Kendallova klasifikace

Délka obsluhy, frontový režim, Littleovy vzorce

Parametry obsluhy

- **Trvání obsluhy**
  - většinou předpokládáme, že trvání obsluhy jsou **nezávislé** náhodné proměnné, se stejným rozdělením
- **Kapacita obsluhy**
  - maximální počet požadavků, které se mohou v systému vyskytovat současně (počet linek)
- **Dostupnost**
  omezení, která zmenšují počet požadavků, které mohou být obsluhovány v porovnání s plnou kapacitou obsluhy
  - plně dostupné systémy
  - neúplně dostupné systémy – je třeba udat frekvenci a trvání dob vyřazení linek z obsluhy dostupné systémy
- **Režim obsluhy**
  -řád obsazování linek obsluhy

Typy rozdělení pro délku obsluhy

1. **Konstantní**
2. **Exponenciální trvání obsluhy**

$f(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}, \quad t \geq 0$

$D[T] = \frac{1}{\mu^2}$ $E[T] = \frac{1}{\mu}$

$$P(t \geq t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \mu \cdot e^{-\mu \cdot t} dt = e^{-\mu \cdot t_0}$$

Jaká je pravděpodobnost, že v krátkém časovém okamžiku Δt dojde k ukončení obsluhy požadavku, jestliže obsluha už probíhá dobu t?

Odpověď:
Pst. ukončení obsluhy v průběhu krátkého časového intervalu je konstantní a nezávisí na tom, jak dlouho již probíhala.

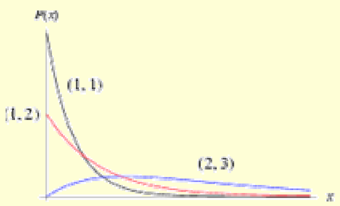
3. **Gama rozdělení**

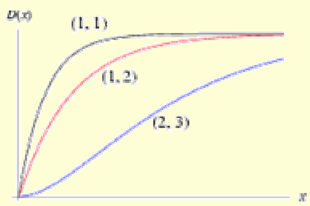
$$f(t) = \frac{b^a t^{a-1}}{\Gamma(a)} \cdot e^{-b \cdot t}$$

kde Γ(a) je Eulerova gama funkce, *a*,*b* jsou parametry .

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

$E[T] = \frac{a}{b}$ $D[T] = \frac{a}{b^2}$





- Speciální typy Gama rozdělení:

d pro $a \in N$ platí $\Gamma(a) = (a-1)!$ K Erlangovo rozdělění $f(t) = \frac{b^a t^{a-1}}{(a-1)!} \cdot e^{-b \cdot t}$

d pro $a \to \infty$ K konstantní doba obsluhy

d pro $a = \frac{n}{2}, b = \frac{1}{2}$, kde $n \in N$ K χ^2 rozdělení

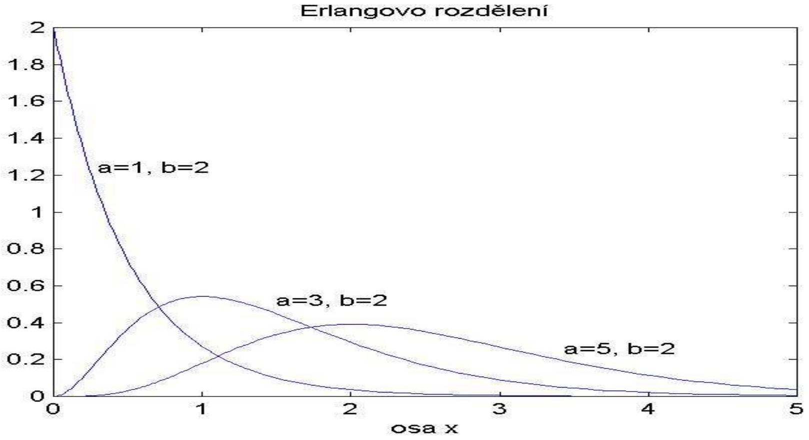
Erlangovo rozdělení

součet intervalů mezi příchody k událostí poissonova toku

$$f(t)=\frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\mu\cdot t}$$

$$X: \ Erlang(k,\mu)$$

$$P(X<t)=\int_0^t f(u)du=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!}e^{-\mu t}$$



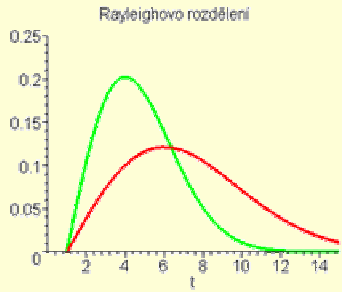
5. **Rayleighovo rozdělení trvání obsluhy**

   Doba obsluhy těch dopravních zařízení, u nichž vzhledem k vazbě na dráhu a rychlost obsluhy musí objektivně existovat minimální kladná hodnota náhodné proměnné

$$f(t)=\frac{t-a}{c^2}\cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\cdot c^2}}, \ t>a$$

   parametr a>0 je vzdálenost minimální hodnoty náhodné proměnné

$$E[T]=a+c\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D[T]=c^2(2-\frac{\pi}{2})$$



6. **Konstantní doba obsluhy se zpožděním**

   Hodnota doby obsluhy nemůže z praktických důvodů klesnout pod určitou hodnotu.

   T=C+Z

Frontový režim

- FIFO (Firs In – Firs Out)
- (P-FIFO)
- LIFO (Last In – Firs Out)
- SIRO (RS) (Random Selection)
- SJF (Shortest Job First)
- Systém se ztrátami, fronta s rezignací

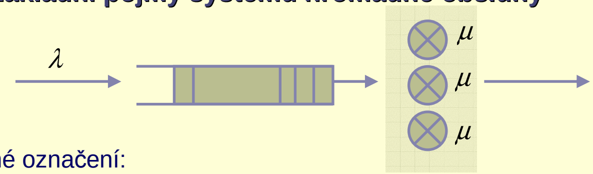
Kendallova klasifikace

X / Y / n / r

X	Typ stochastického procesu popisujícího příchod zákazníků k obsluze
Y	Zákon rozložení délky obsluhy
n	počet linek (kapacita obsluhy)
r	počet míst ve frontě

	Vstupní tok požadavků	Hustota rozdělení délky obsluhy
M	Poissonův proces příchodů, tj. exponenciální rozložení intervalů mezi příchody	Exponenciální rozložení doby obsluhy
E_k	Erlangovo rozložení intervalů mezi příchody (s parametry λ a k)	Erlangovo rozložení doby obsluhy (s parametry μ a k)
K_n	rozložení χ^2_n intervalů mezi příchody (n stupňů volnosti)	rozložení χ^2_n doby obsluhy
D	pravidelné deterministické příchody	konstantní doba obsluhy
G	obecné rozložení (žádné předpoklady o procesu příchodů)	obecné, tj. jakékoliv rozložení doby obsluhy
GI	rekurentní proces příchodů	

Základní pojmy systému hromadné obsluhy



- Používané označení:

λ	… intenzita vstupního toku
μ	… intenzita obsluhy
X	… počet zákazníků v systému
$p_i(t)$	… pst, že v čase t je v systému (fronta + obsluha) i zákazníků
p_i	… pst , že v systému je i zákazníků - stacionární stav
F	… délka fronty
S	… počet obsazených linek
W_F	… doba čekání náhodného požadavku ve frontě
W_X	… doba strávená náhodným požadavkem v systému

$$W_X = W_F + \frac{1}{\mu}$$

- Jaká bude kvalita (rychlost) obsluhy měřená délkou čekání na obsluhu, případně časem stráveným v systému, případně kolik požadavků bude obsloužených?
- Základní charakteristikou systému je **intenzita provozu** $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Deterministický model D/D/1

- **Intenzita obsluhy = intenzita vstupu** $\rho = 1$

  Ideální případ – neexistují čekající požadavky (pro počáteční stav bez zákazníka) a kanál je nepřetržitě využíván.

- $W_i = 0, E[W] = 0, p_1 = 1, E[F] = 0, E[S] = 1, E[X] = 1,$ využití linky 100%

Deterministický model D/D/1

- **Intenzita obsluhy > intenzita vstupu** $\rho < 1$

  Bez čekání – každý nově příchozí požadavek bude obsloužen bez čekání, obslužný kanál bude po jistou dobu nevyužitý.

  $$W_i = 0, E[W] = 0, p_1 = \rho, p_0 = 1 - \rho, E[F] = 0, E[S] = \rho, E[X] = \rho,$$

  využití linky $100 \cdot \rho\%$

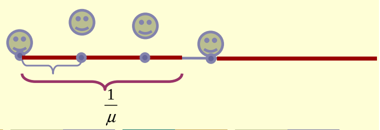
- **Intenzita obsluhy < intenzita vstupu** $\rho > 1$

  nestabilní – v systému bez omezení se postupně začínají hromadit požadavky čekající na obsluhu, i když kanál pracuje nepřetržitě

  $$W_i \to \infty, E[W] \to \infty, E[F] \to \infty, E[S] = 1$$

  - Systém se ztrátami
    v případě obsazeného obslužného kanálu opouští nově příchozí požadavek systém bez obsloužení
    Pst. obsloužení požadavku

    $$q_0 = \frac{1}{[\rho]+1}$$



Markovovský model

- Vstupní tok je homogenní ordinární proces s nezávislými přírustky – Poissonovský proces s parametrem λ.
- Doba obsluhy má exponenciální rozdělení s intenzitou obsluhy μ
- Jaká bude kvalita (rychlost) obsluhy měřená délkou čekání na obsluhu, případně časem stráveným v systému, příp. kolik požadavků bude neobsloužených?

Základní sledované ukazatele efektivnosti systému hromadné obsluhy pro ustálený režim (stabilizovaný stav)

- Využití kanálů obsluhy
  - Střední hodnota počtu volných kanálů
  - Střední hodnota počtu obsazených kanálů
- Kvalita obsluhy
  - pravděpodobnost odmítnutí
  - E[S], E[F], E[W], …

Littleho vztahy

- Základní vztahy popisující vztah mezi vstupním tokem, střední hodnotou počtu požadavků ve frontě a střední dobou strávenou požadavkem ve frontě

$$E[F] = \lambda \cdot E[W]$$

  - λ Intenzita vstupního toku
  - E[F] Střední počet požadavků ve frontě
  - E[W] Střední doba čekání ve frontě

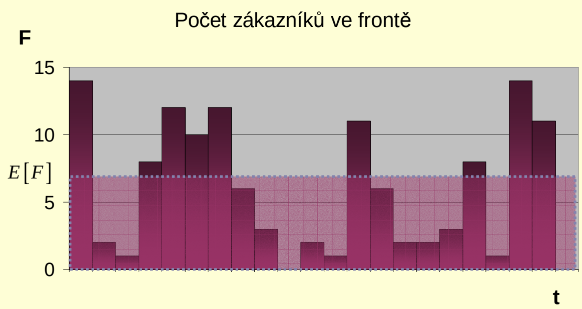
- Littleho vztahy platí pro jakýkoliv systém beze ztrát. O vstupním toku předpokládáme pouze, že je homogenní.

Littleho vzorce - důkaz

$$\lambda = E\left(N(1)\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$$

$$S_X = E[F] \cdot t$$

$$E[W] = \lim_{t\to\infty} \frac{S_X}{N(t)}$$



$$E[F] = \lim_{t\to\infty} \frac{S_X}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \frac{S_X}{N(t)} = \lambda E(W)$$

Vlastnost PASTA
Poisson Arrivals See Time Averages

- Jen pro systémy s Poissonovským vstupem! (M / . / .)
- % zákazníků, kteří při svém vstupu naleznou systém ve stavu A je stejné, jako % času v němž se systém ve stavu A nachází.
- Nechť p_0 je pst, že při náhodném vstupu zákazníka je systém prázdný, potom $100.p_0$ je % prostoje systému.

Př: Pro D / D / 1 – systém je prázdný pro t=0, příchody jsou 1,3,5, čas obsluhy 1

Queueing ToolPak
http://www.bus.ualberta.ca/aingolfsson/QTP/

M/M/n/r - charakteristiky systému

počet	pst
0	0,101
1	0,169
2	0,141
3	0,117
4	0,098
5	0,081
6	0,068
7	0,057
8	0,047
9	0,039
10	0,033
11	0,027
12	0,023
13	

Průměrný počet zákazníků v systému	4,03
Průměrný počet zákazníků ve frontě	2,40
Průměrná doba čekání v systému	0,82
Průměrná doba čekání ve frontě	0,49
Pravděpodobnost, že je systém prázdný	0,10
Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat	0,73
Pravděpodobnost ztráty zákazníka	0,02
Pravděpodobnost rezignace zákazníka	0,38
Využití systému	0,81
Průměrný počet vytížených linek	1,67

Parametry systému		hod
intenzita vstupu	5	0,2
intenzita obsluhy	3	
počet linek	2	
zásobník	10	
práh trpělivosti	0,5	