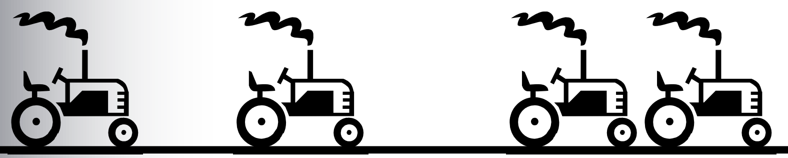
Vstupní tok požadavků

Bodový proces, základní typy procesů

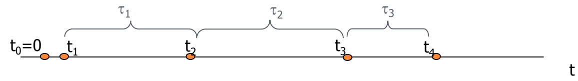


Bodový proces

- Sledujeme chod určitého procesu, v němž čas od času dochází k jisté význačné události $\Rightarrow$ posloupnost časových okamžiků

- proces
  - determinován (jízdním řádem, bezpečnostními zásahy)
  - stochastický (zajímají nás pravděpodobnosti, s nimiž čísla t_i, nebo některé jejich funkce vyhovují určitým vztahům)

Zápis procesu



- posloupnost časových okamžiků $t_1, t_2, \ldots, t_n$
- posloupnost intervalů $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$

$$\tau_k = t_{k+1} - t_k;\ k = 0,1,2,\ldots$$

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k;\ n = 1,2,\ldots$$

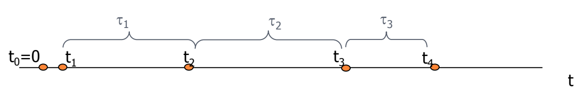
- registrujeme celkový počet událostí od $t_0=0$.
  $t \to N(t)$ ... počet událostí v průběhu časového intervalu <0,t>

$$N(t) = n \Leftrightarrow t_n \le t < t_{n+1}$$

- N(s,t) ... počet událostí během časového intervalu *<s,s+t>*

$$\forall s \ge 0, t \ge 0,\ N(s,t) = N(s+t) - N(s)$$
$$N(t) = N(0,t)$$

Pravděpodobnostní charakteristiky procesu



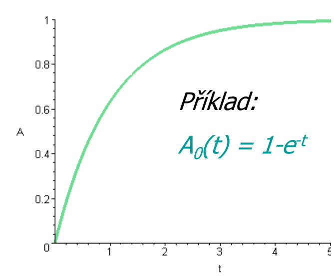
Proces je zapsán posloupností intervalů $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$

$$A_k(t) = P\{\tau_k \le t\},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Jestliže jsou $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ spojité náhodné veličiny, můžeme definovat hustotu pravděpodobnosti

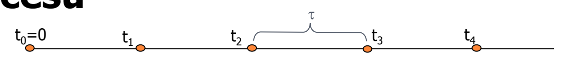
$$a_k(t) = A_k'(t)$$

$$A_k(t) = \int_0^t a_k(u)\,du$$



Základní třídy procesů

- **Regulární (pravidelný) tok**



- **Proces s nezávislými přírůstky**
  pro lib. k-tici vzájemně disjunktních intervalů $(s_1, s_1+t_1); (s_2, s_2+t_2); \dots ; (s_k, s_k+t_k); \dots$ je $\{N(s_1, s_1+t_1), N(s_2, s_2+t_2), \dots , N(s_k, s_k+t_k); \dots\}$ posloupnost nezávislých náhodných veličin.
- **Regenerativní proces (proces obnovy)**
  {τn} je posloupnost nezávislých náhodných veličin.
- **Rekurentní proces**
  $\{\tau_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením pravděpodobnosti.
- **Homogenní proces** – v čase neměnný proces
- **Ordinární proces** – nenastanou dvě události současně

• Vjezd vozidla do Smíchovského tunelu
• Objednávka zboží přes internet
• Narození dítěte
• Nástup zelené na SSZ
• Vznik dopravní nehody

Homogenní (stacionární) proces

Definice: Stochastický proces nazveme homogenním jestliže jsou pravděpodobnosti $v_n(s,t) = P(N(s,t) = n);\;\; n = 0,1,2\dots$

závislé pouze na délce intervalu t a ne na jeho počátku s.

$$v_n(s,t) = v_n(0,t) = v_n(t);\;\; \forall t \ge 0, s \ge 0, n = 0,1,2\dots$$

N(s,t) má pro libovolné *s* vždy stejný zákon rozložení jako *N(t)*.

$$E[N(t+u)] = E[N(t)] + E[N(u)] \Rightarrow E[N(t)] = t \cdot E[N(1)] = t \cdot \lambda$$

Definice:
λ ... Intenzita procesu (průměrný počet událostí za časovou jednotku)

$$E[N(1)] = \lambda$$

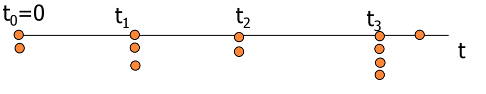
Př: Určete intenzitu regulárního (pravidelného) toku $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau$

Ordinární proces

- označme φ(t) pst, že za časový interval délky t nastanou nejméně dvě události. Pak vstupní tok je ordinární, je – li

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=0 \qquad \varphi(t)=1-v_0(t)-v_1(t)=\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)$$

Neordinární toky – neordinárnost odstraníme tím, že registrujeme dvojici [čas, počet]



- Ordinální proces s nezávislými přírůstky je regenerativní.
- Ordinární homogenní proces je regenerativní $\Leftrightarrow$ je rekurentní.

Poissonův proces
Proces ryzího zrodu (Pure birth process)

- Poissonovský tok - ordinární stacionární proces s nezávislými přírůstky
- Nejužívanější model vstupního toku
  - Počet úmrtí následkem kopnutí koně (statistika během 20 let, L. Bortkiewicz: The Law of Small Numbers)
  - Počet dětských sebevražd
  - Počet válek v letech 1820 - 1950
- Model Poissonova toku používáme prakticky vždy, když zákazníci (příchozí volání, datové pakety, automobily,…) pocházejí z velké množiny vzájemně nezávislých uživatelů
- Palm – Khinchinova věta:
  Složení velkého počtu procesů s malou intenzitou konverguje k Poissonově procesu

Věta o Poissonovském toku požadavků

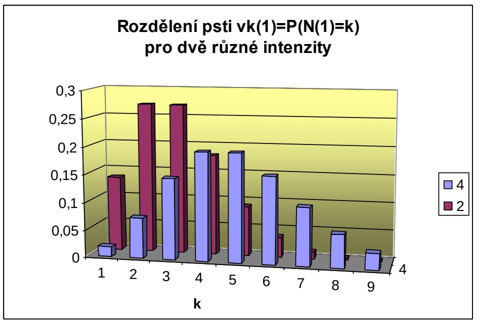
- Pro ordinární beznásledný homogenní vstupní tok událostí pravděpodobnost, že za časový interval délky *t* nastane právě *k* událostí, je

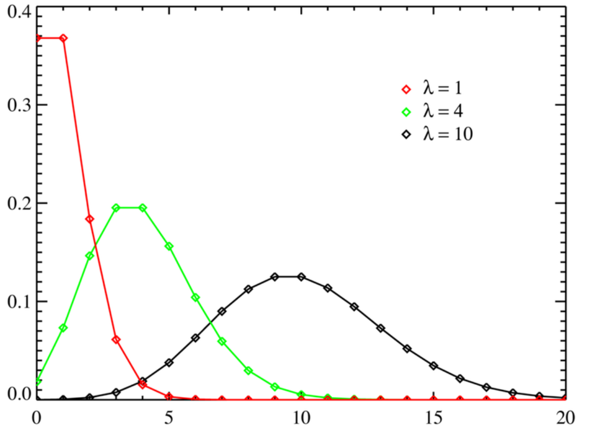
$$P(N(t)=k)=v_k(t)=v_k(s,t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow$ je to **Poissonův tok**

- Elementární tok je až na konstantu λ jednoznačně určen.

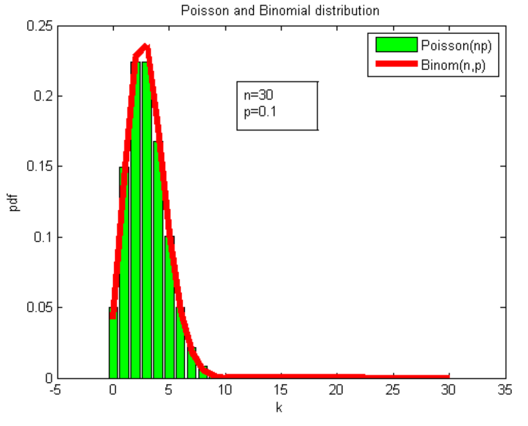
$$v_k(1)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$





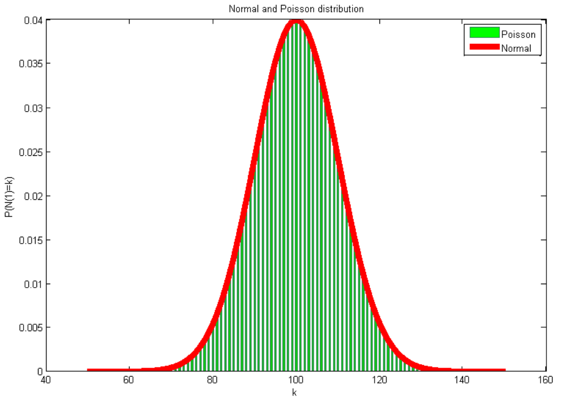
Binomické a Poissonovo rozdělení

Binomické rozdělení je pro dostatečně velké n (n>20) a malé p (p<0,05) bmožné nahradit Poissonovým rozdělením s intenzitou **n*p**



Binomické a Poissonovo rozdělení

Binomické rozdělení je pro dostatečně velké n (n>20) a malé p (p<0,05) bmožné nahradit Poissonovým rozdělením s intenzitou **n*p**



Normální a Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení je pro dostatečně velkou intenzitu (λ>1000) možné nahradit normálním rozdělením N(λ, $\sqrt{\lambda}$)

Poissonův tok

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

- Poissonův tok je **ordinární**

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - v_0(t) - v_1(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda t} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} + \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t}}{1} = 0$$

- Poissonův tok je tok s **nezávislými přírustky** (beznásledný)

$$v_0(t+u) = e^{-\lambda(t+u)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u} = v_0(t) \cdot v_0(u)$$
$$\mathrm{P}\left(N(t+u) = 0\right) = \mathrm{P}\left(N(t) = 0\right) \cdot \mathrm{P}\left(N(u) = 0\right)$$

- **Intenzita** Posissonova toku $E\left[N(1)\right] = \lambda$

$$E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

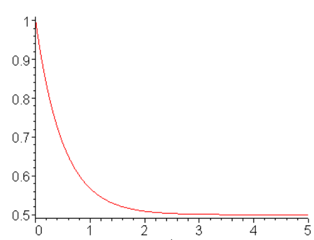
Poissonův tok

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Pravděpodobnost, že za interval délky t nedojde k žádné události:

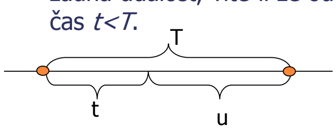
- $v_0(0)=1$
- klesající funkce proměnné t.
- $v_0(t+h)= v_0(t). v_0(h)$

$$\left.\right\} \quad v_0(t) = e^{-\lambda t}$$



Intervaly mezi událostmi jsou vzájemně nezávislé veličiny s exponenciálním rozdělením $P(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Př: Určete pst, že v elementárním toku nenastane v intervalu délky T žádná událost, víte-li že od vstupu předešlého požadavku už uplynul čas $t<T$.



$$\mathrm{P}(\tau > t+u / \tau > t) = \frac{\mathrm{P}(\tau > t+u)}{\mathrm{P}(\tau > t)} =$$

$$= \frac{v_0(t+u)}{v_0(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+u)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda u} = \mathrm{P}(\tau > u)$$

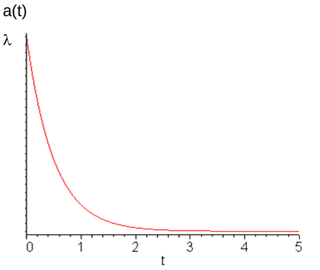
Poissonův tok - rozložení doby mezi událostmi

- Veličiny τ_k jsou navzájem nezávislé, mají stejnou distribuční funkci $A_k(t) = A(t)$

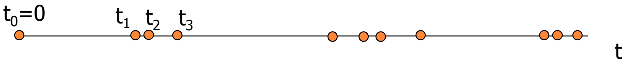
$$A(t) = P(\tau < t) = 1 - v_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E[\tau] = \frac{1}{\lambda}; \quad D[\tau] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{a(t) = A'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}}$$



- V elementárním toku se nejčastěji vyskytují krátké intervaly mezi událostmi ⇒vstupují v sériích krátkých sledů



Stopařův paradox

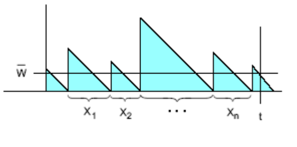
1. Tramvaje jezdí pravidelně každých 5 minut. Na zastávku přijdeme náhodně. Průměrná doba čekání: 2,5 min

$$f(x) = \frac{1}{5}; \quad 0 \le x \le 5 \qquad E[X] = \frac{5}{2};$$

2. Stopař přijde náhodně k silnici, auta projíždějí náhodně, délka intervalu mezi automobily má exponenciální rozdělení

$$f(x) = 12e^{-12x}; \quad 0 \le x \quad E[X] = \frac{1}{12};$$

Průměrná délka intervalu mezi automobily : 5 min
Průměrná doba čekání: 5 min



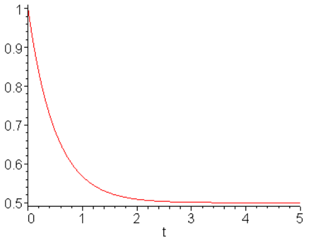
Poissonovský tok – graf diferenciálních přechodů

- Symbol *o* používáme při vyšetřování limitního chování funkcí, umožňuje zjednodušený zápis

$$f(x) = o(g(x))\ pro\ x \to \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(t) = o(t)\ pro\ t \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = 1 - \lambda t + o(t)$$



Poissonův proces – proces ryzího zrodu (pure birth process)

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

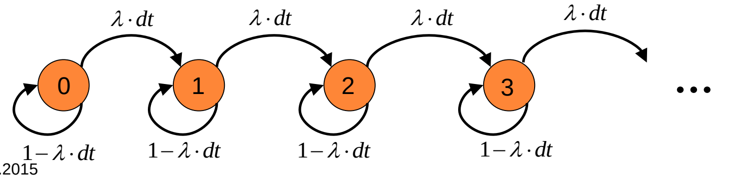
- V infinitesimálním časovém intervalu *dt* může nastat jen jedna událost s pravděpodobností λdt, nezávisle na příjezdech mimo interval.

$$v_0(t) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = 1 - \lambda t + o(t)$$

$$v_1(t) = (\lambda t) \cdot e^{-\lambda t} = \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = \lambda t + o(t)$$

$$v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda t} = 0 + o(t)$$

- Stav systému =počet událostí, které od počátečního času zkoumání nastaly

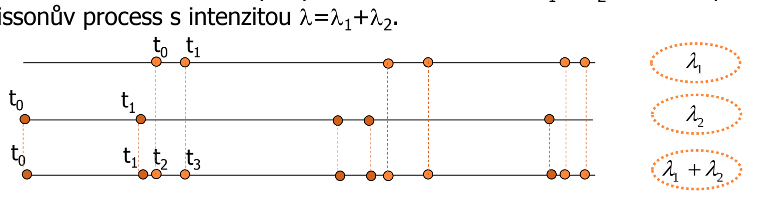


Diskretizace Poissonova procesu – Bernoulliho proces

```
lambda = 1/2; % inter-arrival time = 1/lambda [s]
T=60*60;      % observational time [s]
k=0;          % number of events
for dt=0:0.1:T
    if rand < lambda*0.1
        k=k+1;
    end
end
fprintf('Theoretical mean of events %6.2f \n',lambda*T)
fprintf('Empirical number of events %d \n',k)
```


Vlastnosti Poissonovského procesu

- Mějme pevně dán interval <0, *t* >, počet příjezdů za čas t $N(t)=n$. Pak časy příchodů $t_{i1}, t_{i2},\dots,t_{in}$ jsou nezávislé a rovnoměrně rozdělené na intervalu <0, t>.
- **Superpozice**
  Složením dvou Poissonovských procesů o intenzitách λ_1 a λ_2 vznikne opět Poissonův process s intenzitou $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.



- **Náhodný výběr**
  Vybíráme-li s pstí p z daného Poissonovského procesu s intenzitou λ, pak výsledný proces je Poisonovský s intenzitou $p\lambda$.