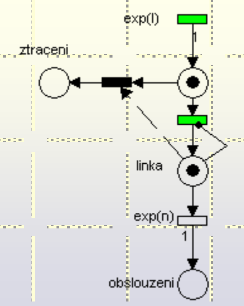
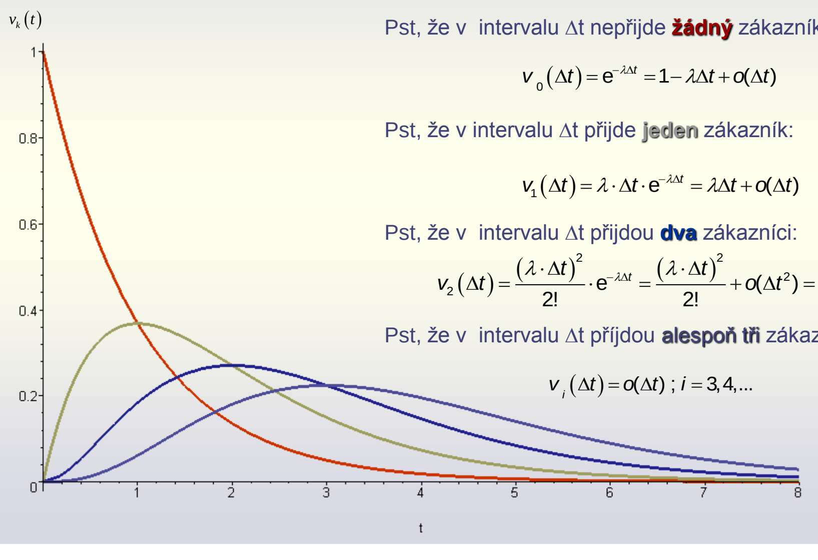
Markovovský jednolinkový model
M / M / 1/0



Příchod zákazníka
Poissonovský vstupní tok s intenzitou λ

$$P(N(t)=k)=v_k(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$



Pst, že v intervalu Δt nepřijde **žádný** zákazník:

$$v_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt přijde **jeden** zákazník:

$$v_1(\Delta t)=\lambda\cdot\Delta t\cdot e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt přijdou **dva** zákazníci:

$$v_2(\Delta t)=\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda\Delta t}=\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^2}{2!}+o(\Delta t^2)=o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt příjdou **alespoň tři** zákazníci:

$$v_i(\Delta t)=o(\Delta t)\ ;\ i=3,4,\ldots$$

Exponenciální rozdělení délky obsluhy s intenzitou obsluhy μ.

$$P(\tau \le t) = \int_0^t \mu \cdot e^{-\mu \cdot u} du = 1 - e^{-\mu \cdot t} \qquad f(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}, \quad t \ge 0$$

Pst, že v krátkém intervalu Δt bude obsloužen **jeden** zákazník

$$P(\tau < \Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

Pst, že v krátkém intervalu Δt nebude obsloužen **žádný** zákazník

$$P(\tau > \Delta t) = e^{-\mu \Delta t} = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

Pst, že v krátkém intervalu Δt budou obslouženi **dva** zákazníci

– Erlangovo rozdělení $Erlang(\mu, 2) = \mu e^{-\mu \Delta t} \frac{(\mu \Delta t)^{2-1}}{(2-1)!}$

$$P(2\tau < \Delta t) = v_2(\Delta t) = o(\Delta t)$$

Možné události v krátkém intervalu Δt:

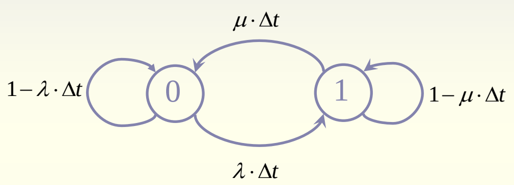
Do systému vstoupí jeden požadavek	λ.Δt + o(Δt)
Je ukončena obsluha jednoho požadavku	μ Δt + o(Δt)
Nebude ukončena obsluha žádného zákazníka	1- μ Δt + o(Δt)
Žádný zákazník nepřijde	1-λ.Δt + o(Δt)
Budou obsloužení dva zákazníci	o(Δt)
Do systému vstoupí dva zákazníci	o(Δt)
Jeden zákazník přijde a jeden obsloužen odejde	o(Δt)
Do systému vstoupí jeden požadavek a žádný neodejde	λ.Δt + o(Δt)
Jeden zákazník odejde a žádný nepřijde	μ Δt + o(Δt)

X(t) počet zákazníků, kteří jsou v okamžiku t v systému
X(t) je homogenní Markovův proces

$p_k(t)=P(X(t)=k)$
$p_{jk}(\tau)=P(X(t+\tau)=k / (X(t)=j))$

Graf přechodů

- Na základě grafu přechodů sestavíme matici intenzit



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

- Z matice intenzit vypočítáme matici přechodů $P(t) = \exp\left(Q(t)\right)$

$$P := \begin{bmatrix} \dfrac{\mu + \lambda\, \mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)}}{\lambda + \mu} & -\dfrac{\lambda\, (\mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)} - 1)}{\lambda + \mu} \\ -\dfrac{\mu\, (\mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)} - 1)}{\lambda + \mu} & \dfrac{\lambda + \mu\, \mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)}}{\lambda + \mu} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} P = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} & \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} & \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{pmatrix}$$

Průběh rozložení pravděpodobnosti p(t)

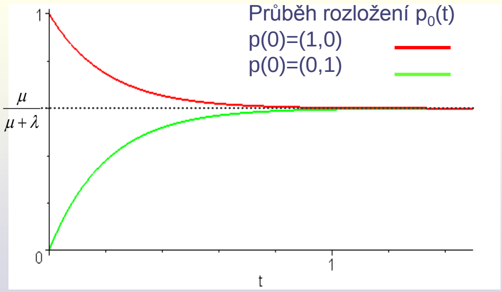
$$p(t) = p(0) \cdot P$$

Pokud p(0)=(0,1) $\quad p := \left[-\dfrac{\mu\, (\mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)} - 1)}{\lambda + \mu}, \dfrac{\lambda + \mu\, \mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)}}{\lambda + \mu} \right]$

Pokud p(0)=(1,0) $\quad p := \left[\dfrac{\mu + \lambda\, \mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)}}{\lambda + \mu}, -\dfrac{\lambda\, (\mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu)\, t)} - 1)}{\lambda + \mu} \right]$

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{1+\rho}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\rho}{1+\rho}$$



Stacionární řešení

$$p \cdot Q = o$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$p = (\mu k, \lambda k)$$

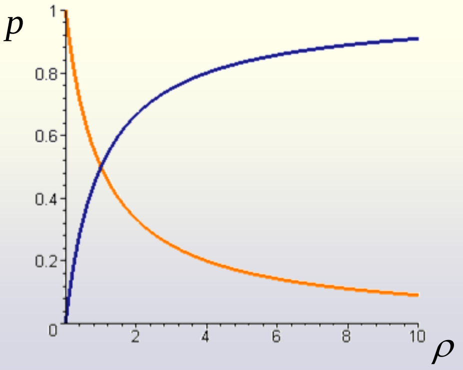
$$p = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$$

Pst, že v systému není žádný zákazník

Pst, že v systému je 1 zákazník

Intenzita provozu $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$p = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) = \left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{\rho}{1+\rho} \right)$$



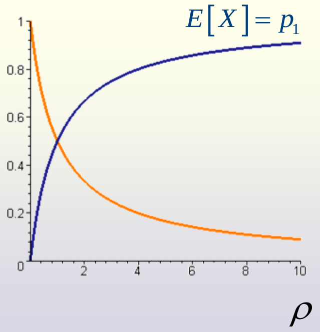
Statistické charakteristiky systému M / M / 1/0

$$p = \left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{\rho}{1+\rho} \right)$$

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E[X] = \frac{\rho}{1+\rho}$$

- Pst. odmítnutí nového požadavku: p_1
- Pravděpodobnost přijetí požadavku: p_0
- Absolutní kapacita
  – počet obsloužených za jednotku času: $\lambda . p_0$
- Vytíženost systému $p_1 . 100\%$



Příklad:

Telefonní aparát v informačním středisku zaznamenává volání v průměru každých 12 minut, přičemž hovor trvá v průměru 6 min. Za předpokladu elementárního vstupního proudu a exponenciálního času doby obsluhy je třeba určit:

- Jaké procento volání bude odbaveno (relativní kapacita)
- Kolik hovorů se uskuteční za hodinu (absolutní kapacita)
- Pravděpodobnost odmítnutí

$$\tau = 0{,}2\ hod \qquad p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = 5$$

$$\mu = 10 \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \frac{1}{3}$$

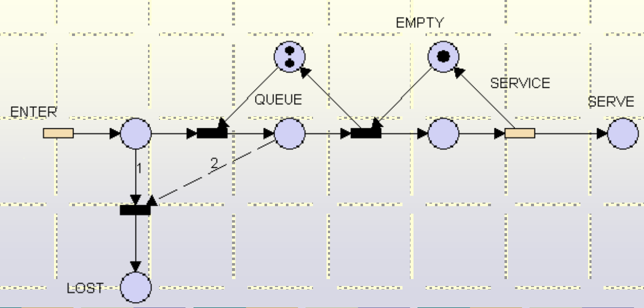
M/M/1/0 - charakteristiky systému

počet	pst
0	0.667
1	0.333
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	

Průměrný počet zákazníků v systému	0.33
Průměrný počet zákazníků ve frontě	0.00
Průměrná doba čekání v systému	0.10
Průměrná doba čekání ve frontě	0.00
Pravděpodobnost, že je systém prázdný	0.67
Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat	0.33
Pravděpodobnost ztráty zákazníka	0.33
Pravděpodobnost rezignace zákazníka	0.00

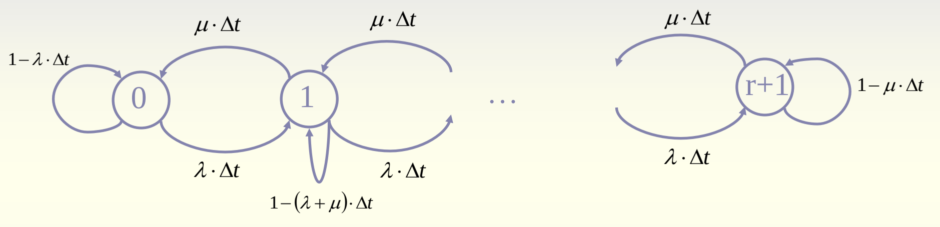
Parametry systému	
intenzita vstupu	5
intenzita obsluhy	10
počet linek	1
zásobník	0
práh trpělivosti	0

Markovovský jednolinkový model M / M / 1/r



M / M / 1 / r

Jednolinkový systém s *r* -místným zásobníkem (max. délka fronty = *r*)



$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \dots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\lambda p_0+\mu p_1&=0 \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+\mu p_2&=0 \\ &\dots \\ \lambda p_{r-1}-(\lambda+\mu)p_r+\mu p_{r+1}&=0 \\ \lambda p_r-\mu p_{r+1}&=0 \end{aligned}$$

$$p = \left(p_0;\ \rho p_0;\ \rho^2 p_0;\ldots;\rho^{r+1} p_0\right)$$

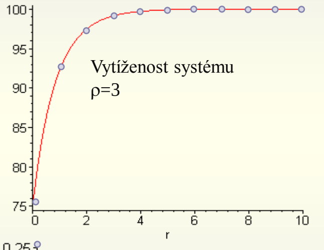
$$p_k = p_0 \cdot \rho^k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{r+2}}$$

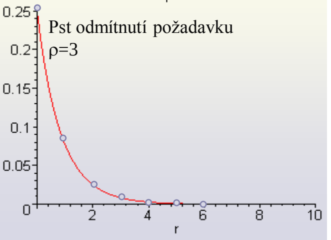
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r+1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

i	Počet zákaz. P(X=i)	Délka fronty P(F=i)	Počet v obsluze P(S=i)
0	p_0	p_0+p_1	p_0
1	p_1	p_2	$p_1+p_2+\ldots+p_{r+1}$
			…
r	p_r	p_{r+1}	…
r+1	p_{r+1}	…	…

Vytíženost systému $(1-p_0).100\%$





Základní charakteristiky systému

- Pst odmítnutí nového požadavku p_{r+1}
- Pravděpodobnost přijetí požadavku $1-p_{r+1}$

- Střední hodnota počtu požadavků v systému

$$E[X] = \sum_{k=0}^{r+1} k \cdot p_0 \cdot \rho^k = p_0 \rho \sum_{k=0}^{r+1} k \cdot \rho^{k-1} = p_0 \rho \frac{\rho^{r+2}(r+1) - \rho^{r+1}(r+2) + 1}{(1-\rho)^2}$$

- Průměrná délka fronty

$$E[F] = \sum_{k=1}^{r} k \cdot p_{k+1} = \sum_{k=1}^{r} k \cdot p_0 \cdot \rho^{k+1} = p_0 \rho^2 \sum_{k=1}^{r} k \cdot \rho^{k-1} = p_0 \rho^2 \frac{r\rho^{r+1} - \rho^r (r+1) + 1}{(1-\rho)^2}$$

Příklad:

Telefonní aparát v informačním středisku zaznamenává volání v průměru každých 12 minut, přičemž hovor trvá v průměru 6 min. Je-li linka obsazena, můžou na spojení čekat maximálně 2 zákazníci:

- Kolik hovorů se uskuteční za hodinu (absolutní kapacita)
- Pravděpodobnost odmítnutí

$$\tau = 0{,}2\ hod$$
$$\lambda = 5$$
$$\mu = 10$$

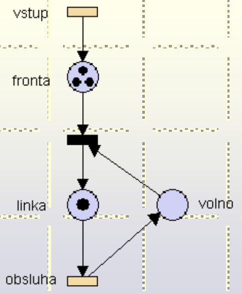
$$p_k = p_0 \rho^k$$
$$\sum_{k=0}^{3} p_k = 1$$
$$p_0 \sum_{k=0}^{3} \rho^k = 1$$
$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{3} \rho^k \right)^{-1}$$

k	ρ^k	$p_k = p_0 \rho^k$
0	1	$\frac{8}{15}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{15}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$

Pro systém bez fronty je pravděpodobnost ztráty $p_1 = \frac{1}{3}$

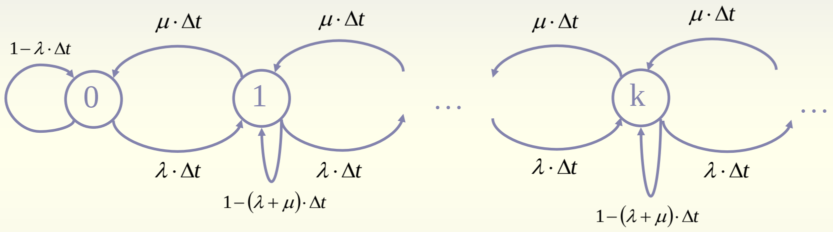
Systém s délkou fronty 2 přijde o zákazníka s pravděpodobností $p_3 = \frac{1}{15}$

Markovovský jednolinkový model M / M / 1/∞



M / M / 1 / ∞

Neomezená fronta bez rezignace, frontový režim FIFO, obsluha vždy dostupná, bez priorit.



$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \dots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & & \dots \end{pmatrix}$$

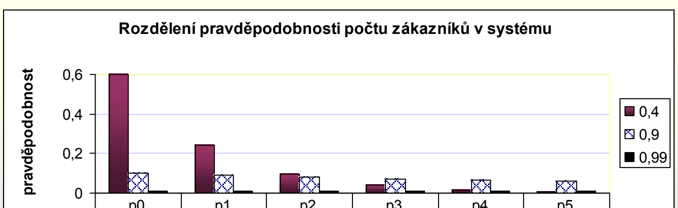
$$\begin{aligned} -\lambda p_0+\mu p_1&=0 \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+\mu p_2&=0 \\ &\dots \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+\mu)p_k+\mu p_{k+1}&=0 \end{aligned}$$

$$p=\left(p_0;\rho p_0;\rho^2 p_0;\dots;\rho^k p_0;\dots\right)$$

$$p_0=\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i}=1-\rho$$

- Systém se stabilizuje, právě tehdy, když je intenzita provozu $\rho < 1$, tj. pokud je intenzita obsluhy větší než intenzita vstupního toku požadavků!

$$p_k=(1-\rho)\rho^k$$



	p0	p1	p2	p3	p4	p5
0,4	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,01536	0,006144
0,9	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0,059049
0,99	0,01	0,0099	0,009801	0,00970299	0,00960596	0,0095099

$p_k = (1-\rho)\rho^k$

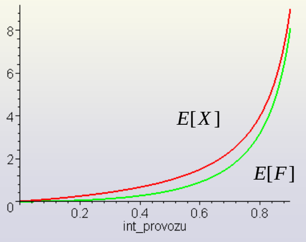
Základní charakteristiky systému M / M / 1 / ∞

- Střední hodnota počtu požadavků v systému $E[X] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
- Rozptyl počtu zákazníků v systému $D[X] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- Průměrný počet zákazníků ve frontě $E[F] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Využití linky $E[S] = 0.p_0 + 1\sum_{k=1}^{\infty} p_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k = \rho\%$
- Průměrná čekací doba

$$E[W_F] = \frac{E[F]}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$E[W_X] = \frac{E[X]}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E[W_X] = E[W_F] + \frac{1}{\mu}$$



Rozložení doby čekání ve frontě - W

- Doba obsluhy *k* požadavků…*Erlang(μ,k)* $f(t) = \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu \cdot t}$

$$P(X > t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}$$

Čas obsluhy *k* požadavků je větší než *t*
= (N(*t*) =0) ∪(N(*t*) =1) ∪…∪(N(*t*) =*k-1*)

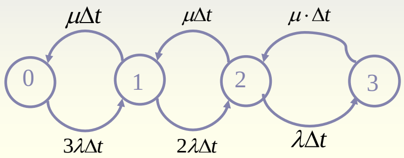
- Označme W_k dobu čekání náhodného zákazníka, při jehož příchodu již bylo *k* zákazníků v systému

$$P(W > t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot P(W_k > t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} =$$

$$= (1-\rho)e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = e^{-\mu t} e^{\lambda t} = e^{(\lambda-\mu)t}$$

Distribuční funkce: $P(W > t) = 1 - e^{(\lambda-\mu)t}$

Příklad:
Délka obsluhy 1 zákazníka u novinového stánku má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Zákazníci přicházejí v Poissonovském toku, průměrná intenzita vstupního toku je dána vztahem $(3-r)\lambda$, kde r je počet zákazníků ve frontě. Odvoďte vzorce pro stabilizovaný stav.



$$Q=\begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -2\lambda-\mu & 2\lambda & 0 \\ 0 & \mu & -\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3\lambda p_0+\mu p_1&=0 \\ 3\lambda p_0-(2\lambda+\mu)p_1+\mu p_2&=0 \\ 2\lambda p_1-(\lambda+\mu)p_2+\mu p_3&=0 \\ \lambda p_2-\mu p_3&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ -2\lambda p_1+\mu p_2=0 \\ -\lambda p_2+\mu p_3=0 \\ \lambda p_2-\mu p_3=0 \end{cases}$$

$$p=\left(p_0;\ \frac{3\lambda}{\mu}p_0;\ \frac{6\lambda^2}{\mu^2}p_0;\ \frac{6\lambda^3}{\mu^3}p_0\right);\ p_0=\left(1+3\frac{\lambda}{\mu}+6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right)^{-1}$$

Příklad:
Zkoumáme systém se dvěma linkami a s omezenou kapacitou zásobníku $r=2$. Na základě relativních četností jsme odhadli pravděpodobnosti stavu systému.

$$p_0=\frac{1}{16};\ p_1=\frac{4}{16};\ p_2=\frac{6}{16};\ p_3=\frac{4}{16};\ p_4=\frac{1}{16};$$

Určete :
- průměrný počet zákazníků v systému
- průměrný počet zákazníků ve frontě
- vytíženost systému

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{4}{16}+2\cdot\frac{6}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=2$$

$$E[F]=1\cdot\frac{4}{16}+2\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$$

$$E[X]=E[F]+E[S]$$

$$\frac{E[S]}{2}=\frac{1}{2}\left[1\cdot\frac{4}{16}+2\cdot\left(\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{8}=81\%$$