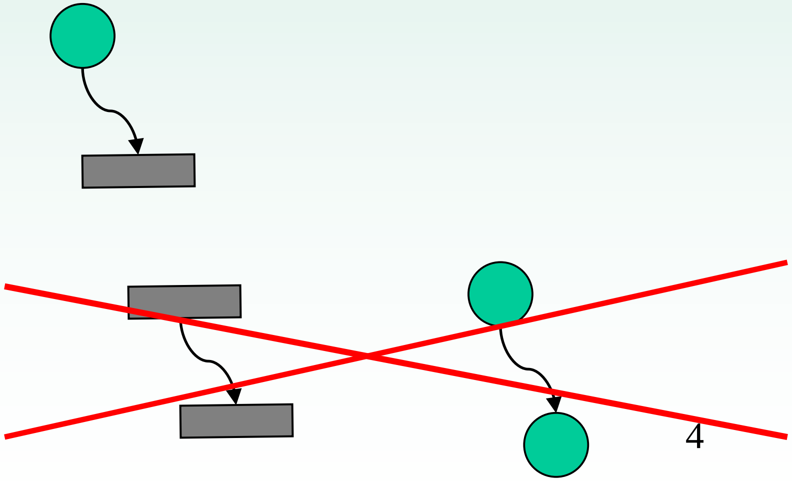


- **Arcs** (orientované hrany)
  určují logické vazby

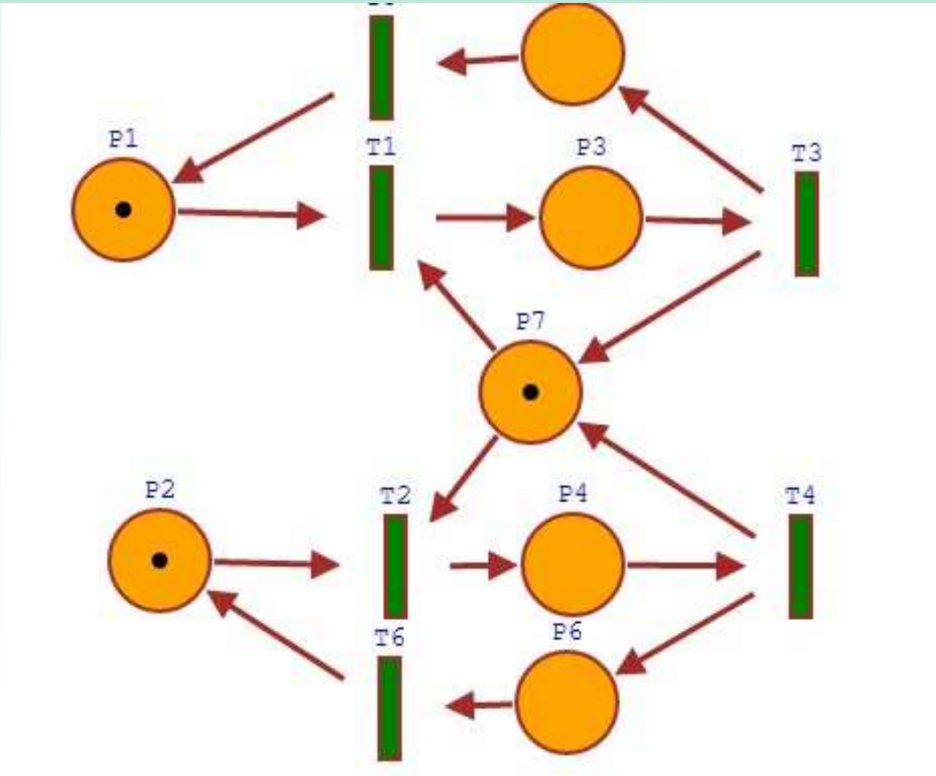


Grafický popis Petriho sítí je orientovaným bipartitních multigrafem

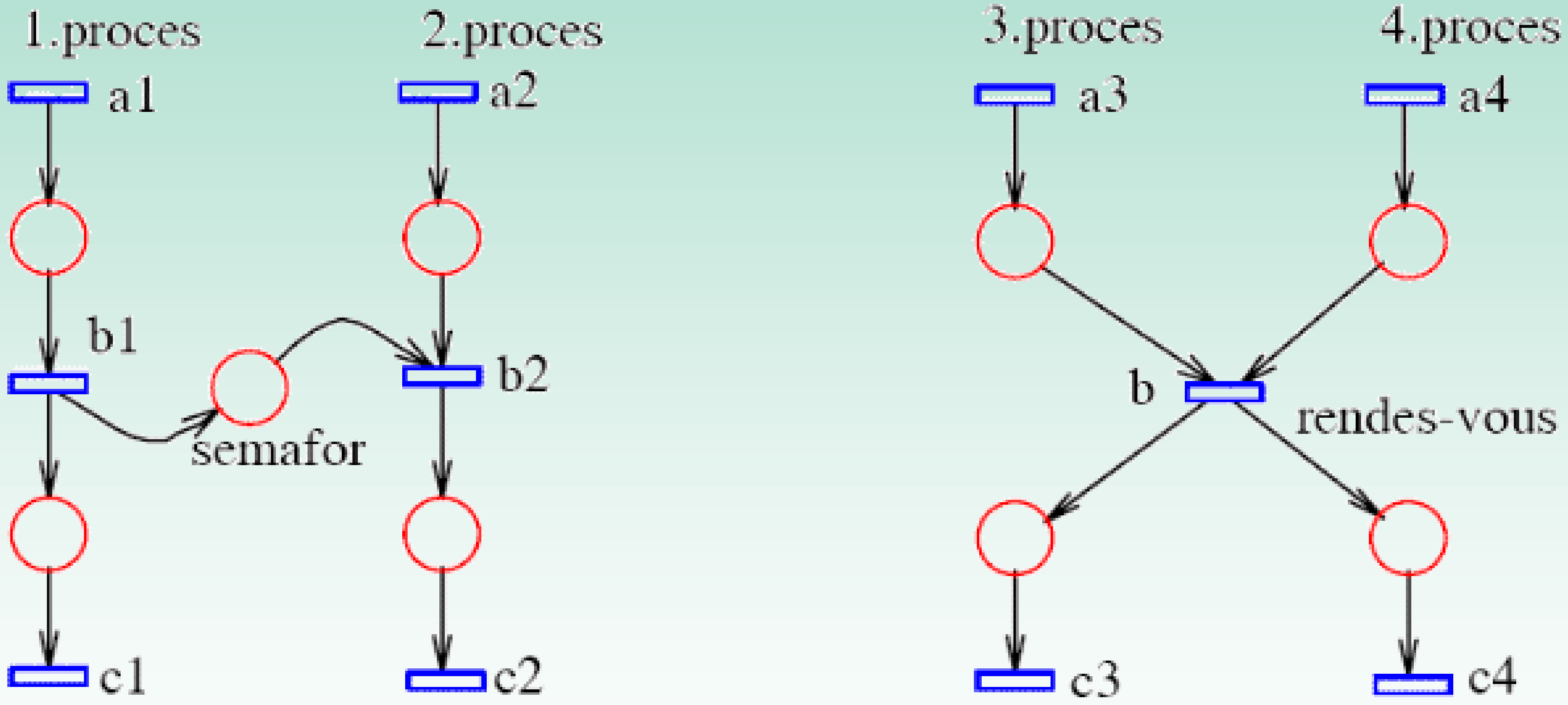
- Orientovaná hrana může spojit:
  - místo s přechodem
  - přechod s místem
- Orientovanou hranou nemůžeme spojit
  - místo s místem
  - přechod s přechodem



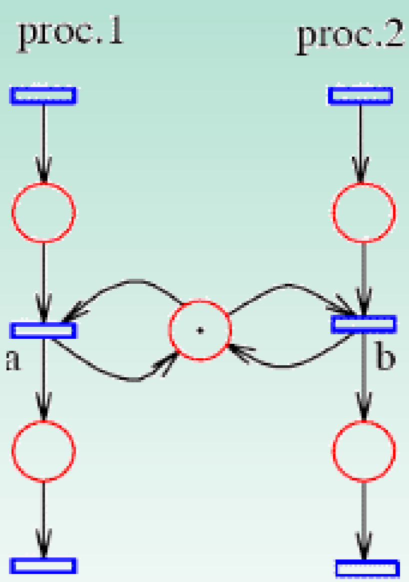
Př: Cyklický proces, který čas od času využívá nějaký zdroj



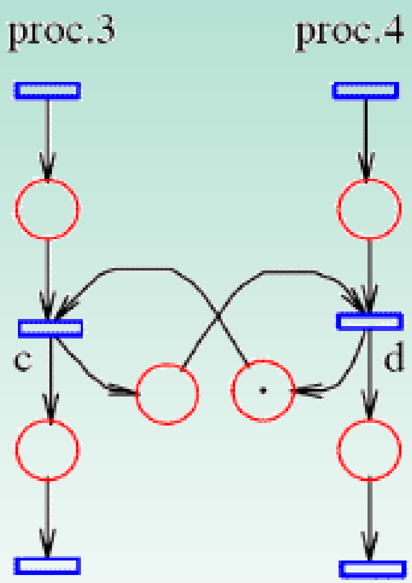
Synchronizace paralelních procesů



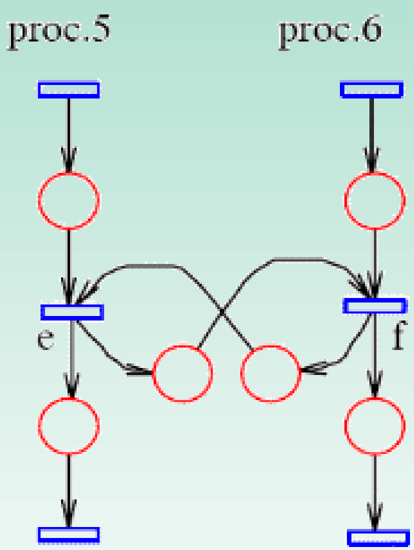
Synchronizace paralelních procesů



Kritická sekce



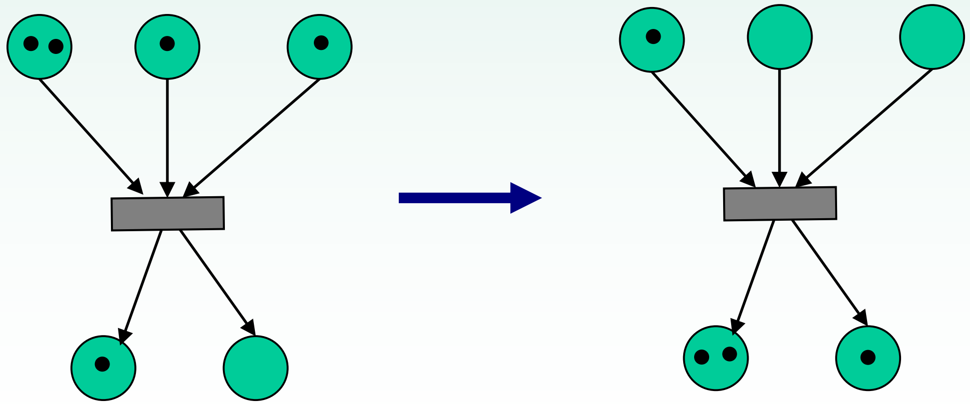
Střídání událostí



Triviální deadlock

Pravidla pro uskutečnění přechodu

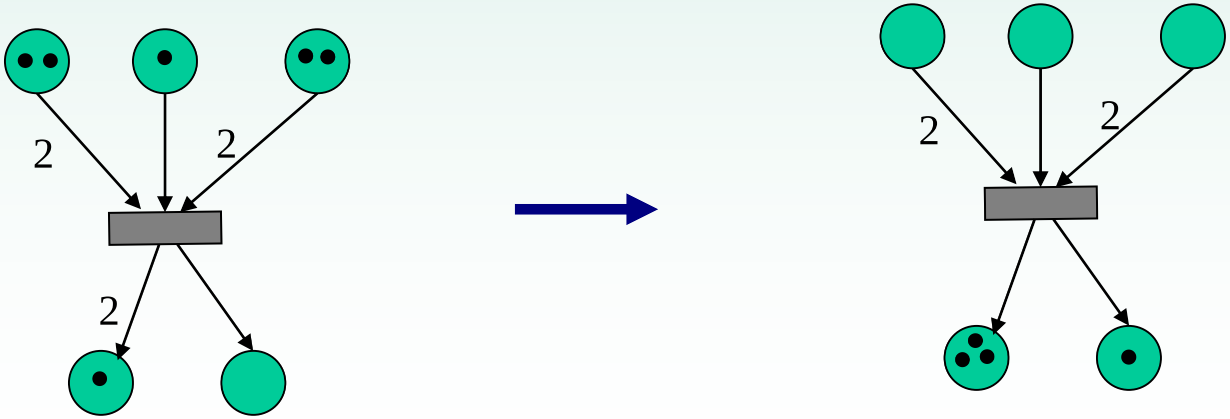
- Přítomnost značky v místě indikuje, že daný aspekt stavu je momentálně aktuální, resp. podmínka je splněna.
- Každý přechod má vstupní a výstupní místa – tím je určeno, které aspekty podmiňují výskyt události a jaké skutečnosti jsou výskytem této události ovlivněny.
- Označme $z(p)$ počet značek v místě p.
- Přechod může být uskutečněn, jsou li splněny všechny vstupní podmínky, tj. $z(p_i)>0$ pro všechna vstupní místa p_i daného přechodu.
- Uskutečnění přechodu:
  u všech vstupních míst ubereme jednu značku $(z'(p_i) = z(p_i) - 1)$
  a u všech výstupních míst přidáme jednu značku $(z'(p_j) = z(p_j) + 1)$



Ohodnocení hran a přechodů

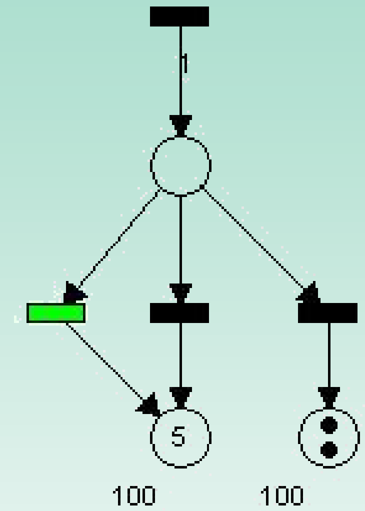
- Místo *p* je určeno kapacitou *c*(*p*) maximálního počtu značek. Přechod může být uskutečněn jen pokud (současně se splněním vstupních podmínek) není překročena kapacita výstupních podmínek.

- Počty odebíraných (umístěných) značek jsou specifikovány váhou hran. Přechod je uskutečněn jen pokud jsou vstupní hrany nasyceny, tj. pokud není počet značek ve vstupních místech daného přechodu menší než váhy příslušných hran.

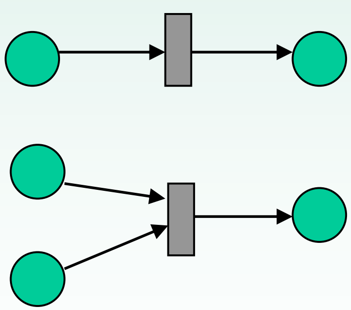


Konfliktní přechody

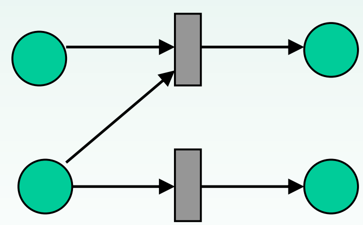
- Dva současně proveditelné přechody jsou konfliktní, když provedení jednoho způsobí, že druhý přestane být proveditelný.
- Konfliktní přechody modelují soupeření o zdroje a vzájemnou výlučnost dvou událostí.
- Nezávislé přechody modelují asynchronnost a paralelismus.



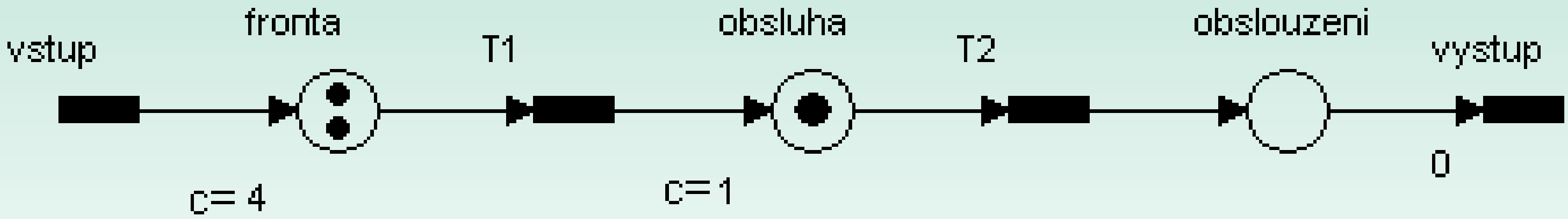
Nezávislé přechody

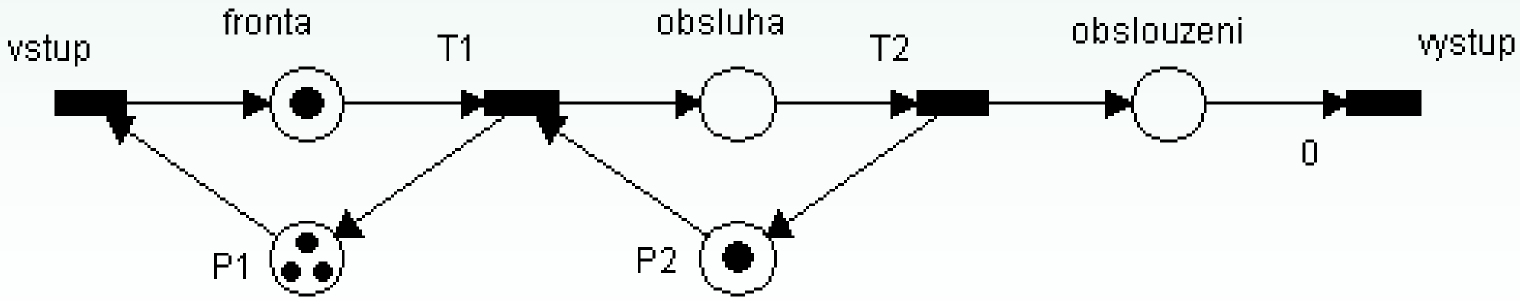


Konfliktní přechody



Síť s omezenou kapacitou míst





Definice PT sítí

PT síť je uspořádaná pětice PN=(P,T, I^-, I^+, z_0)

- **P = {p_1,p_2,…p_n} je konečná neprázdná množina míst**
- **T ={t_1,t_2,…t_n} je konečná neprázdná množina přechodů**
- **množiny P, T jsou disjunktní**
- **I^-, I^+, jsou incidenční funkce P x T ->N_0**
- **z^0 : P -> N_0 je počáteční ohodnocení** $z^0 = \left(z^0(p_1), z^0(p_2), \ldots, z^0(p_n)\right)$

- Pokud je $I^-(p,t) > 0$, vede orientovaná hrana z místa *p* do přechodu *t*. Počet odebraných žetonů v místě *p* uskutečněním přechodu *t* je roven $I^-(p,t)$.
- Pokud je $I^+(p,t) > 0$, vede orientovaná hrana z přechodu *t* do místa *p*. Počet přidaných žetonů v místě *p* uskutečněním přechodu *t* je roven $I^+(p,t)$.

- Označme aktuální ohodnocení celé sítě vektorem $z^{(i)} = \left(z^{(i)}(p_1), z^{(i)}(p_2), \ldots, z^{(i)}(p_n)\right)$
- Přechod *t* nazýváme **aktivní** (uskutečnitelný) v daném ohodnocení $z^{(i)}$, jestliže

$$\forall p \in P;\ z^{(i)}(p) \geq I^-(p,t)$$

- Ohodnocení $z^{(i)}$ nazýváme dosažitelné z ohodnocení $z^{(j)}$, jestliže existuje posloupnost uskutečněných přechodů, které převádí $z^{(i)}$ do $z^{(j)}$. (**ozn. $z^{(i)}$ - > $z^{(j)}$**)

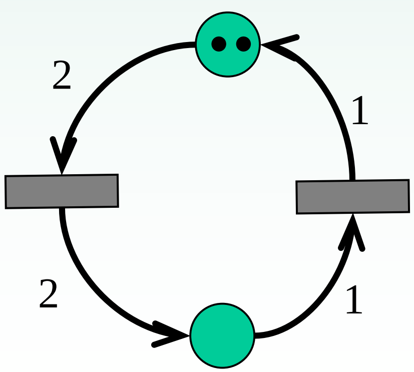
Struktura a vlastnosti Petriho sítí

- Petriho síť nazveme ohraničenou, jestliže
- Petriho síť nazýváme konzervativní, jestliže pro každý její stav platí, že celkový počet značek je konstantní. $\exists k \in N_0;\ \forall z, p;\ z(p) \le k$

$$\forall i;\ \sum_j z^{(i)}(p_j) = k$$

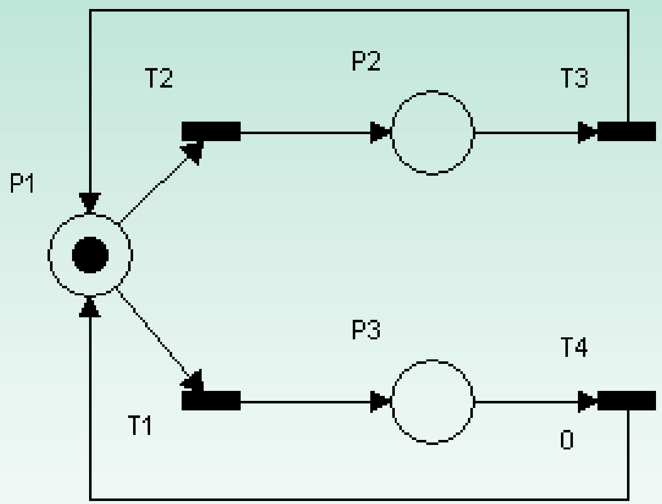
- Síť nazýváme živou, jestliže jsou živé všechny její přechody, tj., jestliže ke každému ohodnocení *z* existuje dosažitelné ohodnocení *z´*, *z ->z´*, které aktivuje daný přechod.

$$\forall z\ \exists z';\ z \to z'$$

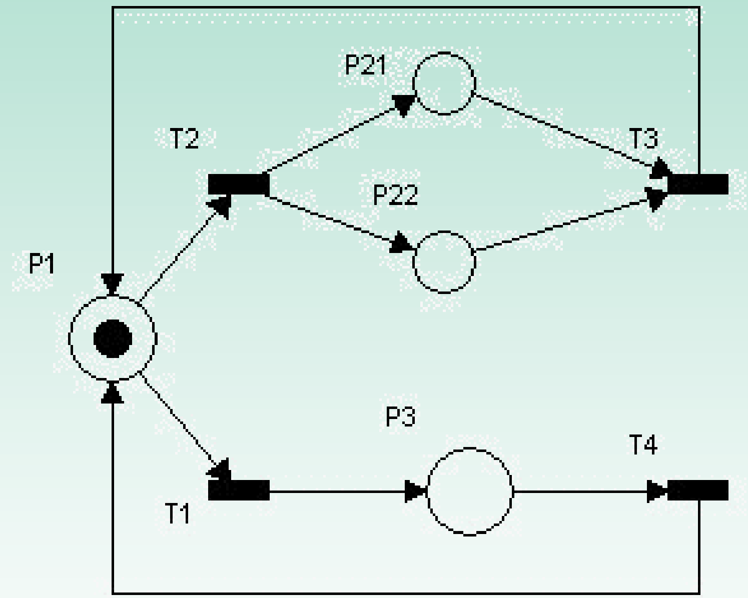


ohraničená, konzervativní síť

Konzervativnost sítě



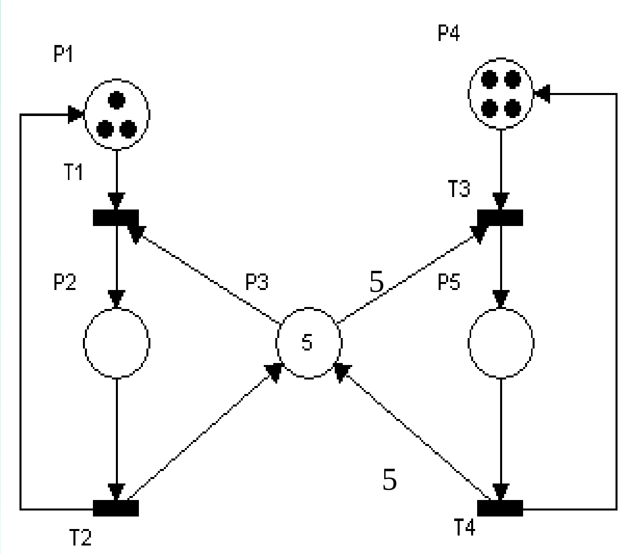
Striktně konzervativní



Konzervativní vzhledem
k váhovému vektoru (2,1,1,2).

Analýza Petriho sítí pomocí lineární algebry

- Kladný prvek c_{ij} matice C - počet žetonů, které přidáme do místa Pi odpálením přechodu Tj
- Záporný prvek c_{ij} matice C - počet žetonů, které odebereme z místa Pi odpálením přechodu Tj



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\
\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} & C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
C^- = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\
\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}, C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

C^+: dopředná incidenční matice

C^-: zpětná incidenční matice

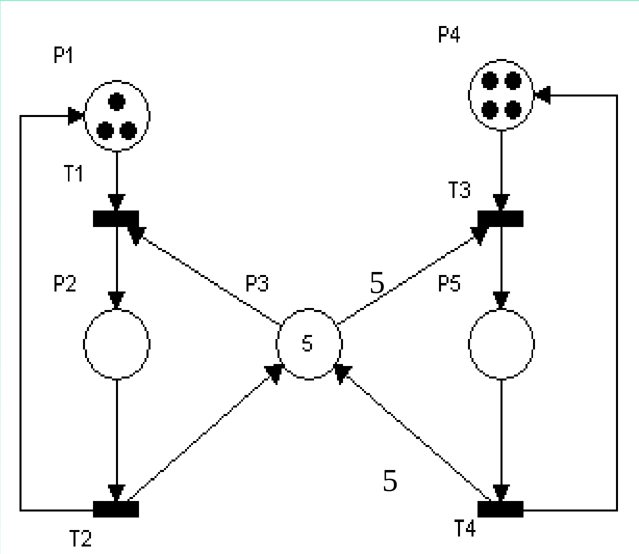
$C = C^+ - C^-$

zi : vektor počtu žetonů v místech (P1,P2,…,Pn)

- Počáteční ohodnocení z_0

$$z_0 = (3, 0, 5, 4, 0)$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



- Po uskutečnění přechodu T1 přejde počáteční ohodnocení z_0 do stavu

$$z' = z_0 + C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Po odpálení posloupnosti T1, T1, T1, T2 je výsledné ohodnocení

$$z^{(4)} = z_0 + C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice incidence

- Nechť má PN n míst $P=\{p_1,p_2,..p_n\}$ a m přechodů $T=\{t_1,t_2,..t_m\}$. Zpětná incidenční matice C^- typu $n \times m$ je definována

$$c_{ij}^{-} = I^{-}\left(p_i, t_j\right),\ \forall p_i \in P, t_j \in T$$

- analogicky dopředná incidenční matice C^+

$$c_{ij}^{+} = I^{+}\left(p_i, t_j\right),\ \forall p_i \in P, t_j \in T$$

- Incidenční matice C = C^+ - C^-
- Přechod t_i je v daném ohodnocení $z=(z_1,z_2,..z_n)$ aktivní, jestliže $\forall z_j ; z_j \geq c_{ji}^{-}$
- Uskutečněním přechodu t_i přejde ohodnocení z v ohodnocení z' $z' = z + Ce_i$;
- Předpokládejme posloupnost odpálených přechodů $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$, výpočet dosaženého stavu $z^{(k)}$ je dán dosazením do předcházejícího vzorce

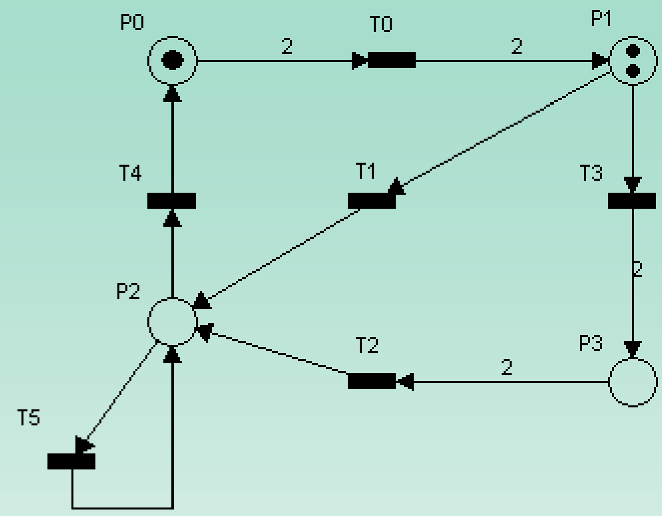
$$z^{(k)} = z + C\sum_{j=1}^{k} e_{ij} ; \qquad \sum_{j=1}^{k} e_{ij} = \Xi \ \textit{Parikův obraz posloupnosti přechodů}$$

- Nutná podmínka dosažitelnosti: Je-li z´značení dosažitelné ze značení z0, potom existuje řešení Ξ rovnice

$$z' = z_0 + C\Xi$$

Př: Napište matici incidence C

Přechod T_K se uskuteční v ohodnocení z, $\forall z_i;\ z_i \geq c^{-}_{iK}$



$$C^{-} = \left(I^{-}\left(p_n, t_m\right)\right) = \begin{array}{c|cccccc} & T0 & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ \hline P0 & & & & & & \\ P1 & & & & & & \\ P2 & & & & & & \\ P3 & & & & & & \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = C^{+} - C^{-} = \left(I^{+}\left(p_n, t_m\right) - I^{-}\left(p_n, t_m\right)\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & +2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odpálení přechodu T1:

$$z' = z^{(0)} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

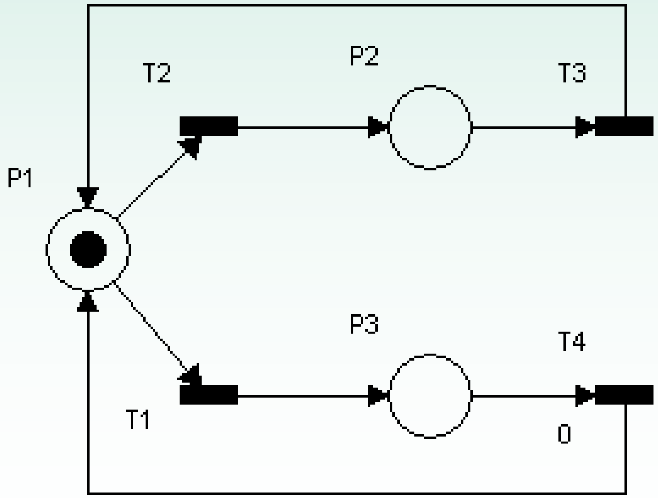
P-invarianty

Nechť C je matice incidence Petriho sítě. Nenulový vektor $i_P \in N^n$ se nazývá *P-invariant* Petriho sítě, jestliže je řešením homogenní soustavy lineárních rovnic

$$C^T i_P = o$$

Petriho síť má konzervativní komponentu právě tehdy, existuje-li nenulový P-invariant.

Příklad 1: striktně konzervativní síť



$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

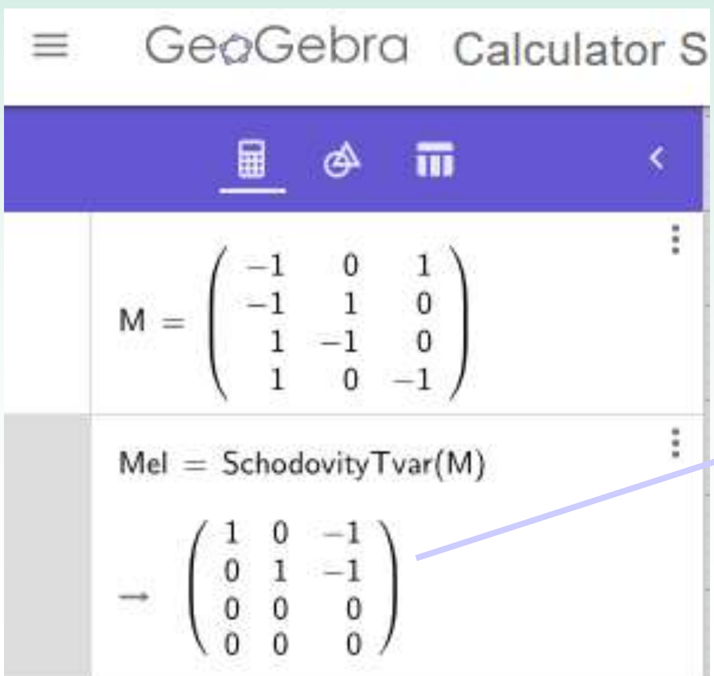
P-invarianty – výpočet v GeoGebře

Postup 1: pomocí software GeoGebra nebo Wolfram Alpha

$$C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T i_P = o$$

```
M = {{-1,0,1},{-1,1,0},
{1,-1,0},{1,0,-1}}
Mel = SchodovityTvar(M)
```



$$x_1 + 0x_2 - x_3 = 0$$

$$0x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$i_P = \{k \cdot (1,1,1); k \in N\}$$

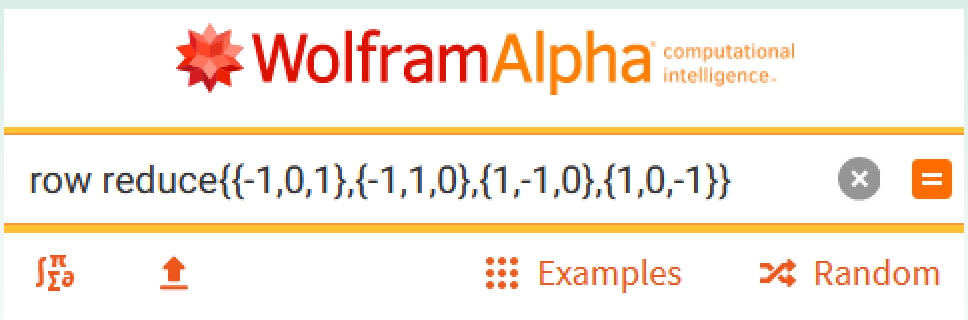
P-invarianty – výpočet ve WolframAlpha

Postup 1: pomocí software GeoGebra nebo Wolfram Alpha

$$C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T i_P = o$$

```
row reduce{{-1,0,1},{-1,1,0},
{1,-1,0},{1,0,-1}}
```



Result:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 0x_2 - x_3 = 0$$
$$0x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$i_P = \{k \cdot (1,1,1); k \in N\}$$

P-invarianty → síť zachovává počet žetonů

Postup 2: K řešení v tomto případě není nutné používat software, matice má jen 2 nezávislé sloupce.

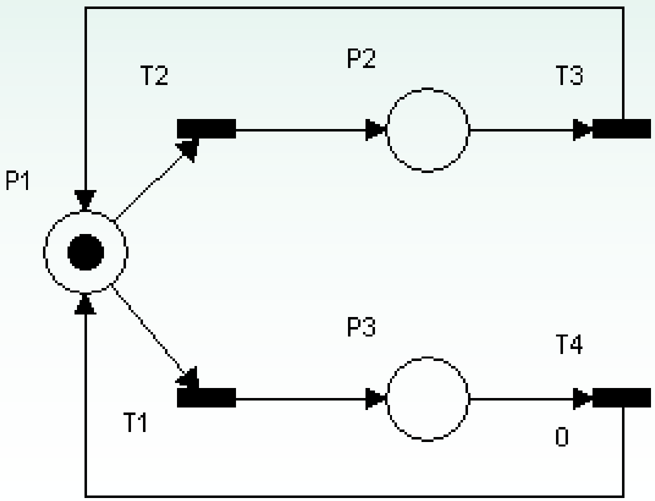
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T i_P = o$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = o$$

$$-x_1 + x_3 = o$$

$$-x_1 + x_2 = o$$



$$i_P = \left\{ k \cdot (1,1,1); k \in N \right\}$$

P-invariant striktně konzervativní sítě má všechny prvky stejné.

Příklad 2: P-invarianty konzervativní komponenty

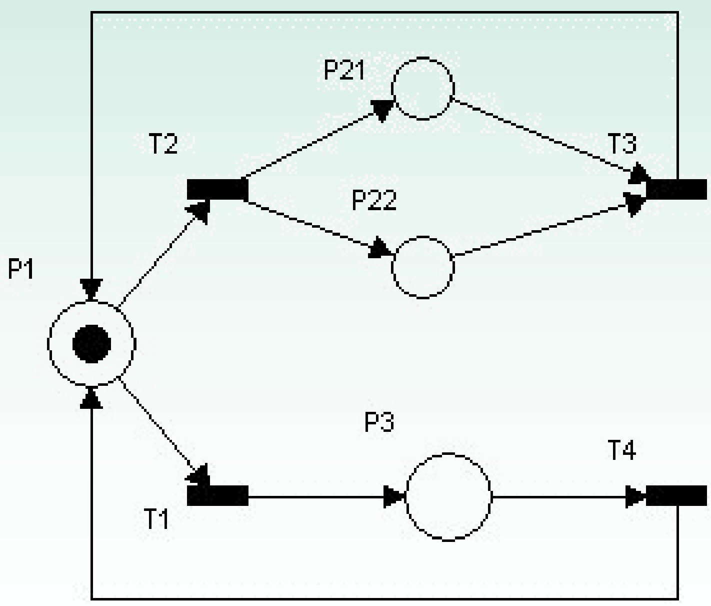
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

WolframAlpha computational intelligence.

rowreduce{{-1,0,0,1},{-1,1,1,0}}

Result:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$C^T i_P = o$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_4 = 0$$

$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - x_4 = 0, \text{ odtud}$$

$$x_1 = x_4; x_2 = x_4 - x_3$$

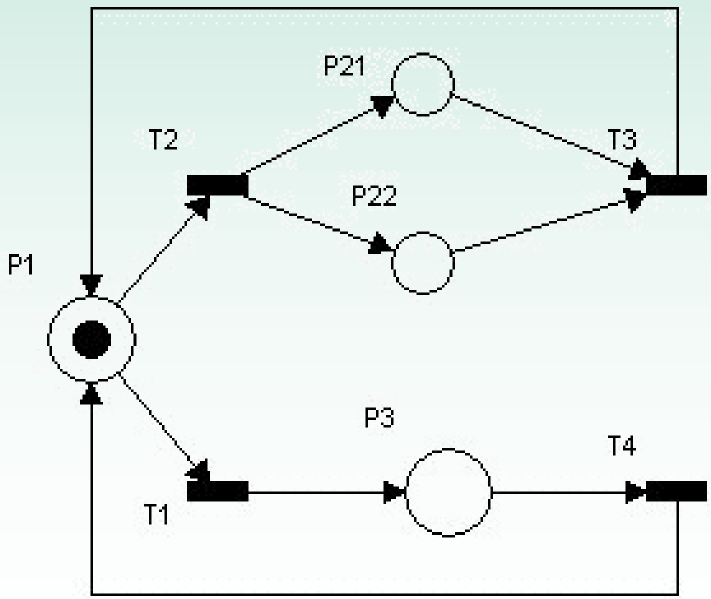
$$i_P = \{(u, u-v, v, u);\ u, v \in N, u > v\}$$

Příklad 2: P-invarianty konzervativní komponenty

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T i_P = o$$

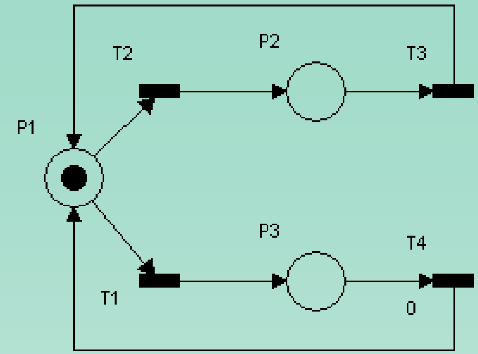
$$i_P = \{(u, u-v, v, u);\ u, v \in N, u > v\}$$



Výhodnější zápis získáme pomocí bázových vektorů prostoru řešení. Volíme-li např. u=1, v=0 dostáváme i_{P1}=(1,1,0,1), podobně volbou u=2, v=1 dostáváme i_{P2}=(2,1,1,2), což jsou nejmenší váhové vektory pro konzervativnost sítě.

$$i_P = \{k(1,1,0,1) + l(2,1,1,2); k, l \in N\}$$

T-invariant → cyklická síť



Petriho síť nazveme reverzibilní, pokud ke každému dosažitelnému značení existuje posloupnost odpálených přechodů, ve které je počáteční značení aktivní

Nechť C je matice incidence Petriho sítě. Nenulový vektor $i_T \in N^n$ se nazývá T-invariant Petriho sítě, jestliže je řešením homogenní soustavy lineárních rovnic

$$Ci_T = o$$

Pokud je Petriho síť je reverzibilní, pak má nenulový invariant. .

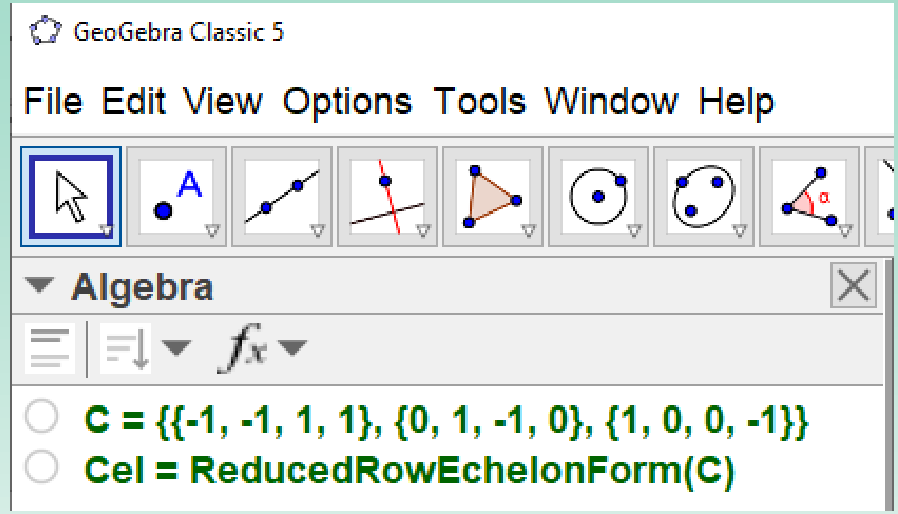
T-invariant je Parikův obraz posloupnosti, která přechody reprodukuje, tj. udává kolikrát je třeba provést každý přechod, abychom se vrátili k původnímu značení

T-invariant → cyklická síť

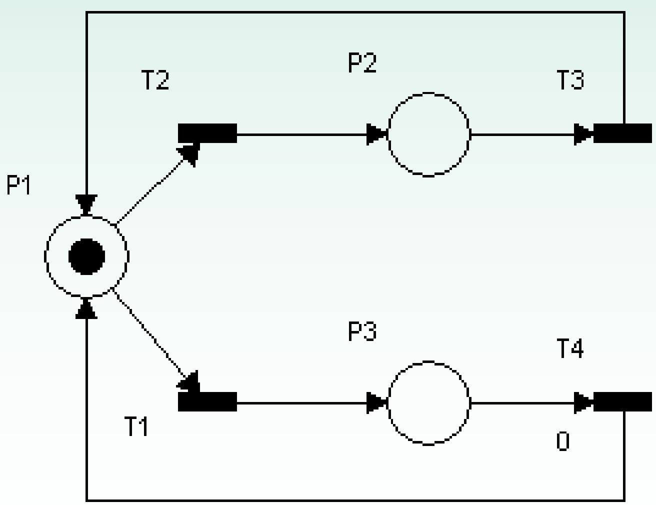
Příklad 1.

$$C i_T = o$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathrm{Cel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} i_T = \{(k, l, l, k)\}$$

$$i_T = \{k \cdot (1,0,0,1) + l \cdot (0,1,1,0); k, l \in N\}$$

T-invariant → cyklická síť

$$Ci_T = o$$

Příklad 2. Cyklická (reverzibilní) síť

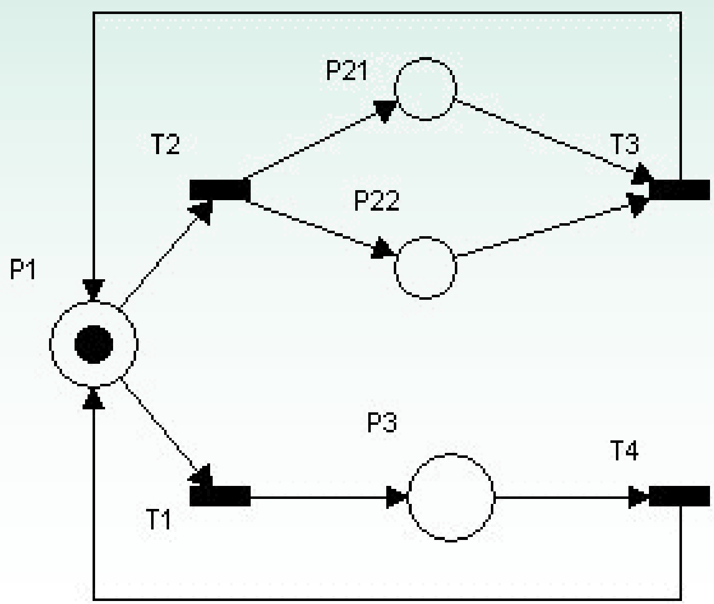
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Input interpretation:

row reduce $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Result: Step-by-step solution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

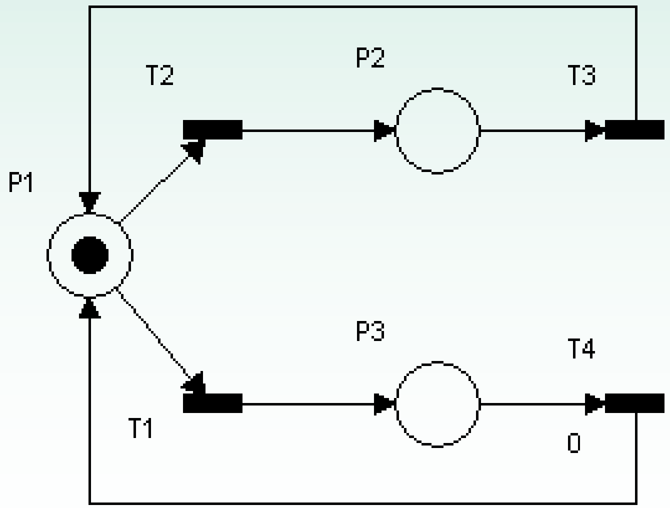


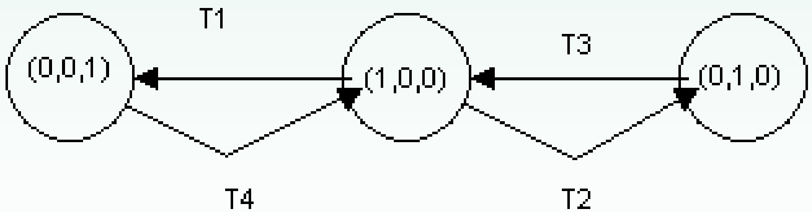
$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} i_T = \{(k, l, l, k)\}$$

$$i_T = \{k \cdot (1,0,0,1) + l \cdot (0,1,1,0); k, l \in N\}$$

Přechodová funkce

- Stavový prostor – množina dosažitelných značení
- Přechodová funkce
  - funkce definovaná na stavovém prostoru
  - určuje na základě přítomného stavu a aktivního přechodu příští stav sítě
  - zadána buď tabulkou, nebo orientovaným grafem.

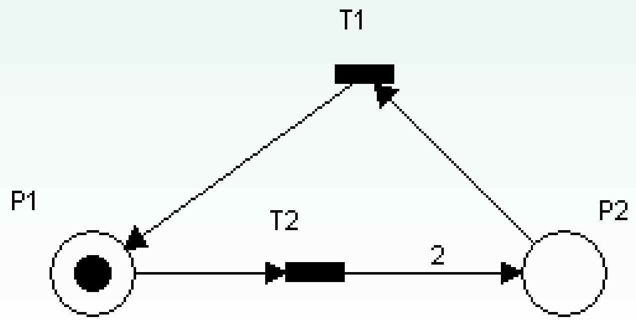


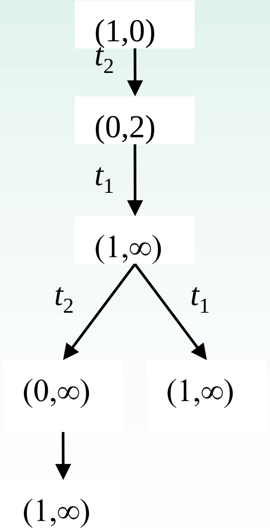


Stavový strom (graf pokrytí)

- Abstrakce přechodové funkce Petriho sítě.
- Orientovaný kořenový strom, jehož kořenem je počáteční značení .
- Jestliže v průběhu konstrukce stromu zjistíme, že jistá složka značení neomezeně roste, pak tuto složku označíme ∞ a nový vektor reprezentuje nekonečnou množinu značení, pro které tato složka nabývá libovolné nezáporné celočíselné hodnoty.

Neomezená Petriho síť

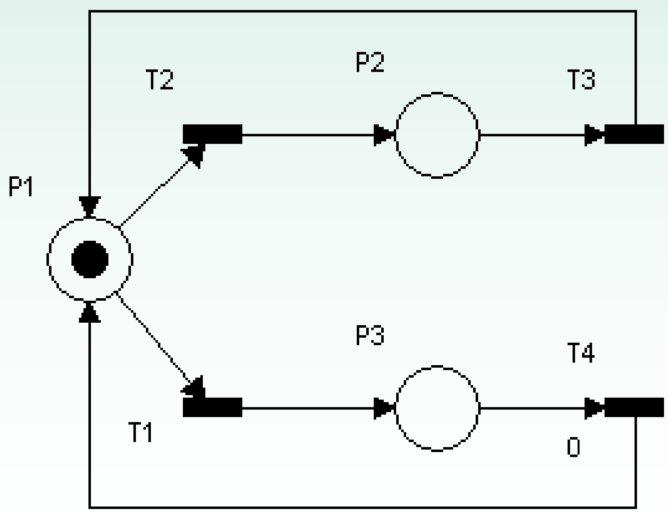




Pravděpodobnostní rozdělení stavů a(n)

- P/T Petriho síť je markovský proces s diskrétním časem.
- V každém kroku *n* se proces nachází v jednom ze spočetné množiny stavů. Budoucí stav je závislý jen na aktuálním stavu, ne na historii.
- Rozdělení pravděpodobnosti *a*(*n*) po *n* odpalech zapíšeme jako vektor. Počet složek je roven počtu stavů

$$a(n) = \begin{pmatrix} a_1(n) & a_2(n) & \dots & a_1(n) \end{pmatrix}; \sum_i a_i(n) = 1$$



$$a(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

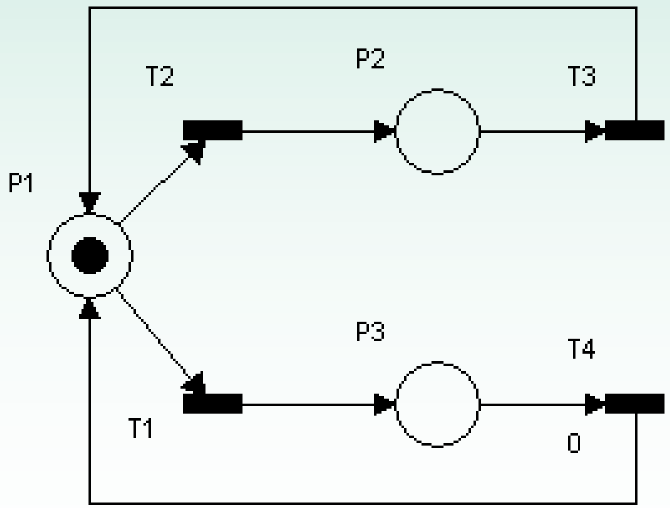
$$a(1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$a(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a(3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matice přechodu P

- Matice přechodu popisuje markovský proces s diskrétním časem
  - čtvercová matice *P*, prvek p_{ij} určuje pravděpodobnost, že přechodu ze stavu *i* do stavu *j*.
  - určuje na základě aktuálního stavu *a*(0) rozdělení pravděpodobnosti *a*(*n*) po *n* odpalech



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

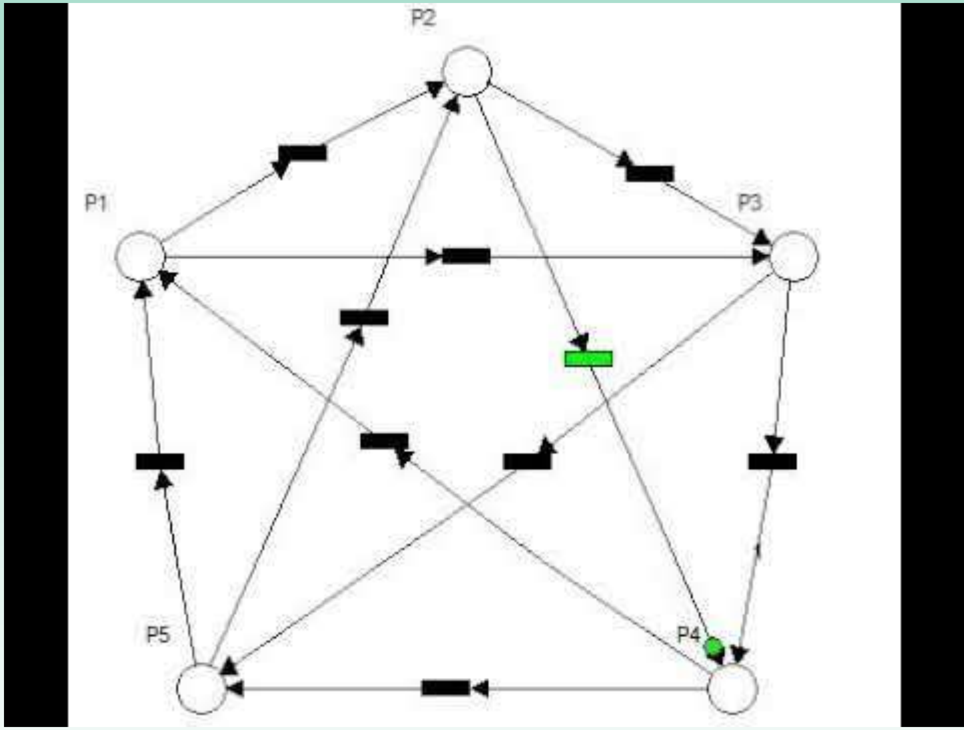
$$a(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a(1) = a(0) \cdot P$$

$$a(2) = a(1) \cdot P = a(0) \cdot P^2$$

Příklad: matice přechodu pravidelné Petriho sítě

- Prvky matice jsou tvořeny pravděpodobnostmi přechodu systému z jednoho stavu do druhého

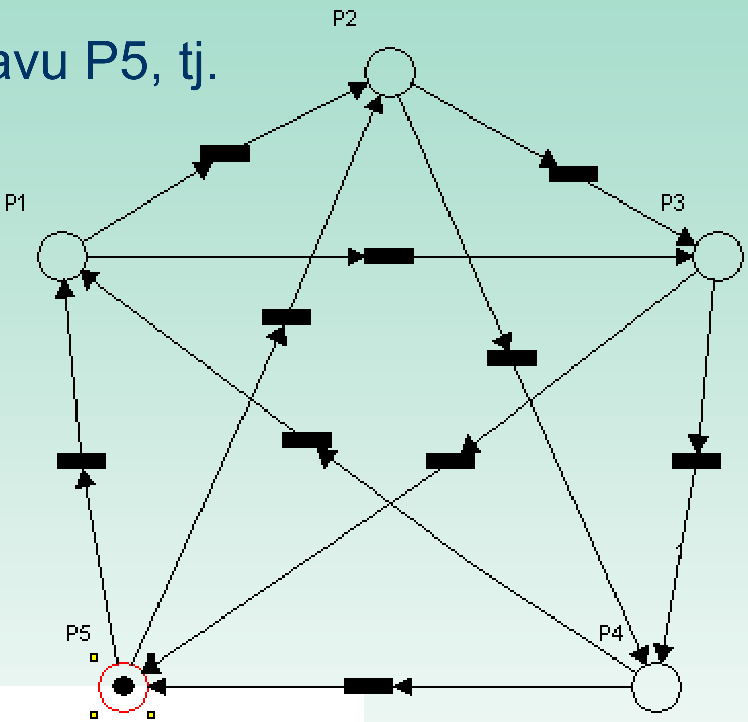


$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a(1) = a(0)P$$
$$a(2) = a(1)P$$
$$\vdots$$
$$a(n+1) = a(n)P$$

Příklad: pstní rozdělení a(n) pravidelné Petriho sítě

- Nechť na začátku je systém (žeton) ve stavu P5, tj.



$$a(0)=\left(0,0,0,0,1\right)$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a(1)=a(0)P$$

$$a(2)=a(1)P$$

$$\vdots$$

$$a(n+1)=a(n)P$$

a0 = (0 0 0 0 1)

a1 = (0.5 0.5 0 0 0)

a2 = (0 0.25 0.5 0.25 0)

a3 = (0.13 0 0.13 0.38 0.38)

a10 = (0.21 0.16 0.16 0.21 0.25)

a20 = (0.2 0.2 0.2 0.2 0.21)

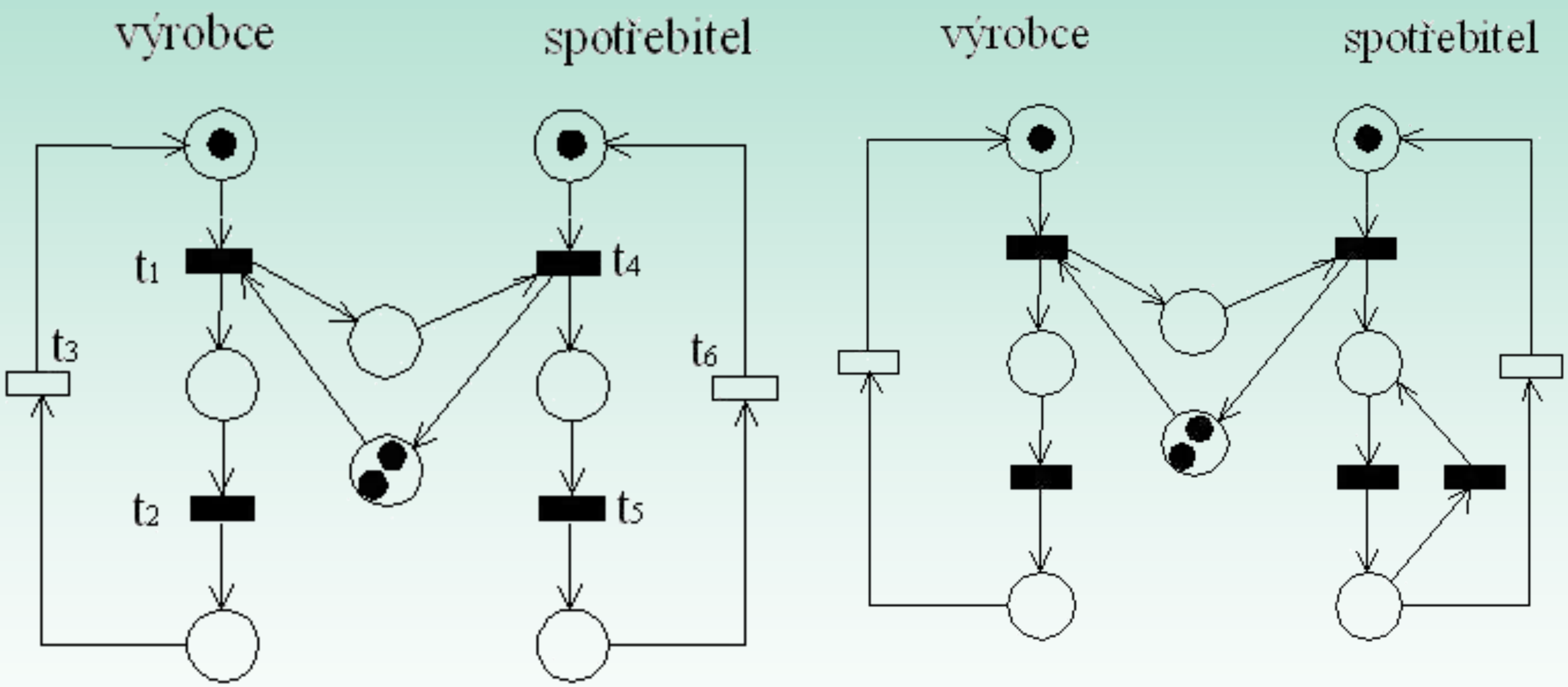
Stochastické časové Petriho sítě (Stochastic Petri Nets)

- Přechody ve SPN představují jednotlivé události(akce).

- typy přechodů:
  1. Okamžité
  2. se zpožděním (doba zpoždění je náhodná veličina)

- SPN = (P, T, I^-, I^+, G, z_0)
  P, T,, I^-, I^+, z_0…PT Petriho síť
  G   exponenciální funkce přiřazené přechodům

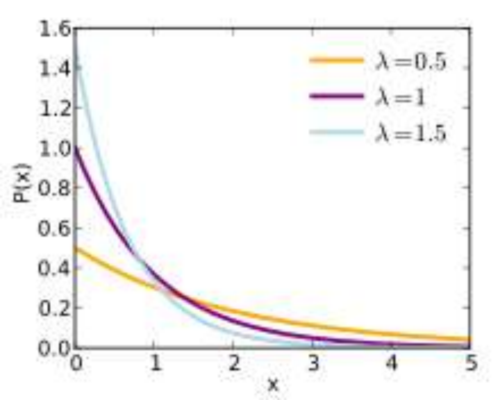
Časová past



SPN je markovská, mají-li všechny zpožděné přechody exponenciální rozdělení

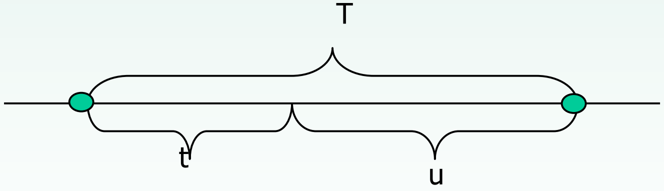
Pravděpodobnost, že za interval délky t nedojde k žádné události:

$$P(\tau > t) = e^{-\lambda t}$$



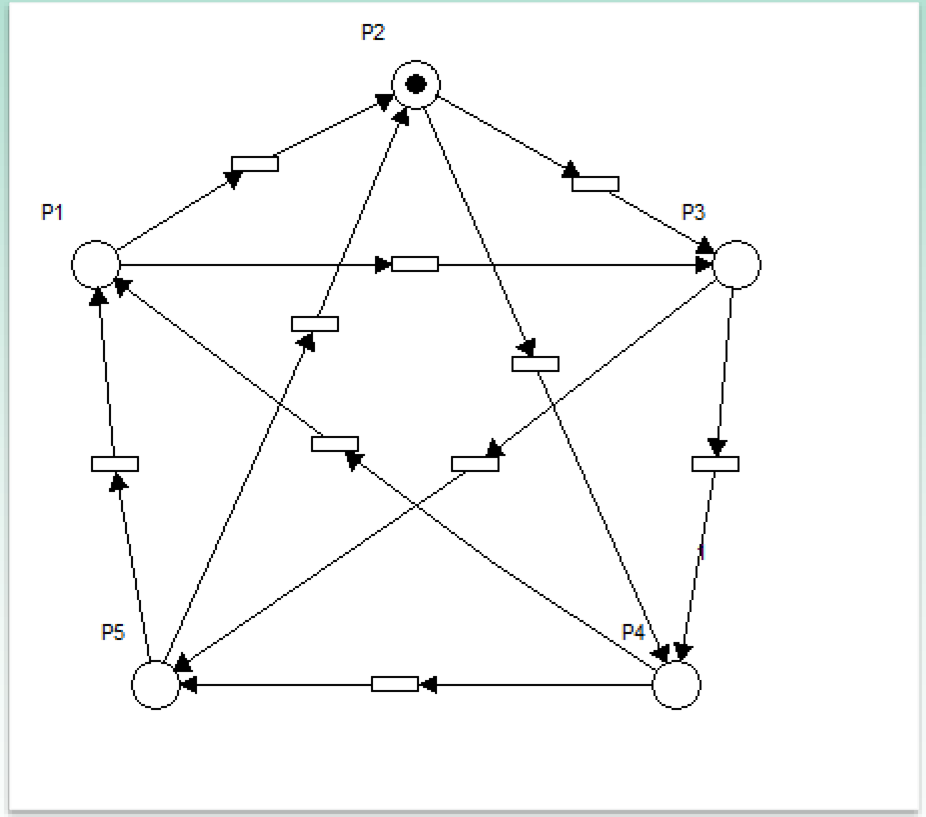
Intervaly mezi událostmi jsou vzájemně nezávislé veličiny s exponenciálním rozdělením

Př: Určete pst, že v elementárním toku nenastane v intervalu délky T žádná událost, víte-li že od vstupu předešlého požadavku už uplynul čas $t<T$.



$$P(\tau > t+u \,/\, \tau > t) = \frac{P(\tau > t+u)}{P(\tau > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda u} = P(\tau > u)$$

SPN jako Markovovský řetězec



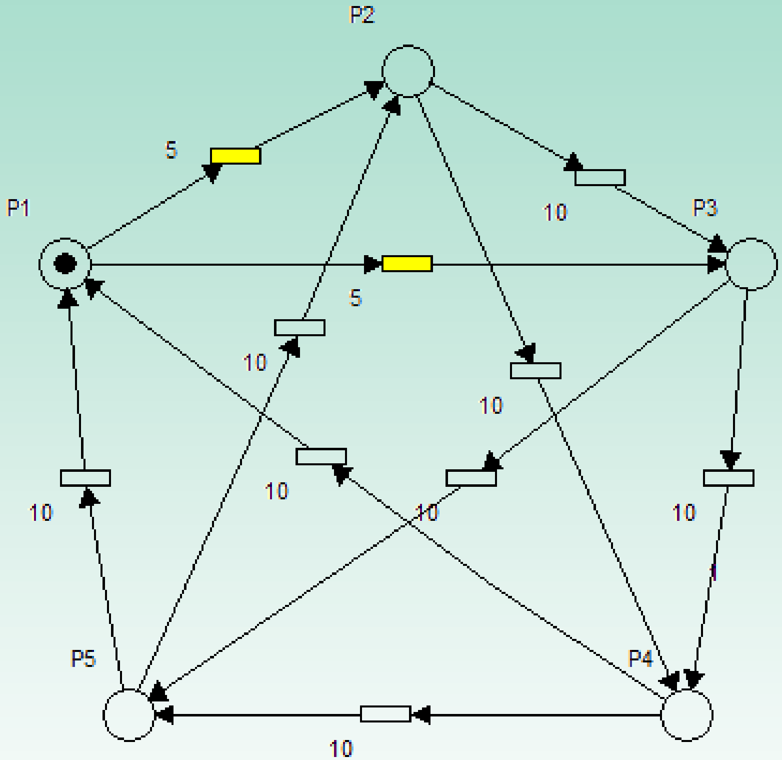
Jsou-li zpoždění všech přechodů exponenciální se stejnou intenzitou, bude ustálený stav

$$a=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$$

$$Q := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$0 = a \cdot Q$$

SPN jako Markovovský řetězec



$$Q = \begin{pmatrix} -24 & 12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

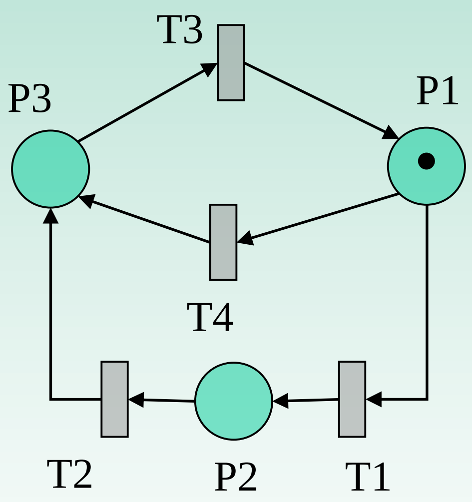
Jsou-li zpoždění všech přechodů exponenciální a intenzita výstupu ze stavu P1 je dvojnásobná, bude **ustálený stav *a***

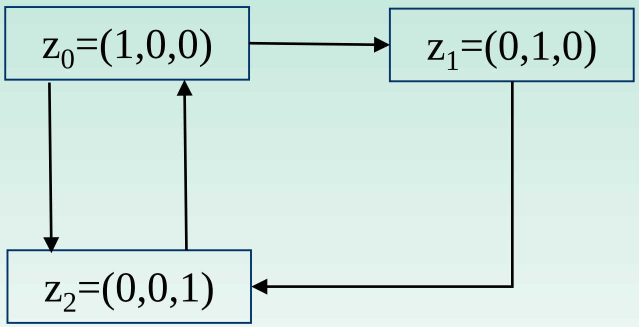
$$\boxed{0 = a \cdot Q}$$

$$a = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

Stavový graf

- Spojitý stochastický proces zdiskretizujeme – postupujeme v diskrétních krocích *dt*.
- Krok simulace *dt* zvolíme dostatečně malý (ms) tak, abychom mohli předpokládat, že za interval délky *dt* nastane nejvýš jedna událost.

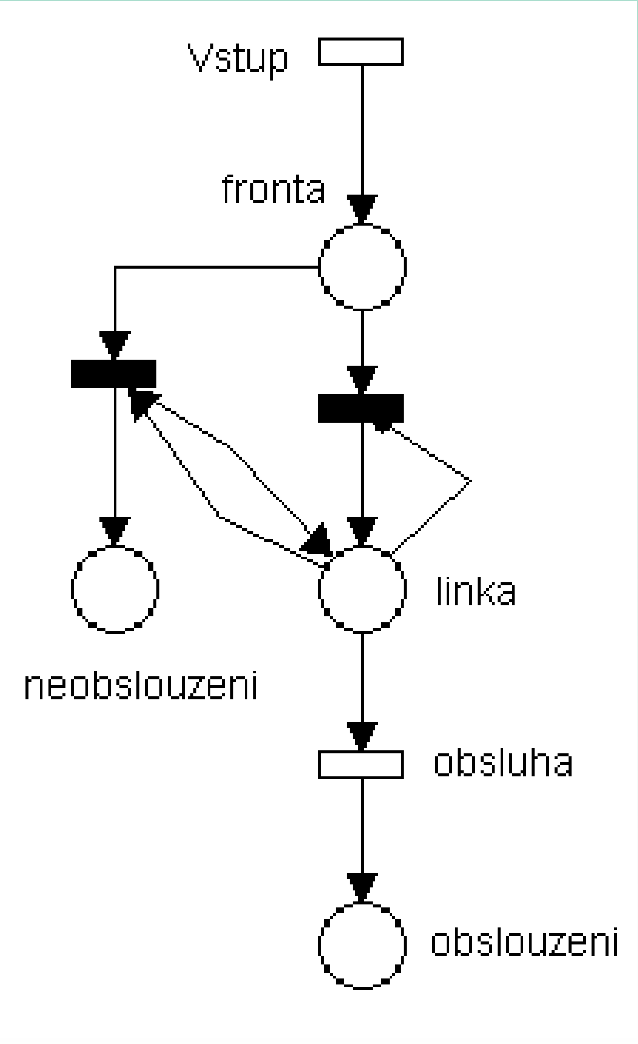




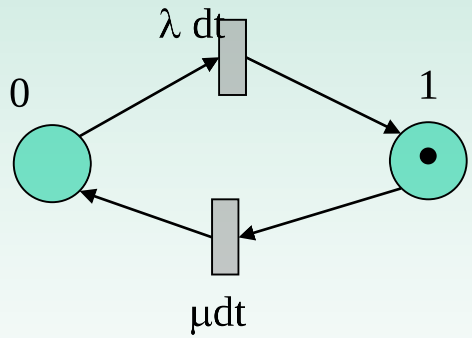
Ze stavu z_0 mohou po jednom kroku *dt* nastat 3 možnosti:

- z_1 (spuštěn přechod T1)
- z_2 (spuštěn přechod T4)
- z_0 (ani pro jeden z přechodů T1, T2)

Fronta se ztrátami M/M/1/0



Graf diferenciálních přechodů
– stav místa „linka“



Markovův řetězec stochastické Petriho sítě

- Nechť jsou všechny přechody dány s exponenciálním rozdělením zpoždění. Pak stavový prostor (množina všech možných ohodnocení) z_i tvoří Markovovský řetězec se spojitým časem- CTMC.
- Infinitezimální generátor *Q*: Intenzita výstupu q_{ij} ze stavu z_i do stavu z_j je součtem intenzit všech přechodů, jejichž odpálením přejde stav z_i do stavu z_j.

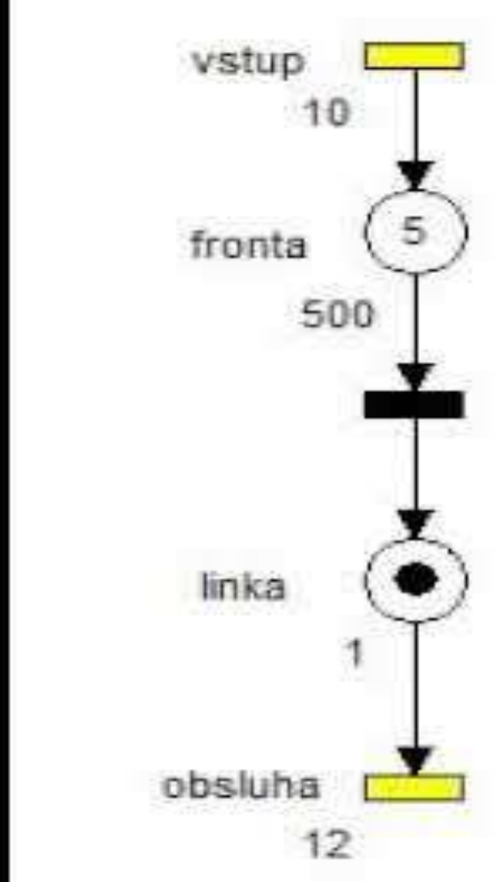
- Analýzou Markovova řetězce můžeme vypočítat charakteristiky systému popsaného SPN. - Nechť je π stabilizovaný stav, tj

$$\pi Q = 0; \sum_j \pi_j = 1$$

Pak pravděpodobnost, že ohodnocení míst SPN je z dané podmnožiny stavů B.

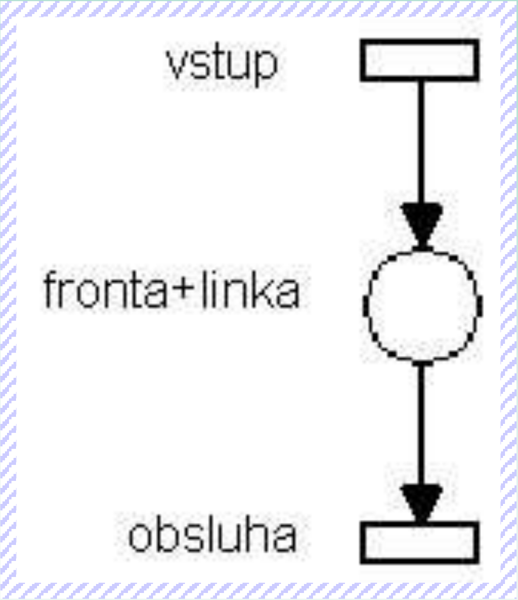
$$P[B] = \sum_{z^{(j)} \in B} \pi_j$$

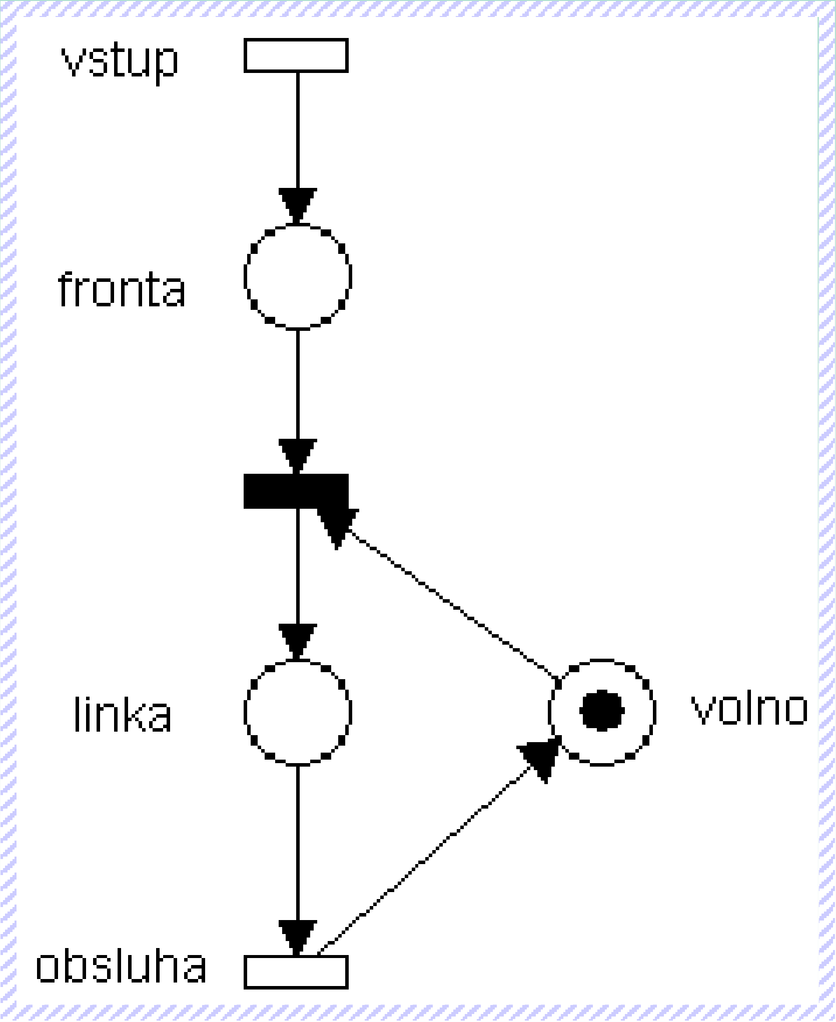
Modelování systému M/M/1/∞



https://youtu.be/r3OJLB3uv60

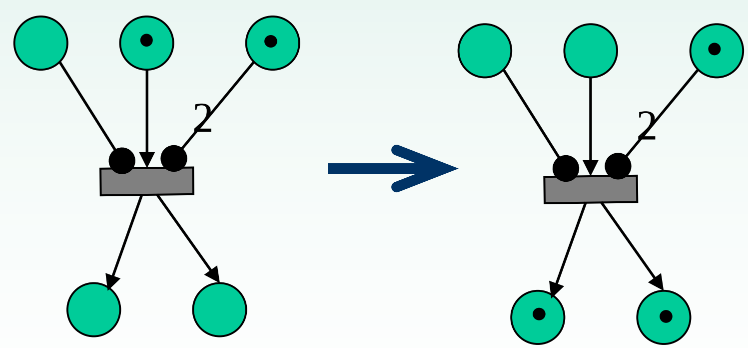
Modelování systému M/M/1/∞



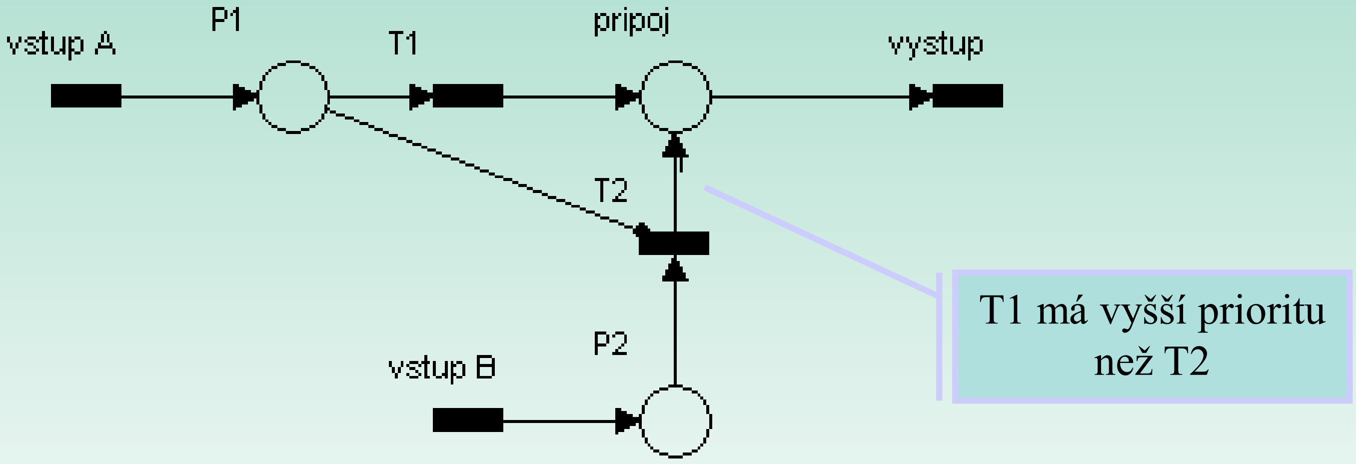


Inhibitory – negativní testovací hrany

- Rozlišujeme 3 typy hran : normální, inhibitory, tester
- Přechod spojený s místem inhibitorem je uskutečněn jen pokud je počet značek v místě **menší** než váha inhibitoru. Počet značek ve vstupním místě se nemění.
- PT (places-transitions) sítě s inhibitory jsou s teoretického hlediska schopny modelovat vše, co je možné vyjádřit algoritmem. Churgova – Turingova teze: ke každému algoritmu existuje ekvivalentní Turingův stroj

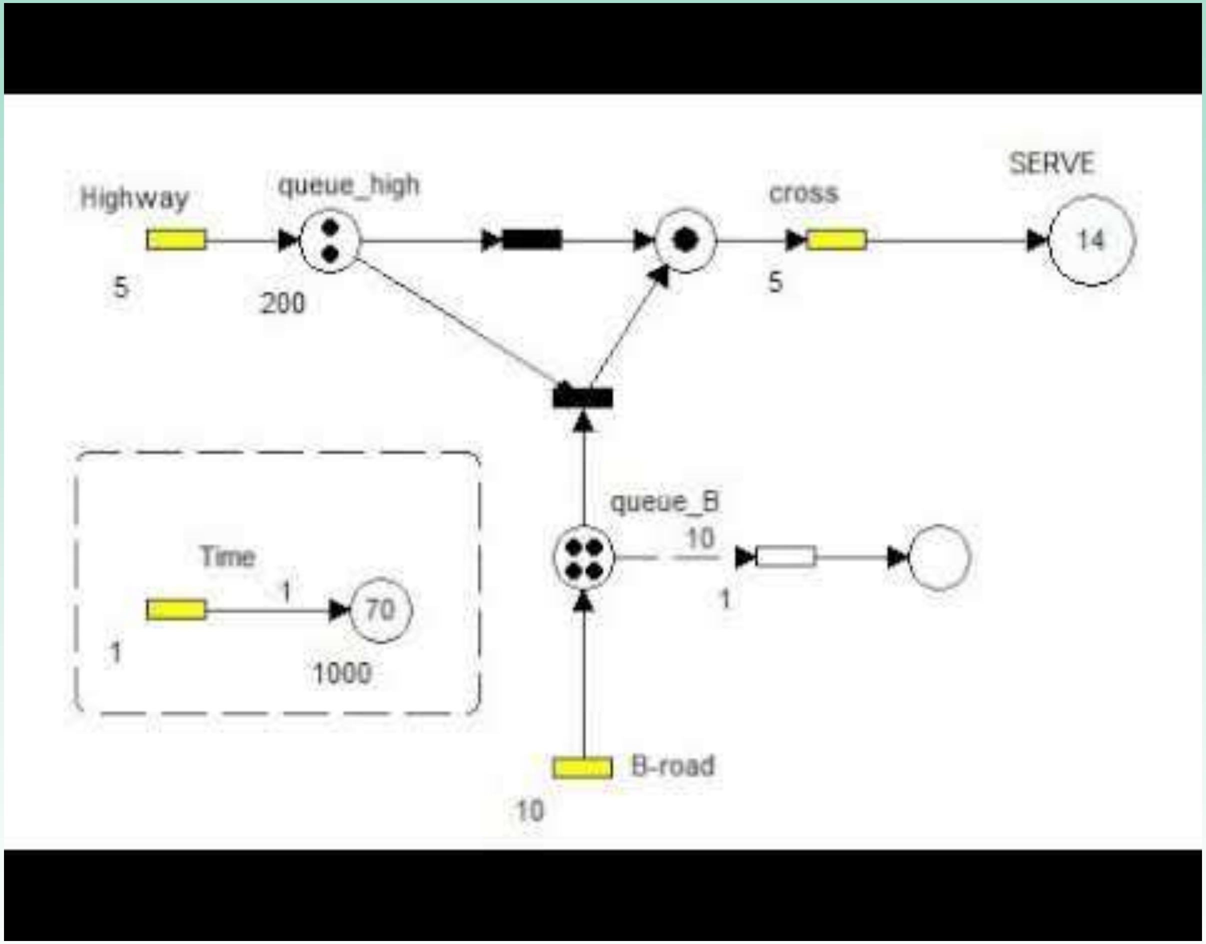


Inhibitory, Petriho sítě s prioritami



- Petriho sítě s inhibičními hranami mohou být převedeny na ekvivalentní sítě s prioritami.

Model připojovacího pruhu



- exponenciální zpoždění pro časové rozestupy vozidel i průjezd „cross“
  deterministické zpoždění přechodů pro odpočítávání času

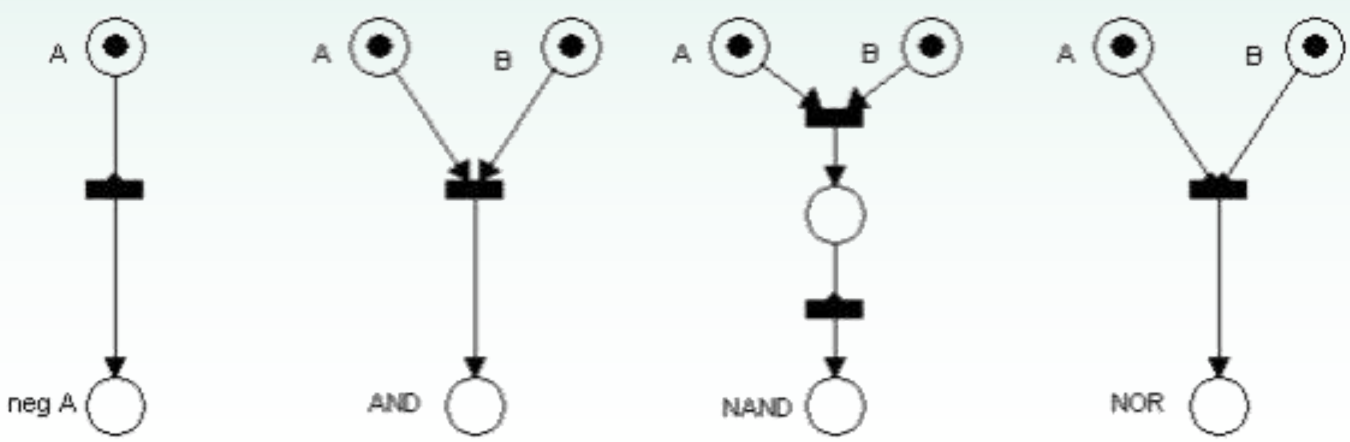
Díky inhibitorům mají Petriho sítě stejné možnosti jako Turingův stroj

Úplný systém logických funkcí

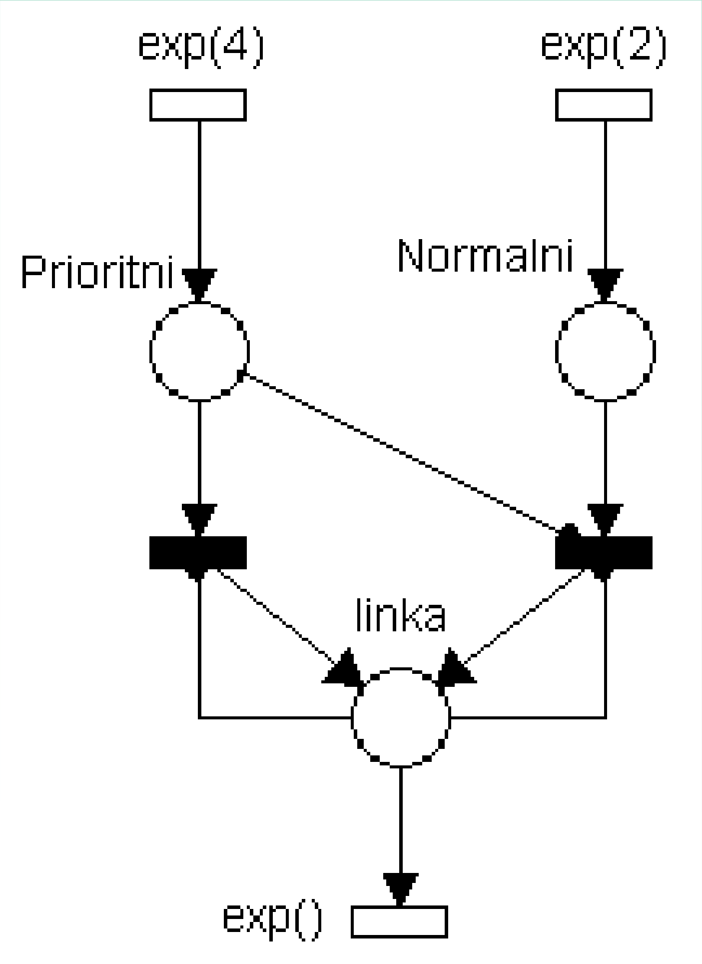
Např: {negA, AND, OR}, {NAND}, {NOR}

C. E. Shannon (1937) – Každý kombinační obvod lze popsat formulí Booleovy algebry

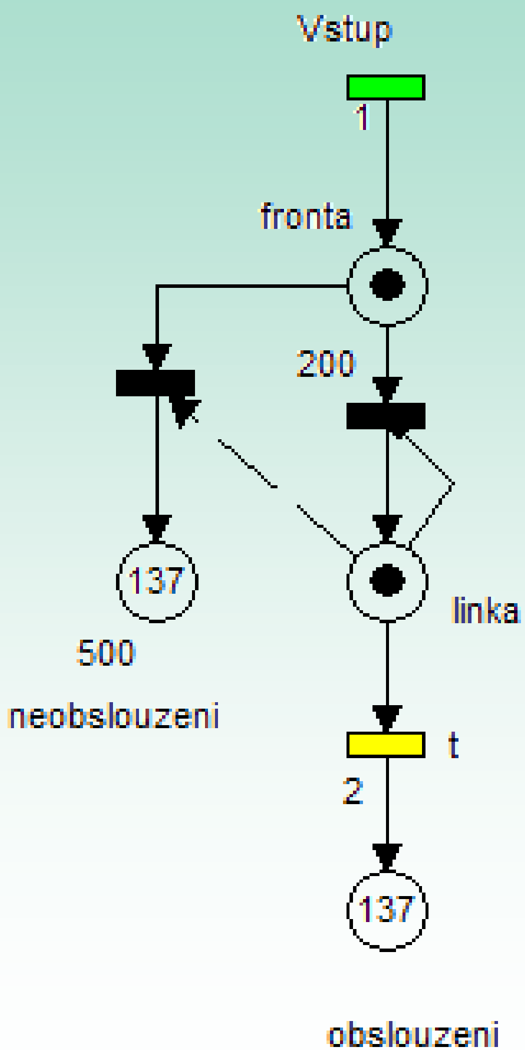
		neg.A	AND	OR	NAND	NOR
A	**B**	$\neg$**A**	**A$\wedge$B**	**A$\vee$B**	$\neg$**(A$\wedge$B)**	$\neg$**(A$\vee$B)**
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0



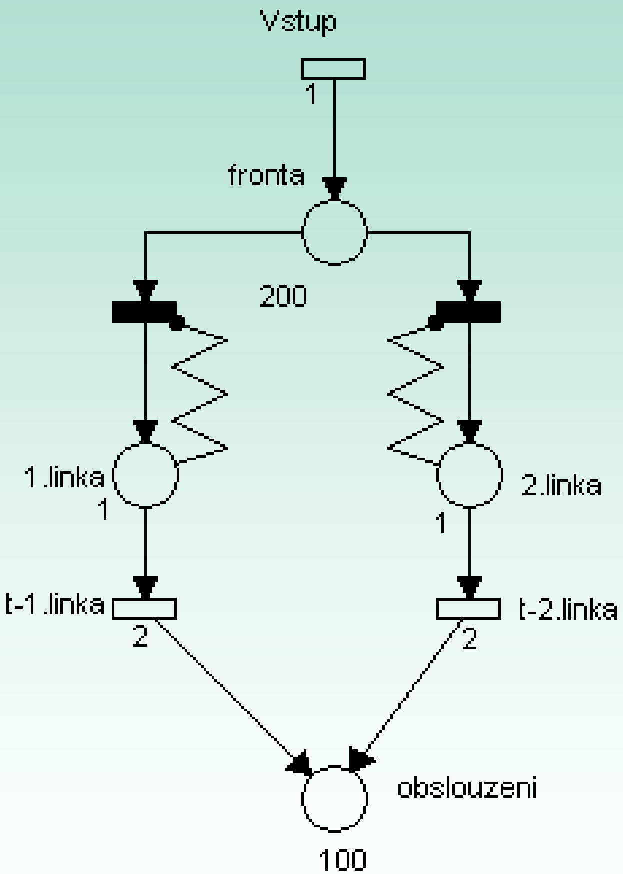
Systém s prioritami



Modelování fronty D/D/1/0

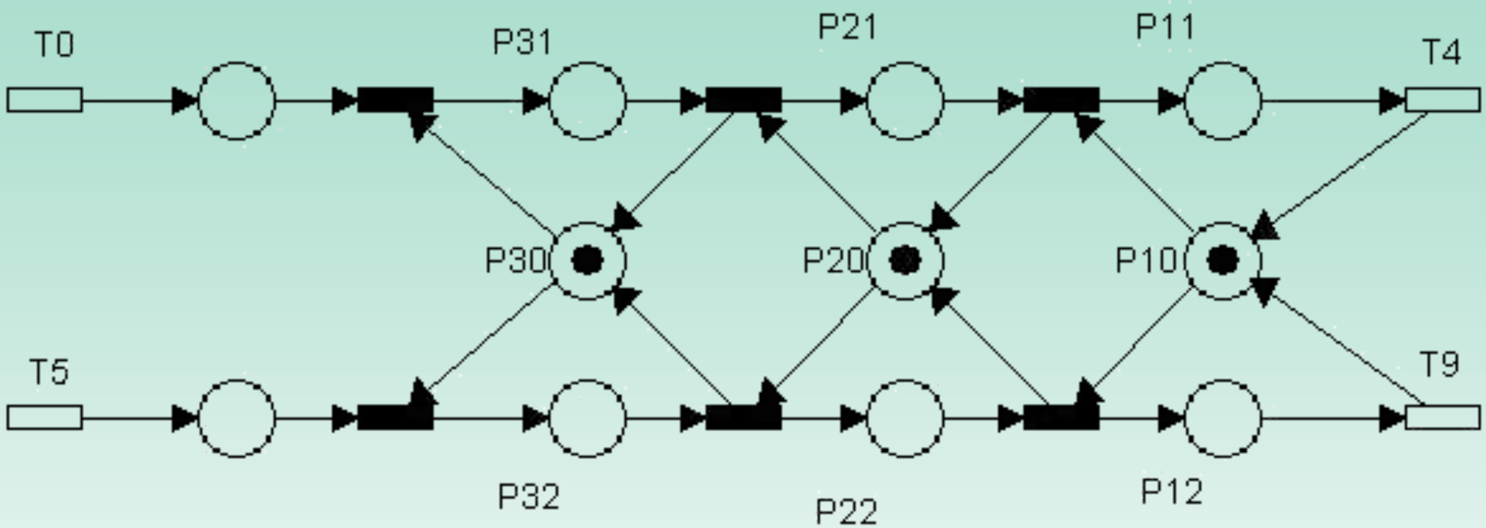


Systém M/M/2/r



Simulation Data generated by HPSim Mar-07-2004 16:58:18					
Count/ Step	Time/ ms	fronta	1.linka	2.linka	obslouzeni
1	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	1	1	1	0
5	1	2	1	0	1
6	1	2	0	1	2
7	1	1	1	1	2
8	2	1	1	1	2
9	2	2	1	0	3
10	2	1	1	1	3
11	3	1	1	1	3
12	3	2	1	0	4
13	3	1	0	1	5
14	3	0	1	1	5
15	4	0	1	1	5
16	4	1	0	1	6
17	4	1	1	1	6
18	4	2	1	1	6
19	4	3	1	1	6
20	4	4	1	1	6

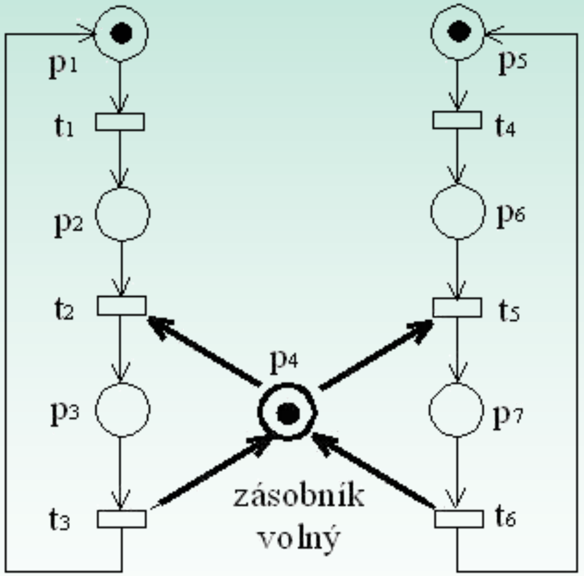
Simulace fronty, dva typy zákazníků

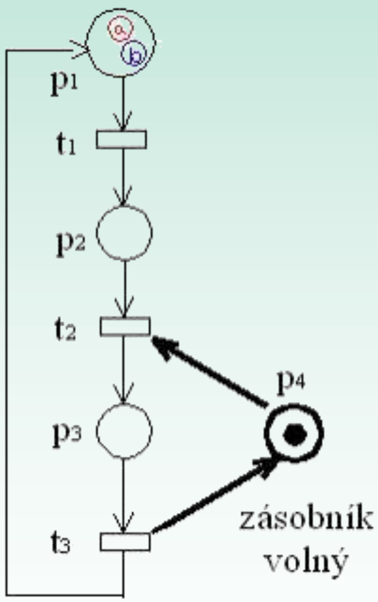


- Simulace systému M/M/1/3 FIFO, dva typy zákazníků s různou délkou obsluhy
  - *T0* … vstup zákazníků prvního typu,
  - *T5…*vstup druhého typu.
  - Zákazníci prvního typu se řadí do horní řady *P11, P21, P31*, zákazníci druhého typu se řadí do spodní řady *P12, P22, P32*.

Barevné Petriho sítě

- Rozlišujeme různé typy žetonů a různé módy odpalů přechodů





Frontové Petriho sítě

- Barevné GSPN se dvěma typy míst
  - Obyčejná místa
  - Frontová místa (fronta + zásobník obsloužených zákazníků).
- Zákazníci (žetony) z fronty nemohou být použity pro odpal následujících přechodů. Nejprve musí proběhnou obsluha podle předepsaného rozdělení délky obsluhy, žeton je přemístěn z frontové části do zásobníku a teprve žetony ze zásobníku mohou být použity pro odpal výstupních přechodů dle zpětných incidenčních funkcí