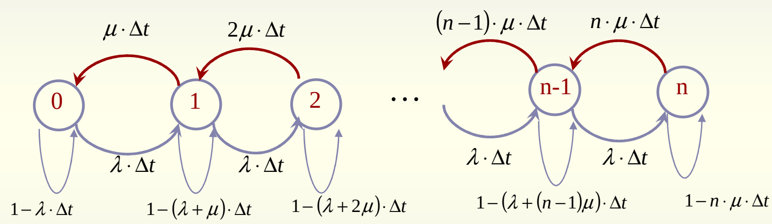
M /M / n / 0 Systém se ztrátami

- Příchod zákazníka –Poissonovský vstupní tok s intenzitou λ
- Obsluhy vzájemně nezávislé, u všech *n* linek exponenciální rozdělení délky obsluhy s intenzitou obsluhy μ.



- Příchod 1 zákazníka v krátkém časovém intervalu Δt …….*λΔt +o(Δt)*
- Jestliže jsou linky nezávislé, *k* linek pracuje, pak pravděpodobnost:
  - že alespoň jedna ukončí obsluhu:…………………….*k.μΔt +o(Δt).*
  - že alespoň dva ukončí obsluhu……………………….*o(Δt).*
  - žádná z nich obsluhu nedokončí……………………..*1- k. μ Δt +o(Δt).*

M /M / n / 0
Pravděpodobnosti stabilizovaného stavu

$$\vec{p}Q = \vec{o};\ \ \vec{p} = \left(p_0, p_1, \ldots, p_n\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & n(1-\mu)-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda+\mu) p_1 + 2\mu p_2 &= 0 \\ \lambda p_1 - (\lambda+2\mu) p_2 + 3\mu p_3 &= 0 \\ \ldots \\ \lambda p_{n-2} - (\lambda+(n-1)\mu) p_{n-1} + n\mu p_n &= 0 \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n &= 0 \end{aligned}$$

Substituce:

$$z_k = -\lambda p_k + \left(k+1\right)\mu p_{k+1}$$

$$z_0 = 0$$

$$z_0 = z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$$

$$\lambda p_k = \left(k+1\right)\mu p_{k+1}$$

M /M / n / 0
Pravděpodobnosti stabilizovaného stavu

$$\lambda p_k = (k+1)\mu p_{k+1}$$

$$p_{k+1} = \frac{\lambda p_k}{\mu(k+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda p_1}{\mu \cdot 2} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{p_0}{2!}$$

$$p_3 = \frac{\lambda p_2}{\mu \cdot 3} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{p_0}{3!}$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\lambda p_{n-1}}{\mu \cdot n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}$$

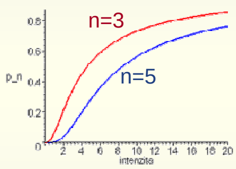
Pravděpodobnost, že v n-linkovém systému M/M/n/0 bez fronty je *k* obsluhovaných zákazníků je dána Erlangovými vzorci:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!}; \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1}$$

Analýza vlastností M/M/n/0

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!}; \, p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1}$$

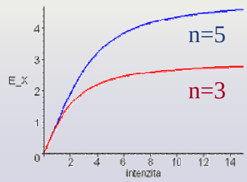
- Pravděpodobnost odmítnutí požadavku ....p_n
- Střední počet odmítnutých za jednotku času................$\lambda\, p_n$
- Střední počet obsloužených za jednotku času..............$\lambda\,(1-p_n)$
- Průměrný počet obsazených linek
  = střední hodnota počtu požadavků v systému



$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!} = \frac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} \frac{p_0}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{\mu}(1-p_n)$$

- Využití systému – průměrný počet obsazených linek / n

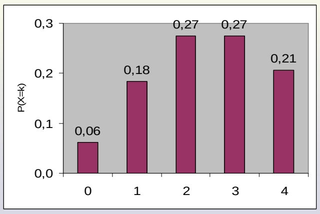
$$\left(\frac{\lambda}{n \cdot \mu}(1-p_n)\right) \cdot 100\%$$



Příklad: Do systému M/M/4/0 vstupuje průměrně 6 požadavků za hodinu. Střední doba obsluhy jednoho požadavku je ½ hodiny. Určete pravděpodobnost odmítnutí požadavku, střední počet obsazených linek a zatížení systému.

Stav k	$q_k=p_k/p_0$	p_k	$k.p_k$
0	1,00	0,06	0,00
1	3,00	0,18	0,18
2	4,50	0,27	0,55
3	4,50	0,27	0,82
4	3,38	0,21	0,82
Σ	16,38	1	2,38

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!};\ p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1}$$



- pravděpodobnost odmítnutí požadavku p_4=0,206
- střední počet obsazených linek E[X] =2,381
- zatížení systému E[X]/4 =0,595
- Za hodinu bude obslouženo průměrně

$$\lambda(1-p_4) = 6(1-0,206) = 4,763$$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!};\ p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1}$$

Příklad: Jaká má být intenzita provozu $\rho=\lambda/\mu$ při čtyřech linkách, aby bylo odmítnuto maximálně 10% požadavků.

$$p_4 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \frac{1}{4!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

$$\frac{\rho^4 \frac{1}{4!}}{1+\rho+\frac{1}{2!}\rho^2+\frac{1}{3!}\rho^3+\frac{1}{4!}\rho^4} \le 0,1$$

$$2,4+2,4\rho+1,2\rho^2+0,4\rho^3-0,9\rho^4=0$$

$$\rho \le 2,045$$

Příklad: Je třeba stanovit minimální počet linek n obsluhy v systému M/M/n se ztrátami, je-li jeho intenzita provozu $\rho=\lambda/\mu=3$ a pravděpodobnost odmítnutí nemá překročit 0,075.

$$p_n = \frac{\rho^n \frac{1}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\rho^k}$$

$$n=1 \quad p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

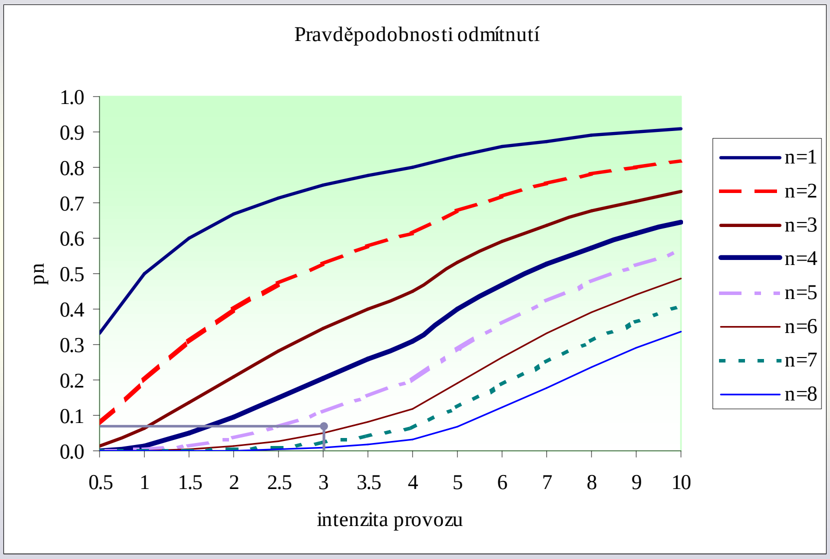
$$n=2 \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2(1+\rho+\frac{\rho^2}{2})}$$

$$n=3 \quad p_3 = \frac{\rho^3}{6(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{6})}$$

M /M / n / 0

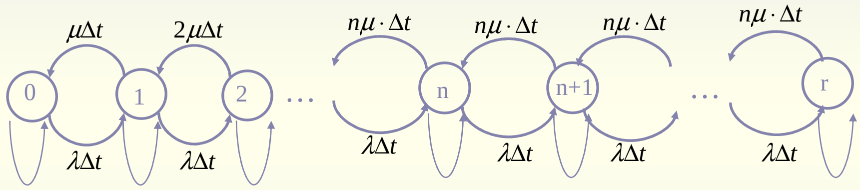
Pravděpodobnost odmítnutí požadavku ze systému M/M/n/0								
ρ	počet linek obsluhy n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0,5	0,333	0,077	0,013	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,500	0,200	0,063	0,015	0,003	0,001	0,000	0,000
1,5	0,600	0,310	0,134	0,048	0,014	0,004	0,001	0,000
2	0,667	0,400	0,211	0,095	0,037	0,012	0,003	0,001
2,5	0,714	0,472	0,282	0,150	0,070	0,028	0,010	0,003
3	0,750	0,529	0,346	0,206	0,110	0,052	0,022	0,008
3,5	0,778	0,576	0,402	0,260	0,154	0,082	0,040	0,017
4	0,800	0,615	0,451	0,311	0,199	0,117	0,063	0,030
5	0,833	0,676	0,530	0,398	0,285	0,192	0,121	0,070
6	0,857	0,720	0,590	0,470	0,360	0,265	0,185	0,122
7	0,875	0,754	0,638	0,527	0,425	0,331	0,249	0,179
8	0,889	0,780	0,675	0,575	0,479	0,390	0,308	0,236
9	0,900	0,802	0,706	0,614	0,525	0,441	0,362	0,289
10	0,909	0,820	0,732	0,647	0,564	0,485	0,409	0,338

M /M / n / 0



M /M / n / r

- Příchod zákazníka –Poissonovský vstupní tok s intenzitou λ.
- Exponenciální rozdělení délky obsluhy s intenzitou obsluhy μ.



$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+n\mu) & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\mu & -(\lambda+n\mu) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -n\mu \end{pmatrix}$$

M /M / n / r

$$\vec{p}Q=\vec{o};\ \vec{p}=\left(p_0, p_1,\dots, p_{n+r}\right)$$

$$-\lambda p_0+\mu p_1=0$$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0 \quad 1\le k<n$$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+n\mu)p_k+n\mu p_{k+1}=0 \quad n\le k<n+r$$

$$\lambda p_{n+r-1}-n\mu p_{n+r}=0$$

Substituce:

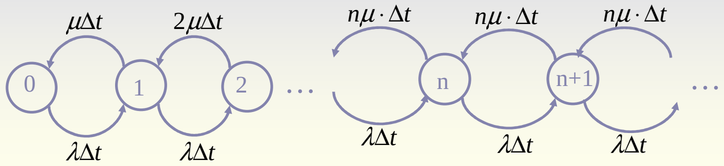
$z_k=-\lambda p_k+\left(k+1\right)\mu p_{k+1};\ 0\le k\le n$

$z_k=-\lambda p_k+\left(k+1\right)\mu p_{k+1};\ n\le k\le n+r$

$$0\le k\le n;\quad p_{k+1}=\frac{\lambda p_k}{\mu(k+1)},\Rightarrow \quad p_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{p_0}{k!}$$

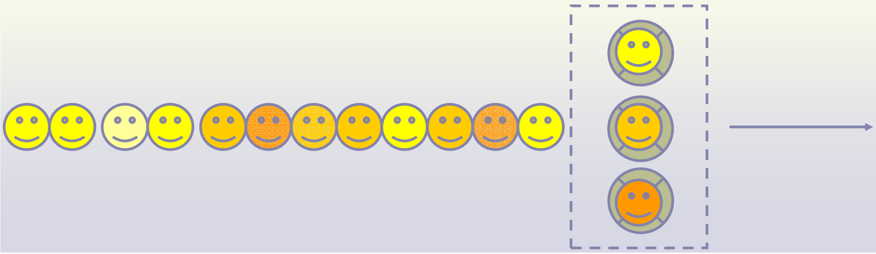
$$n\le k\le n+r;\quad p_k=\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}p_n,\Rightarrow \quad p_k=\frac{p_0}{n!n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

M /M / n / ∞
Systém s nekonečnou frontou



Možné události na SHO

- bude ukončena obsluha v některém z *k* pracujících kanálů — *k*.μΔt +o(Δt).
- přijde jeden zákazník — λ.Δt +o(Δt).



M /M / n / ∞ - matice intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & & 0 & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \dots & & 0 & \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \dots & & 0 & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & n\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ \vdots & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$
$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \quad 1 \le k < n$$
$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu) p_k + n\mu p_{k+1} = 0 \quad n \le k$$

M /M / n / ∞

$$0 \le k \le n;\quad p_k = \frac{\lambda p_{k-1}}{\mu k}, \Rightarrow p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!}$$

$$n \le k;\quad p_k = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} p_n, \Rightarrow p_k = \frac{p_0}{n!\,n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!} + \frac{n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!\left(n-\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right)^{-1}$$

Podmínka existence stacionárního řešení : $\rho_n = \dfrac{\lambda}{n\mu} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda < n\mu$

Charakteristiky systému M /M / n / ∞

$$k \le n;\ p_k = \rho^k \frac{p_0}{k!} \qquad k \ge n;\ p_k = \frac{p_0}{n!\,n^{k-n}}\rho^k \qquad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right)^{-1}$$

- Průměrný počet obsazených linek

$$E[S] = \sum_{k=0}^{n} kp_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} np_k = p_0\sum_{k=1}^{n} k\frac{\rho^k}{k!} + p_0\sum_{k=n+1}^{\infty} n\frac{\rho^k n^{n-k}}{n!} = p_0\rho\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right] = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Střední počet zákazníků ve frontě

$$E[F] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k p_n = p_n\sum_{k=0}^{\infty} k\rho_n{}^k = \frac{p_n\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \qquad kde \quad \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu}$$

- Střední počet zákazníků v systému

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{n} kp_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{n} kp_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} np_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\,p_k = E[S] + E[F]$$

- Využití systému

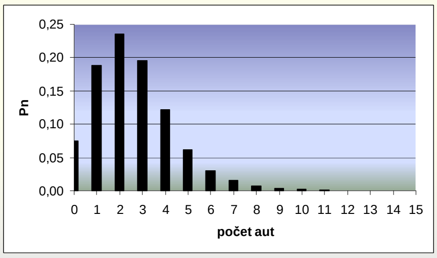
$$\frac{E[S]}{n} = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \rho_n$$

- K 5 pokladnám pro vjezd na dálnici přijíždí průměrně 15 vozidel za minutu. Střední doba obsluhy je 10 sekund. Určete:
  - průměrnou délku fronty,
  - průměrný prostoj vozidla způsobený placením mýtného,
  - pst, že náhodné vozidlo bude čekat na obsluhu
  - vytížení systému

$$0 \le k \le n, \quad p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!}$$

$$n \le k, \quad p_k = \frac{p_0}{n!\,n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

k	qk	p_k	ES	EF	EX
0	1,000	0,0752	0,000	0,000	0,000
1	2,500	0,1880	0,188	0,000	0,188
2	3,125	0,2350	0,470	0,000	0,470
3	2,604	0,1958	0,587	0,000	0,587
4	1,628	0,1224	0,490	0,000	0,490
5	0,814	0,0612	0,306	0,000	0,306
	11,671	0,878	2,041		2,041
6	0,407	0,0306		0,031	0,184
7	0,203	0,0153		0,038	0,107
8	0,102	0,0076		0,024	0,061
9	0,051	0,0038		0,010	0,034
10	0,025	0,0019		0,003	0,019
11	0,013	0,0010		0,001	0,011
12	0,006	0,0005		0,006	0,006
13	0,003	0,0002		0,000	0,003
14	0,002	0,0001		0,000	0,002
15	0,001	0,0001		0,000	0,001
Σ	1,628	0,0611	0,306	0,112	0,427
přibl. výsledky		0,9387	2,347	0,112	2,468



přesné výsl.	
p0	0,075
pn	0,061
ES	2,5
EF	0,122
EX	2,622

$$E[S] = \rho$$

$$E[F] = \frac{p_n \rho_n}{(1-\rho_n)^2}$$

Optimalizace systémů hromadné obsluhy

Nákladově orientované modely

- Optimalizujeme Účelovou funkci
  - Pohled z hlediska nadřízených systémů, širších souvislostí
  - Účelová funkce vyjadřuje zájmy rovnocenných systémů, které mohou být i protichůdné
  - Optimalizace z pohledu konkrétního systému
- Definice nákladů
  - **Explicitní** - veškeré reálně vynaložené náklady zanesené v účetních knihách
  - **Implicitní** - náklady obětované příležitosti, firma je reálně neplatí, jde o ušlé výnosy z užití omezených zdrojů
- Definice příjmů

Nákladová funkce pro optimalizaci počtu kanálů n

- Náklady na neobsazené kanály $C_{volno}(n) = c_{volno}.(n-E[S])$
  c_{volno}…náklady na jeden volný kanál za časovou jednotku
- Náklady na prostoje zákazníka při čekání $C_w(n) = c_w.E[F]$
  c_w…náklady na čekání jednoho zákazníka za čas. jednotku
- Náklady na obsluhu zákazníka $C_{obsluha}(n) = c_{obsluha}.E[S]$
  $c_{obsluha}$…náklady na obsluhu 1 požadavku za čas. jednotku
- Náklady (penále) způsobené ztrátou zákazníka $C_{ztráta}(n) = c_{ztráta}.\lambda.p_{ztráta}$
  $c_{ztráta}$…ušlý zisk způsobený ztrátou jednoho zákazníka

$$Z(n) = V(n) - \left(C_{volno}(n) + C_w(n) + C_{obsluha}(n) + C_{ztráta}(n)\right)$$

Příklad:

Do pneuservisu přijíždí průměrně 6 aut za hodinu. Průměrná doba obsluhy 1 zákazníka je 20 minut, na opravu čekají maximálně 3 zákazníci. Jaký bude optimální počet aktivních boxů, předpokládáme-li následující zhodnocení nákladů:

Náklady na jeden opravárenský box (+platy)	1500 Kč/hod
Zvýšené náklady 1 boxu při opravě	700 Kč/hod
Ušlý zisk pří ztrátě 1 zákazníka	500 Kč
Ušlý zisk při čekání jednoho zákazníka	300 Kč/hod
Průměrný zisk z obsluhy jednoho zákazníka (cena-materiál)	2000 Kč

- Náklady na provoz n boxů $C_s(n) = 1500.n$
  Náklady na obsluhu zákazníka $C_{obsluha}(n) = 700.E[S]$
  Náklady (penále) způsobené ztrátou zákazníka $C_{ztráta}(n) = 500.6.p_{ztráta}$
  Náklady na prostoje zákazníka při čekání $C_w(n) = 300.E[F]$
  Výnos z obsluhy $V(n) = 2000.6.(1-p_{ztráta})$

$$Z(n) = V(n) - \left(C_s(n) + C_w(n) + C_{obsluha}(n) + C_{ztráta}(n)\right)$$

$$0 \le k \le n; \quad p_{k+1} = \frac{\lambda p_k}{\mu(k+1)}, \Rightarrow \quad p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p_0}{k!}$$

$$n \le k \le n+r; \quad p_k = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} p_n, \Rightarrow \quad p_k = \frac{p_0}{n!n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

Příklad:

Do pneuservisu přijíždí průměrně 6 aut za hodinu. Průměrná doba obsluhy 1 zákazníka je 20 minut, na opravu čekají maximálně 3 zákazníci. Jaký bude optimální počet aktivních boxů, předpokládáme-li následující zhodnocení nákladů:

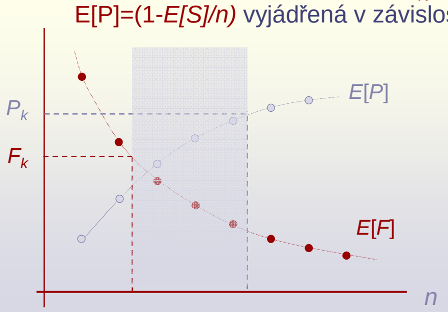
- Náklady na provoz n boxů — $C_s(n) = 1500.n$
  Náklady na obsluhu zákazníka — $C_{obsluha}(n) = 700.E[S]$
  Náklady (penále) způsobené ztrátou zákazníka — $C_{ztráta}(n) = 500.6.p_{ztráta}$
  Náklady na prostoje zákazníka při čekání — $C_w(n) = 300.E[F]$
  Výnos z obsluhy — $V(n) = 2000.6.(1-p_{ztráta})$

n	Aktiv. boxy	Oprava	ztráta zákazn.	čekání zákazn	Tržba -mat.	Zisk
1	-1500	-677	-1548	-658	5806	1423
2	-3000	-1145	-545	-327	9818	4800
3	-4500	-1333	-144	-119	11423	5326
4	-6000	-1385	-33	-36	11868	4414
5	-7500	-1397	-7	-10	11972	3059
6	-9000	-1399	-1	-2	11995	1592
7	-10500	-1400	0	-1	11999	98
8	-12000	-1400	0	0	12000	-1400
9	-13500	-1400	0	0	12000	-2900
10	-15000	-1400	0	0	12000	-4400

Nenákladově orientované modely

Nastavení počtu linek *n* tak, aby průměrně nebyly překročeny kritické hodnoty některých charakteristik:

- Kritická délka fronty F_k
  E[F] vyjádřená v závislosti na *n* je funkce klesající.
- Kritická doba čekání – (práh trpělivosti) W_k
  E[W] vyjádřená v závislosti na *n* je funkce klesající.
- Kritická hodnota prostoje linek P_K
  E[P]=(1-*E[S]/n)* vyjádřená v závislosti na *n* je funkce rostoucí.



Aplikace modelů THO

- Modely obnovy – optimalizace náhrad prostředků podléhajících spotřebě a opotřebení
- Modely údržby – optimalizace činností zabezpečující způsobilost a hospodárný provoz prostředků
- **Modely zásobování** – optimalizace výroby a spotřeby

Teorie zásob

- Zásoby vážou prostředky, zpomalují sytém

X

- Obrana proti kolísání potřeby
- Rezerva před výpadkem dodávky
- Částečná ochrana před očekávaným zdražením, inflací, kolísáním kurzu

Teorie zásob

- Akviziční náklady – zabezpečení jedné dodávky do skladu – přímo úměrné počtu dodávek c_0
- Variabilní náklady skladování – přímo úměrné skladovanému množství c_s
- Náklady deficitu – penále (ušlý zisk), v případě nedostatečnosti zásob nemůžeme uspokojit požadavek na zboží
- Fixní náklady skladování

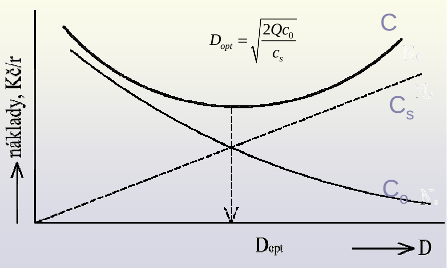
Harris-Wilsonův vzorec pro optimální velikost dodávky D.
(skladovatelnost materiálu je časově neomezená, deficit zásob se nepřipouští)

$$C(D) = C_s(D) + C_o(D) = \frac{D}{2}c_s + \frac{Q}{D}c_o$$

Q roční spotřeba materiálu

c_o náklady na objednání jedné dodávky

c_s náklady na skladování jednotky materiálu/rok



$p_k = (1-\rho)\rho^k$

Frontové modely zásob
M / M / 1 / ∞

- Zákazníci – dodávky na sklad Obsluha – uskladnění dodávky, doba uskladnění je exponenciální náhodná veličina
- Stav systému – počet dodávek na skladě
- Průměrný počet dodávek na skladě

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- Nákladová funkce $C(\rho) = C_s(\rho) + C_o(\rho) = E\left[X\right]c_s + c_d p_0 = \frac{\rho}{1-\rho}c_s + \left(1-\rho\right)c_d$

c_d deficitní náklady/rok

c_s náklady na skladování jednotky materiálu/rok

$$\rho_{opt} = 1 - \sqrt{\frac{c_S}{c_d}}$$

$$P\left(X \ge k\right) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i = \rho^k$$