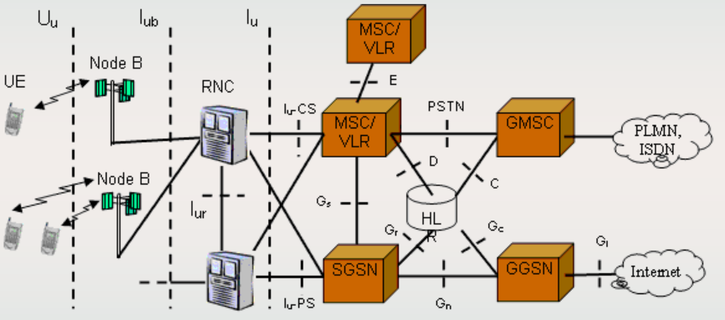
Obslužné sítě

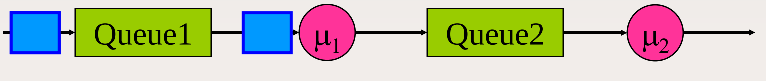
Jacksonova síť systémů hromadné obsluhy



Universal Mobile Telecommunications System

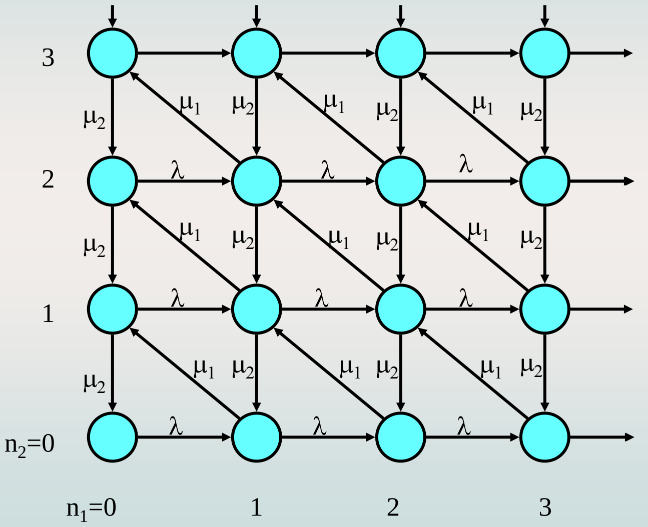
Telekomunikační síť
Počítačová síť
Dopravní síť

Sériové propojení dvou front



Stav systému je popsán uspořádanou dvojicí $[X_1(t), X_2(t)]$ počtů zákazníků v systémech 1 a 2.

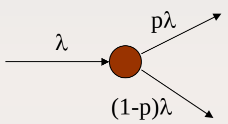
Sériové propojení dvou front



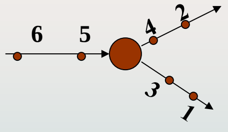
Základní pojmy

- Tok sítě je charakterizován intenzitou λ
- Obecně se hustota pravděpodobnosti výstupních toků nedá určit na základě informací o vstupních tocích

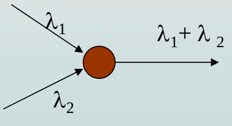
Pravidla pro spojování a rozdělování toků



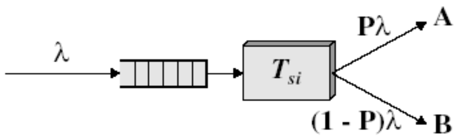
Pokud je vstupní tok Poissonovský a rozdělování požadavků náhodné, je výstupní tok Poissonovský



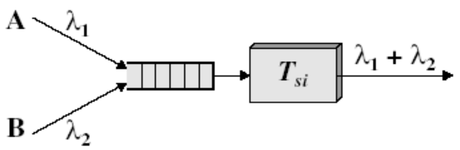
Pokud je vstupní tok Poissonovský a rozdělování požadavků pravidelné, je výstupní tok Erlangův



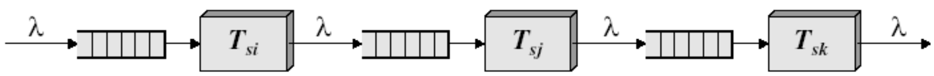
Jsou-li oba vstupní toky Poissonovské s intenzitou λ_i, je i výstupní tok Poissonovský s intenzitou $\sum_i \lambda_i$



(a) Traffic partitioning

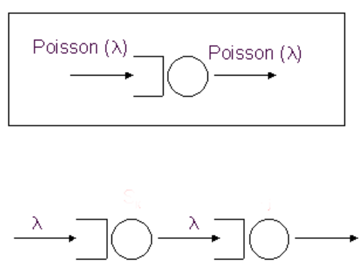


(b) Traffic merging

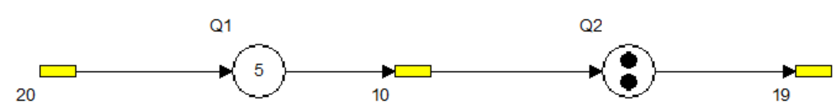


(c) Simple tandem queue

Burkeho věta



Výstupní tok z ustáleného systému M/M/m/∞ je Poissonův, intenzita výstupního toku je rovna intenzitě vstupu.

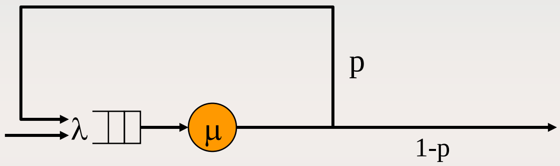


$$P\left(\left[X_1, X_2\right] = \left[k_1, k_2\right]\right) = P(X_1 = k_1) \cdot P(X_2 = k_2)$$

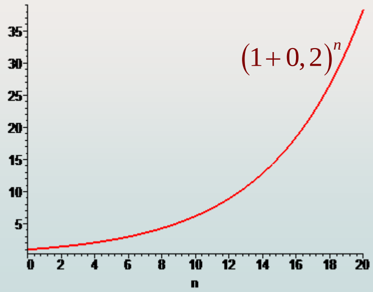
tandem.hps

Fronty se zpětnou vazbou

- Zákazník může navštívit frontu vícekrát – potom Burkeho věta neplatí

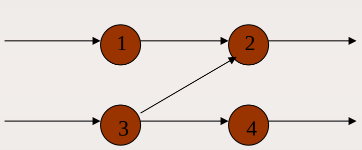


$$\lambda + p\lambda$$
$$\lambda + p\lambda + p(\lambda + p\lambda) = \lambda(1+p)^2$$
$$\ldots$$
$$\lambda(1+p)^n$$

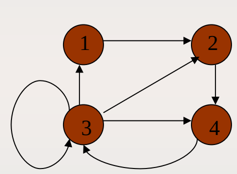


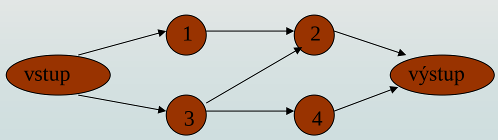
Síť: Systém stanic obsluhy, vzájemně propojených fyzickými i logickými vazbami.

otevřený



uzavřený





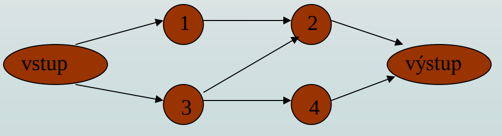
Př: konstantní počet procedur. Jakmile je ukončena obsluha jednoho požadavku je nahrazen požadavkem novým.

Jacksonova síť

Stochastická obslužná síť, která se skládá z m systémů, zdroje a spotřebiče, přičemž jsou dané psti p_{ij} vstupu požadavku z *i*-tého do *j*-tého systému.

1. Čas obsluhy ve všech systémech má exponenciální rozdělení
   – doba obsluhy požadavku je v každém uzlu nezávislá
   – každý uzel má frontu FIFO s **neomezenou** délkou
2. Po ukončení obsluhy v uzlu i požadavek ihned postupuje do následujícího uzlu, který je vybrán náhodně, možné přechody mezi systémy jsou náhodné a nezávislé

Jsou-li splněny podmínky 1-2, pak je výstup ze zdroje Poissonovský a proces stavů systému je Markovův



Jacksonův teorém

- X_i ... počet požadavků v *i*-tém uzlu
  počty požadavků X_i v různých uzlech sítě jsou nezávislé
- Vektor stavu $\vec{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_m)$
- Vektor skutečných hodnot $\vec{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_m)$

$$P(\vec{X} = \vec{k}) = P(X_0 = k_0) \cdot P(X_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(X_m = k_m) \cdot$$

- Označme pravděpodobnost, že v i–tém uzlu je k_i požadavků $p_i(k_i) = P(X_i = k_i)$

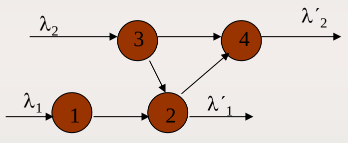
$$p(\vec{k}) = \prod_{i=0}^{m} p_i(k_i)$$

- Jsou-li všechny systémy sítě typu M / M / 1/∞.

$$p_i(k_i) = p_i(0)\rho_i^{k_i}; \quad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$$

Postup řešení obslužné sítě

1. **Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě**
2. Řešení jednotlivých uzlů jako samostatných SHO
3. Nalezení požadovaných charakteristik jednotlivých uzlů sítě
4. Nalezení charakteristik sítě



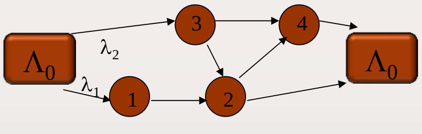
$$\Lambda_1 = \lambda_1$$
$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + p_{32}\Lambda_3 = \lambda_1 + p_{32}\lambda_2$$
$$\Lambda_3 = \lambda_2$$
$$\Lambda_4 = p_{34}\Lambda_3 + p_{24}\Lambda_2 = \lambda_2\left(p_{34} + p_{32}p_{24}\right) + \lambda_1 p_{24}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1' + \lambda_2' = \Lambda_0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \left(1 - p_{24}\right)\Lambda_2 + \Lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Příklad 1

1. **Nalezení toků protékajících jednotlivými uzly sítě**

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \Lambda_0$$
$$p_{01} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2};\ p_{03} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & I/0 \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{24} & p_{20} \\ 0 & p_{32} & 0 & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_{01} & 0 & p_{03} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

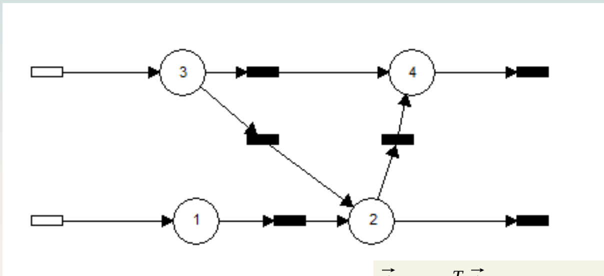
$$\vec{\Lambda} = \left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_0\right)$$
$$\vec{\Lambda} = P^T\vec{\Lambda}$$
$$\left(P^T - E\right)\vec{\Lambda} = o$$

$$\Lambda_1 = p_{01}\Lambda_0$$
$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + p_{32}\Lambda_3$$
$$\Lambda_3 = p_{03}\Lambda_0$$
$$\Lambda_4 = p_{24}\Lambda_2 + p_{34}\Lambda_3$$
$$\Lambda_0 = p_{20}\Lambda_2 + \Lambda_4$$

LZ rovnice

$$\Lambda_1 = p_{01}\Lambda_0$$
$$\Lambda_2 = \left(p_{01} + p_{32}p_{03}\right)\Lambda_0$$
$$\Lambda_3 = \left(p_{03}\right)\Lambda_0$$
$$\Lambda_4 = \left(p_{24}p_{01} + p_{24}p_{32}p_{03} + p_{34}p_{03}\right)\Lambda_0$$

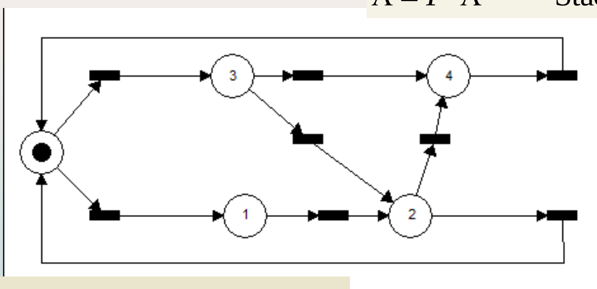
Příklad 1



$$P := \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad I/0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$ Stacion. stav DTMC $\vec{p} = \vec{p}P$

(0,00	0,00	0,00	0,00	1)
(0,50	0,00	0,50	0,00	0)
(0,00	0,75	0,00	0,25	0)
(0,00	0,00	0,00	0,00	1)



net2.hps, net.m Exercise 1

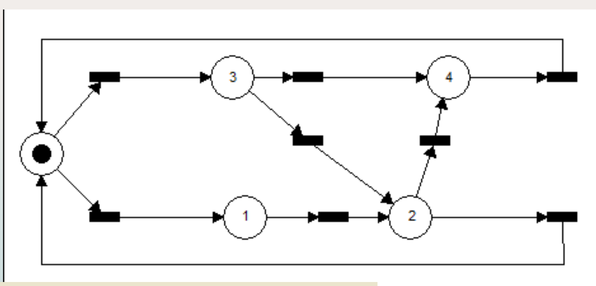
Příklad 1

$$P := \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad I/0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

```
rref((P'-eye(5)));
```

$$P^T - E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda := \left[\frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \Lambda_0 \right]$$



net2.hps, net.m (Exercise 1)

Počet průchodů uzlem

Vektor intenzit uzlů splňuje soustavu rovnic: $\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$

Pokud je Markovův řetězec sítě ireducibilní, potom pro dané Λ_0 je jediné řešení systému tvaru.

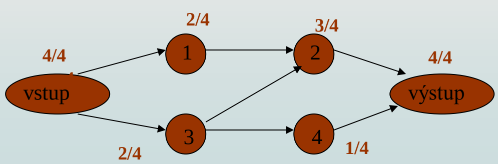
$$\Lambda_i = \alpha_i \Lambda_0$$

α_i - průměrný počet navštívení i-tého uzlu při průchodu zákazníka sítí

Pro stabilizovaný systém $\forall i;\ \Lambda_i < \mu_i \Rightarrow \alpha_i \Lambda_0 < \mu_i \Rightarrow \quad \Lambda_0 < \dfrac{\mu_i}{\alpha_i}$

$$P := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1/0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Lambda_0 < \min_i \frac{\mu_i}{\alpha_i}$$



$$\Lambda = \left[\frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \Lambda_0\right]$$

Střední doba strávená v systému

- Střední počet průchodů *i*-tým uzlem α_i:

$$\alpha_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_0}$$

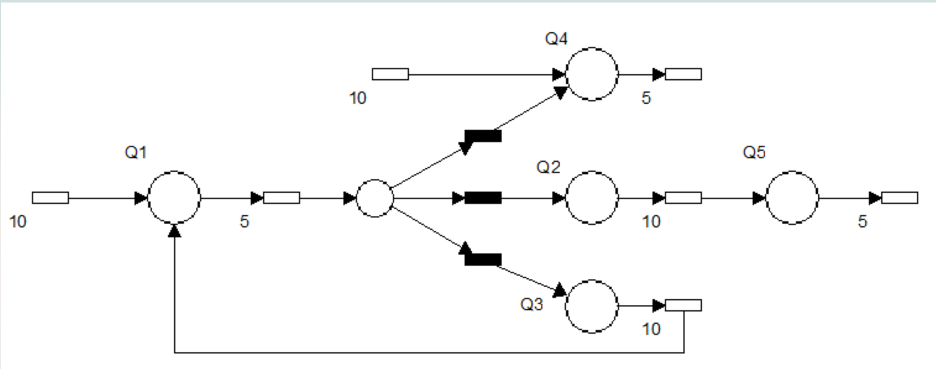
Střední počet zákazníků v i-tém uzlu $\quad E[X_i] = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$

Střední doba strávená v i-tém uzlu $\quad E[U_i] = \dfrac{E[X_i]}{\Lambda_i} = \dfrac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$

Střední doba strávená v systému

$$E[U] = \frac{E[X]}{\Lambda_0} = \frac{1}{\Lambda_0}\sum_{i=1}^{m} E[X_i] = \frac{1}{\Lambda_0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i} = \sum \alpha_i U_i$$

Příklad 3: Síť se zpětnou vazbou



$$P = \begin{array}{cccccc} Q1 & Q2 & Q3 & Q4 & Q5 & I/O \\ \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(P^T - E\right)\vec{\Lambda} = o$$

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \Lambda_0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \left(0{,}23 \;\; 0{,}08 \;\; 0{,}08 \;\; 0{,}23 \;\; 0{,}08 \;\; 0{,}31\right)$$

feedback.hps, net.m Exercise 3

Příklad 3: Síť se zpětnou vazbou

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \frac{3}{4}\Lambda_0, \frac{1}{4}\Lambda_0, \Lambda_0\right)$$

$$\Lambda_0 = 12 \, z\acute{a}k / hod$$

$$\vec{\rho} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Střední počet zákazníků v i-tém uzlu

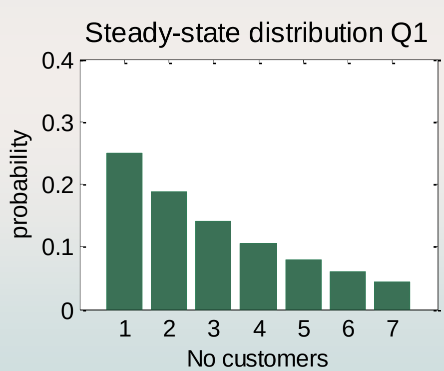
$$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

$$EX = \left(3, 1, 1, 3, 1/3\right)$$

$$E\left[X\right] = \sum_i EX_i = 8.3$$

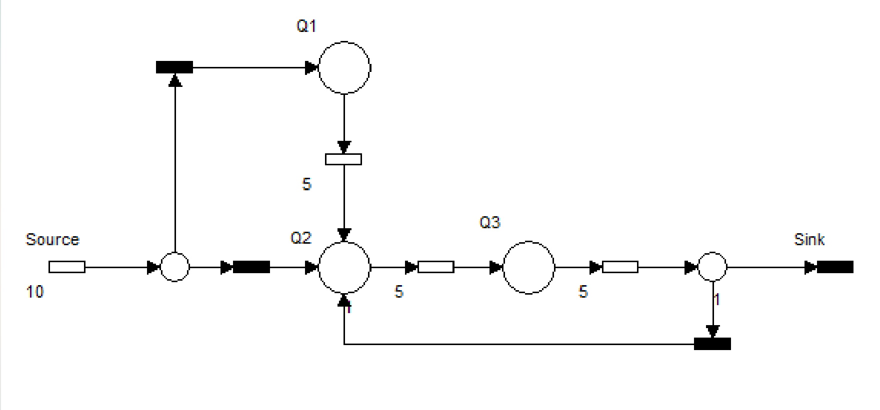
$$W\left[X\right] = \frac{E\left[X\right]}{\Lambda_0} = 41 \min$$

$$p_k = \left(1-\rho\right)\rho^k$$



feedback.hps, net.m Exercise 3

Příklad 4b: Určete průměrný průchod uzly



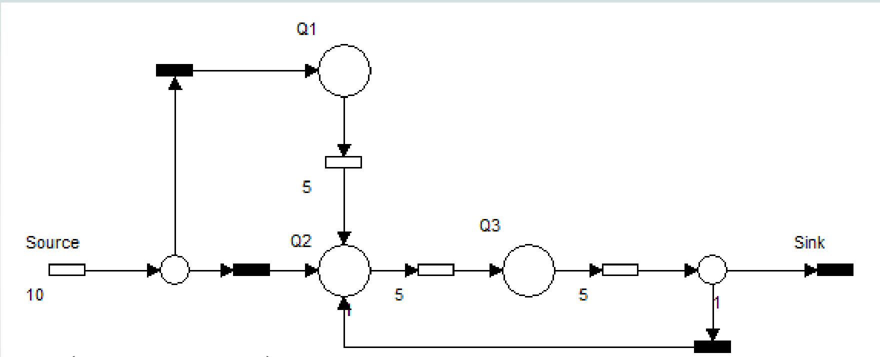
$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Lambda}=\left(\frac{1}{2}\Lambda_0, 2\Lambda_0, 2\Lambda_0, \Lambda_0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} p(n) \doteq (0.09,\ 0.36, 0.36, 0.18)$$

Feedback2.hps net.m Exercise 4

Příklad 4b: Určete průměrný průchod uzly



$$\vec{\Lambda}=\left(\frac{1}{2}\Lambda_0, 2\Lambda_0, 2\Lambda_0, \Lambda_0\right)$$

$$\Lambda_0=\frac{1}{10}$$

$$\rho=\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{5}\right)$$

Feedback2.hps net.m Exercise 4

Uzavřená Jacksonova síť

V síti s *m* systémy M/M/1/∞ se pohybuje *K* požadavků

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = K$$

Normalizační podmínka

$$p(\vec{k}) = \prod_{i=1}^{m} p_i(k_i); \quad \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=K} p(\vec{k}) = 1$$

$$p_i(k_i) = p_i(0)\rho_i^{k_i}; \quad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$$

Intenzity vstupu do uzlu jsou určeny až na nenulový násobek

$$\vec{\Lambda} = P^T \vec{\Lambda}$$

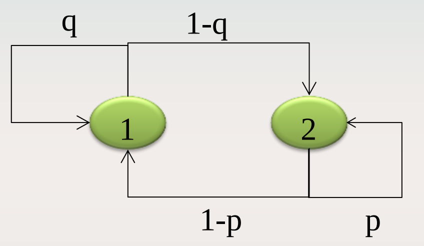
$$\vec{\Lambda} = (\alpha \cdot \Lambda_1, \alpha \cdot \Lambda_2, \dots, \alpha \cdot \Lambda_m)$$

$$\vec{\Lambda} = (\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \dots, \bar{\Lambda}_m)$$

Volbou $\Lambda_1 = \mu_1$ budou vzorce jednodušší

Uzavřená Jacksonova síť - příklad

V síti se *2* systémy M/M/1/∞ se pohybuje *K* požadavků.



$$\Lambda_1 = (1-p)\Lambda_2 + q\Lambda_1$$

$$\Lambda_2 = p\Lambda_2 + (1-q)\Lambda_1$$

Intenzity vstupu do uzlu jsou dány až na násobek

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 \frac{1-q}{1-p}$$

$$\bar{p}_i(0) = 1$$

$$\bar{p}_i(k_i) = \left(\frac{\bar{\Lambda}_i}{\mu_i}\right)^{k_i}$$

$$p(k_1, k_1, \dots, k_1) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^{m} \bar{p}_i(k_i)$$

$$G(K) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=K} \bar{p}_1(k_1) \cdot \bar{p}_2(k_2) \dots \bar{p}_m(k_m)$$