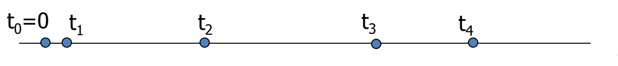
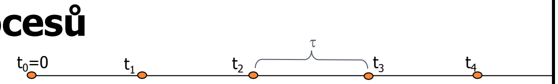
Bodový proces

- Sledujeme chod určitého procesu, v němž čas od času dochází k jisté význačné události ⇒ posloupnost časových okamžiků



- proces
  - determinován (jízdním řádem, bezpečnostními zásahy)
  - stochastický (zajímají nás pravděpodobnosti, s nimiž čísla t_i, nebo některé jejich funkce vyhovují určitým vztahům)

Základní třídy procesů



- **Regulární (pravidelný) tok**
- **Proces s nezávislými přírůstky**
  pro lib. k-tici vzájemně disjunktních intervalů $(s_1, s_1+t_1); (s_2, s_2+t_2); \dots ; (s_k, s_k+t_k); \dots$ je $\{N(s_1, s_1+t_1), N(s_2, s_2+t_2), \dots , N(s_k, s_k+t_k); \dots\}$ posloupnost nezávislých náhodných veličin.
- **Regenerativní proces (proces obnovy)**
  $\{\tau n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin.
- **Homogenní (stacionární) proces** – v čase neměnný proces
- **Ordinární proces** – nenastanou dvě události současně

- Vjezd vozidla do Smíchovského tunelu
- Objednávka zboží přes internet
- Narození dítěte
- Nástup zelené na SSZ
- Vznik dopravní nehody

Homogenní (stacionární) proces

Definice: Stochastický proces nazveme homogenním jestliže jsou pravděpodobnosti $v_n(s,t) = P(N(s,t) = n);\ \ n = 0,1,2...$

závislé pouze na délce intervalu t a ne na jeho počátku s.

$$v_n(s,t) = v_n(0,t) = v_n(t);\ \ \forall t \geq 0, s \geq 0, n = 0,1,2...$$

N(s,t) má pro libovolné *s* vždy stejný zákon rozložení jako *N(t)*.

$$E[N(t+u)] = E[N(t)] + E[N(u)] \Rightarrow E[N(t)] = t \cdot E[N(1)] = t \cdot \lambda$$

Definice:

λ ... Intenzita procesu (průměrný počet událostí za časovou jednotku)

$$E[N(1)] = \lambda$$

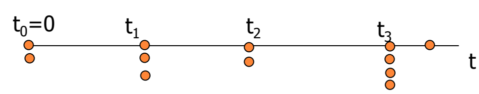
Př: Určete intenzitu regulárního (pravidelného) toku $\tau_0 = \tau_1 = \ldots = \tau$

Ordinární proces

- označme φ(t) pst, že za časový interval délky t nastanou nejméně dvě události. Pak vstupní tok je ordinární, je – li

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0 \qquad \varphi(t) = 1 - v_0(t) - v_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)$$

Neordinární toky – neordinárnost odstraníme tím, že registrujeme dvojici [čas, počet]



- Ordinální proces s nezávislými přírůstky je regenerativní.
- Ordinární homogenní proces je regenerativní ⇔je rekurentní.

Poissonův proces
Proces ryzího zrodu (Pure birth process)

- Poissonovský tok - ordinární stacionární proces s nezávislými přírůstky
- Nejužívanější model vstupního toku
  - Počet úmrtí následkem kopnutí koně (statistika během 20 let, L. Bortkiewicz: *The Law of Small Numbers*)
  - Počet dětských sebevražd
  - Počet válek v letech 1820 - 1950
- Model Poissonova toku používáme prakticky vždy, když zákazníci (příchozí volání, datové pakety, automobily,…) pocházejí z velké množiny vzájemně nezávislých uživatelů
- Palm – Khinchinova věta:
  Složení velkého počtu procesů s malou intenzitou konverguje k Poissonově procesu

Věta o Poissonovském toku požadavků

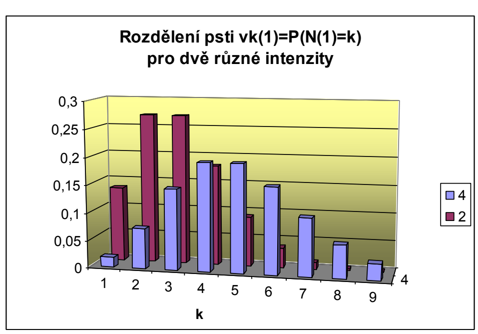
- Pro ordinární beznásledný homogenní vstupní tok událostí pravděpodobnost, že za časový interval délky t nastane právě k událostí, je

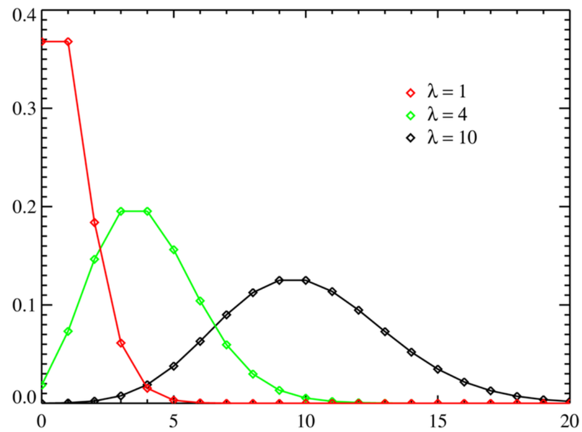
$$P(N(t)=k)=v_k(t)=v_k(s,t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow$ je to **Poissonův tok**

- Elementární tok je až na konstantu λ jednoznačně určen.

$$v_k(1)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$





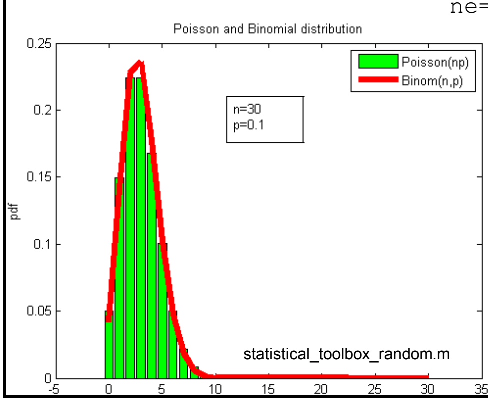
Binomické a Poissonovo rozdělení

Binomické rozdělení je pro dostatečně velké n (n>20) a malé p (p<0,05) možné nahradit Poissonovým rozdělením s intenzitou **n*p**

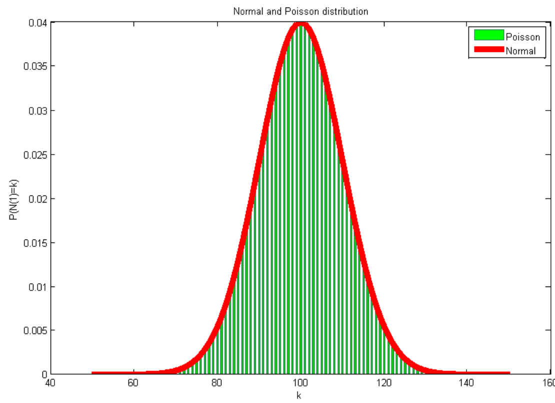
Binomické a Poissonovo rozdělení

Binomické rozdělení je pro dostatečně velké n (n>20) a malé p (p<0,05) bmožné nahradit Poissonovým rozdělením s intenzitou **n*p**

```
ns=500; %No Experiments
n=30;p=0.1; %Binomial (n,p)
lambda=n*p; %Poisson(lambda), T=1;
mean = lambda*T
ne=random('Poisson',lambda,ns,1);
```




```
nbin=10;
freq=hist(ne,0:nbin);
%absolute frequency
bar(0:nbin,freq/ns,'g')
%relative frequency
```



Normální a Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení je pro dostatečně velkou intenzitu (λ>1000) možné nahradit normálním rozdělením N(λ, $\sqrt{\lambda}$)

Poissonův tok

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

- Poissonův tok je **ordinární**

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - v_0(t) - v_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda t} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} + \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t}}{1} = 0$$

- Poissonův tok je tok s **nezávislými přírustky** (beznásledný)

$$v_0(t+u) = e^{-\lambda(t+u)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u} = v_0(t) \cdot v_0(u)$$
$$\mathrm{P}\left(N(t+u) = 0\right) = \mathrm{P}\left(N(t) = 0\right) \cdot \mathrm{P}\left(N(u) = 0\right)$$

- **Intenzita** Posissonova toku $E\left[N(1)\right] = \lambda$

$$E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

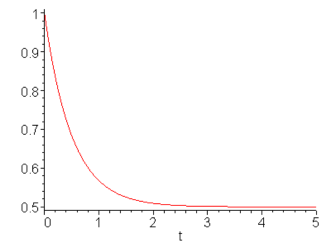
Poissonův tok

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Pravděpodobnost, že za interval délky t nedojde k žádné události:

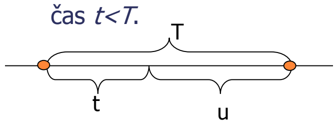
- $v_0(0)=1$
- klesající funkce proměnné t.
- $v_0(t+h)= v_0(t).\ v_0(h)$

$$v_0(t) = e^{-\lambda t}$$



Intervaly mezi událostmi jsou vzájemně nezávislé veličiny s exponenciálním rozdělením $P(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Př: Určete pst, že v elementárním toku nenastane v intervalu délky T žádná událost, víte-li že od vstupu předešlého požadavku už uplynul čas $t<T$.



$$\mathrm{P}(\tau > t+u / \tau > t) = \frac{\mathrm{P}(\tau > t+u)}{\mathrm{P}(\tau > t)} =$$

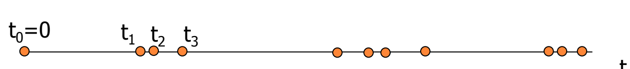
$$= \frac{v_0(t+u)}{v_0(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+u)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda u} = \mathrm{P}(\tau > u)$$

Poissonův proces

- Vytvořte posloupnost 50 časů t_i ; i = 1 … 50, v nichž nastala událost Poissonova procesu s intenzitou λ=1/2.

Intervaly mezi událostmi jsou vzájemně nezávislé veličiny ~ exp(λ)

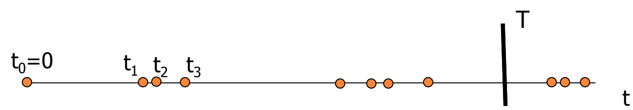
```
Interval = -log(1-rand(50,1))/lambda;
interval = random ('Exponential', 1/lambda, 50,1);
times=cumsum(interval);
plot(times,0,'b*','MarkerSize',10)
```



Poissonův proces

- Nakreslete histogram počtu událostí Poissonova procesu s intenzitou λ=1/2 [s] za čas T=60. Určete průměrný počet událostí za čas T.

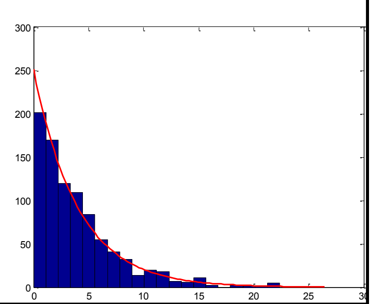
```
for i=1:100

end
hist(ne)
prumer_ne = mean(ne) % mean = lambda * T
```



Vlastnosti Poissonovského procesu

- Mějme pevně dán interval <0, *T*>, počet příjezdů za čas T: λT=*N*. Pak časy příchodů t_{i1}, t_{i2},…,t_{iN} jsou nezávislé ~ U (0, T).

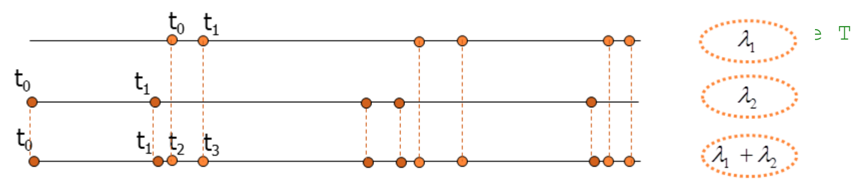
```
%% Generate N = lambda * T random number from uniform
distribution (0,T). These numbers are the points of events.
Verify the exponential distribution of inter-arrival times.
clear;clc;
lambda=1/4; %intenzity, mean interval=1/lambda [s]
T=60*60; %[s] Greater T is better for  histogramm
N=lambda * T;       %sample size
y=rand(N,1)*T;
times = sort(y);
interval = diff(times);
prumer_interval=mean(interval)
histfit(interval,20,'exponential')
```



Složení Poissonovského procesu

- Složením dvou Poissonovských procesů o intenzitách λ_1 a λ_2 vznikne opět Poissonův process s intenzitou $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

```
Superposition of two Poisson processes with intensities
lambda1 and lambda2 is a Poisson process with intensity
lambda=lambda1+lambda2.
clear;clc;
lambda1=1/4; %intensity, mean inteval=1/lambda [s]
lambda2=1/2;
```

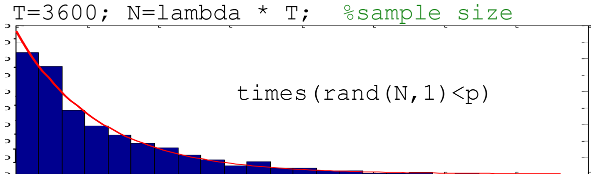



```
h=histfit(interval,20,'exponential')
```

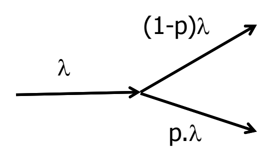

Dekompozice Poissonovského procesu

- Vybíráme-li s pstí p z daného Poissonovského procesu s intenzitou λ, pak výsledný proces je Poisonovský s intenzitou $p\,\lambda$.

```
Suppose Poisson process with rate lambda. Each event is
classified as type I  with probability p and as type II with
probability 1- p. Than events I form the Poisson process
with rate (lambda*p) and events II form Poisson process with
rate (lambda*(1-p))

p=1/3;         %probability for I type
lambda=1/2;    %intensity, mean inteval = 1/lambda [s]
T=3600; N=lambda * T;  %sample size
```



```
times(rand(N,1)<p)
```

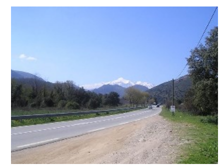


Stopařův paradox

1. Tramvaje jezdí pravidelně každých 5 minut. Na zastávku přijdeme náhodně. Průměrná doba čekání: 2,5 min

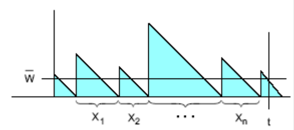
$$f(x)=\frac{1}{5};\quad 0\le x\le 5 \qquad E[X]=\frac{5}{2};$$

2. Stopař přijde náhodně k silnici, auta projíždějí náhodně, délka intervalu mezi automobily má exponenciální rozdělení



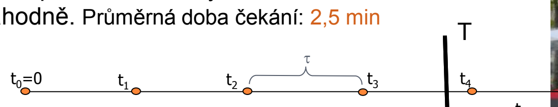
$$f(x)=12e^{-12x};\quad 0\le x \quad E[X]=\frac{1}{12};$$

Průměrná délka intervalu mezi automobily : 5 min
Průměrná doba čekání: 5 min



Stopařův paradox (Hitchhiker's paradox)

Tramvaje jezdí pravidelně každých 5 minut. Na zastávku přijdeme náhodně. Průměrná doba čekání: 2,5 min




```
%Subway goes regularly every 5 minutes. Hitchhiker comes
accidentally.
% Estimate the expected value of  waiting time
clear
times2=(0:5:60)'; %  [min]
for i=1:500        %No experiments
   T=rand*60;                    %hitchhiker's arrival
   r=find(times2 > T,1);         %times2(times2>T)
   ww(i)=times2(r)-T;            %waiting time
end
Mean_waiting=mean(ww) %1
hist(ww,30)          %Distribution of waiting time - Uniform
```

Stopařův paradox

Stopař přijde náhodně k silnici, auta projíždějí náhodně, délka intervalu mezi automobily má exponenciální rozdělení
Průměrná délka intervalu mezi automobily : 5 min
Průměrná doba čekání: 5 min

```
%Create a random events with exponential  distribution
%- interarrival time of Poisson process
% Mean of period - 5 minutes(time unit - 1 min)
lambda=1/5;
y=random('Exponential',1/lambda,30,1); %
%y=-log(rand(1,500))./lambda; %  interval between cars
times=cumsum(y);
endT=times(end);
```

```
Mean_waiting=mean(w)     %1/lambda
histfit(w,30,'exponential')
```

Simulation_1.m

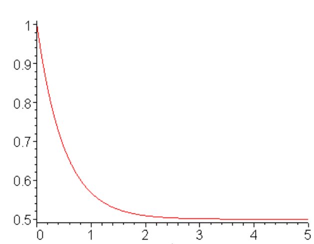
Poissonovský tok – graf diferenciálních přechodů

- Symbol *o* používáme při vyšetřování limitního chování funkcí, umožňuje zjednodušený zápis

$$f(x) = o(g(x))\ pro\ x \to \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

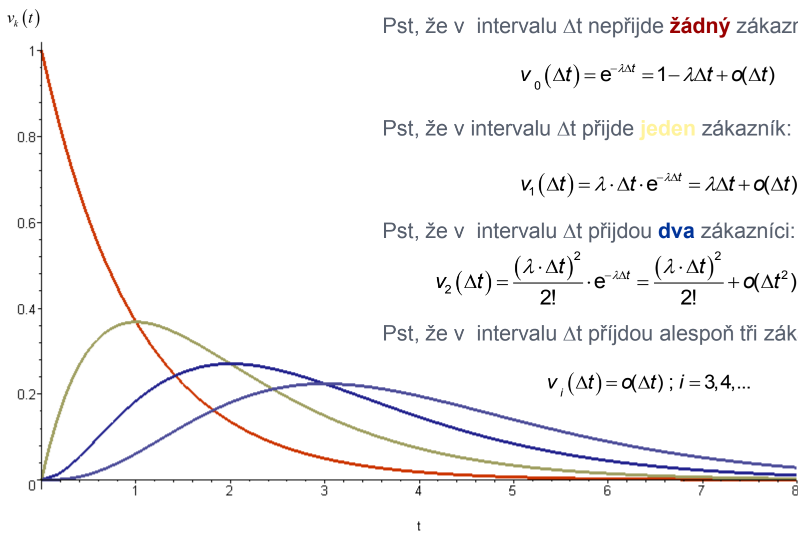
$$f(t) = o(t)\ pro\ t \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = 1 - \lambda t + o(t)$$



Příchod zákazníka
Poissonovský vstupní tok
s intenzitou λ

$$P(N(t)=k)=v_k(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$



Pst, že v intervalu Δt nepřijde **žádný** zákazník:

$$v_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt přijde jeden zákazník:

$$v_1(\Delta t)=\lambda\cdot\Delta t\cdot e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt přijdou **dva** zákazníci:

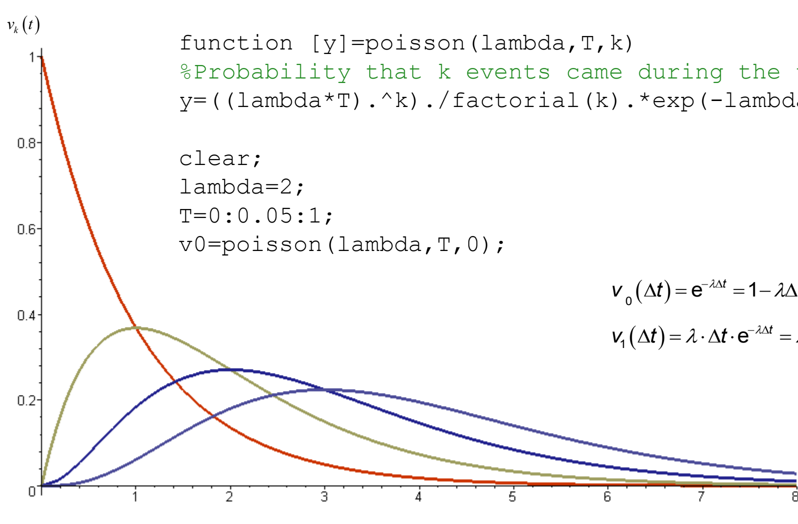
$$v_2(\Delta t)=\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda\Delta t}=\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^2}{2!}+o(\Delta t^2)=o(\Delta t)$$

Pst, že v intervalu Δt příjdou alespoň tři zákazníci:

$$v_i(\Delta t)=o(\Delta t)\ ;\ i=3,4,\ldots$$

Příchod zákazníka
Poissonovský vstupní tok
s intenzitou λ

$$P(N(t)=k)=v_k(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$$




```
function [y]=poisson(lambda,T,k)
%Probability that k events came during the time T.
y=((lambda*T).^k)./factorial(k).*exp(-lambda*T);

clear;
lambda=2;
T=0:0.05:1;
v0=poisson(lambda,T,0);
```

$$v_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$v_1(\Delta t)=\lambda\cdot\Delta t\cdot e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Poissonův proces – proces ryzího zrodu (pure birth process)

$$v_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

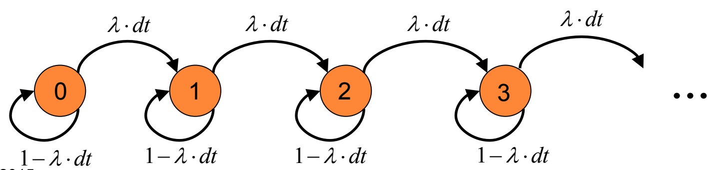
- V infinitesimálním časovém intervalu *dt* může nastat jen jedna událost s pravděpodobností λdt, nezávisle na příjezdech mimo interval.

$$v_0(t) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = 1 - \lambda t + o(t)$$

$$v_1(t) = (\lambda t) \cdot e^{-\lambda t} = \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 + \ldots = \lambda t + o(t)$$

$$v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda t} = 0 + o(t)$$

- Stav systému =počet událostí, které od počátečního času zkoumání nastaly

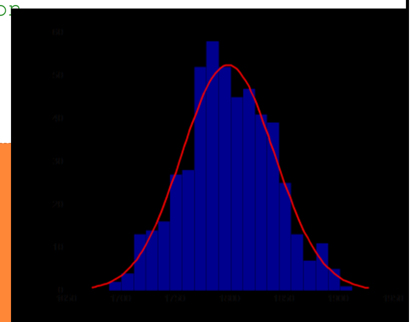


Diskretizace Poissonova procesu – Bernoulliho proces

```
% Discrete Pure birth process,
e.g. traffic flow with rate lambda [s],
% Count number of cars per time T
lambda = 1/2;    % E[inter-arrival time] = 1/lambda [s]
T=60*60;         % time of observation
dt=0.1;          % differential step
k=0;             % number of events

for t=0:dt:T
    if rand < lambda*dt
        k=k+1;
    end
end
fprintf('Theoretical mean of events %6.2f \n',lambda*T)
fprintf('Empirical number of events %d \n',k)
```

PureBirthProcess.m

```
% Discrete Pure birth process; n=1000 runs
% Count number of cars per time T,
% repeat n-times and verify the Poisson distribution
lambda = 1/2;    % E[inter-arrival time] = 1/lambda [s]
T=60*60;         % time of observation
dt=0.1;          % differential step
k=0;             % number of events
n=500;          % No expereiments
k=zeros(n,1);   % number of events
```

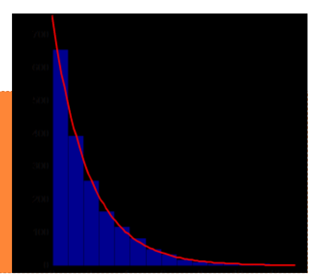


```
fprintf('Theoretical mean of events %d \n',lambda*T)
fprintf('Empirical mean of events %6.2f \n',mean(k))
%hist(k,20) % Poisson distribution
histfit(k,20,'poisson')
[h,p]=chi2gof(k,'cdf',{@poisscdf,lambda*T});
```

PureBirthProcess.m

Diskretizace Poissonova procesu - Exponenciální intervaly

```
% Verify the exponential distribution  between times
lambda = 1/2; % inter-arrival time = 1/lambda [s]
T=60*60;       % time of observation []
dt=0.05;        % differential step
k=0;           % number of events
te=[0]         % time of events
```



```
fprintf('Empir. and theor. mean of events %d, %d \n',k,lambda*T)
interval=diff(te);
histfit(interval,20,'exponential')
fprintf('Empir. and theor. average interval %6.2f, %6.2f
\n',mean(interval),1/lambda)
[h,p]=chi2gof(interval,'cdf',{@expcdf,1/lambda});
```

PureBirthProcess.m

Diskretizace Poissonova procesu – Bernoulliho proces

```
% Process evolution
% te: points in time

Nte=0:1:k; % stairs
plot(te,Nte)
```