ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA DOPRAVNÍ

Ústav aplikované matematiky (K611)

Semestrální práce z předmětu

Teorie hromadné obsluhy

Simulace obsluhy zákazníků v copycentru kolejí Strahov

8. 5. 2011

Michálek Jan, 1 – 66

Obsah

Seznam obrázků

1. Popis situace v praxi

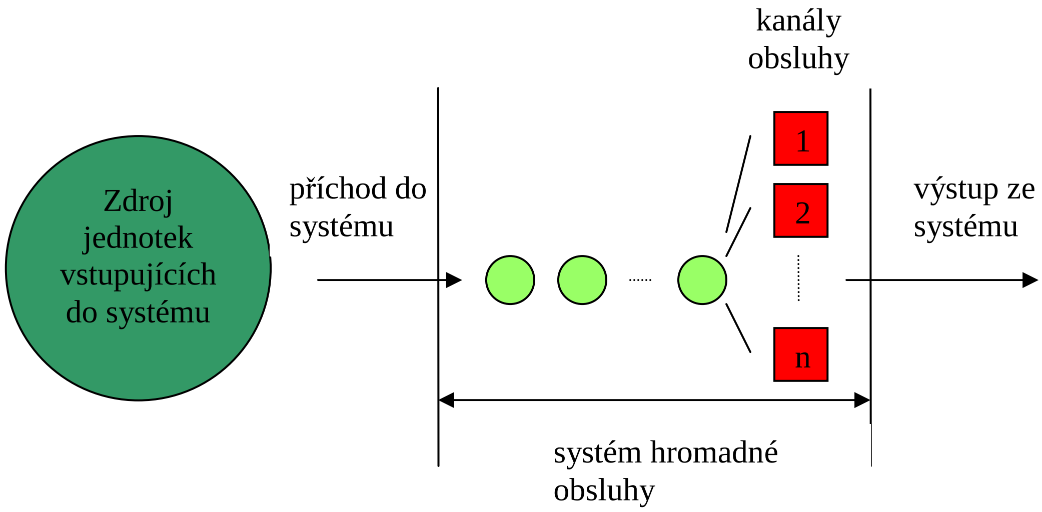
1.1. Základní popis

V rámci semestrální práce pro předmět Teorie hromadné obsluhy jsem si vybral téma simulace obsluhy zákazníků v copycentru kolejí Strahov. Centrum se nachází ve Vaníčkově ulici, Praha 6 v suterénu bloku číslo 1. Otevírací doba centra je pondělí až čtvrtek od 7:30 do 20:00 a v pátek od 7:30 do 16:00. Od dvanácti hodin je půlhodinová pauza na oběd, kdy je centrum uzavřeno. V centru je aplikován tzv. samoobslužný systém, kdy zákazník sám tiskne svoje materiály z USB disku přes zde umístěný počítač. Tento systém umožňuje snížení počtu obsluhujícího personálu, který tak může provádět ostatní přidružené činnosti (kompletace vytisknutých materiálů, vazba, prodej drobných papírnických potřeb, inkasování poplatků za služby). Systém funguje na principu pořadí přicházejících zákazníků. První příchozí je první obsloužen. Pro vytvoření modelu lze uvažovat, že vytvářející se fronta může nabývat libovolné délky. Vzhledem k hlavnímu zaměření centra na tisk budu předpokládat, že všichni zákazníci jdou tisknout a případné další požadavky (nákup papírnických potřeb) požadují až po skončení tisku.

V dopoledních hodinách se v centru kumuluje největší počet zákazníků. Na příkladu bych chtěl demonstrovat kolik zákazníků (v průměru) čeká na obsloužení, kolik času (v průměru) stráví ve frontě čekáním, kolik času (v průměru) stráví zákazník tisknutím a jak dlouho trvá celkový proces (v průměru). Pomocí výsledku simulace bych chtěl zjistit, zda by v době špičky nebylo vhodné posílit obsluhu tiskového centra.

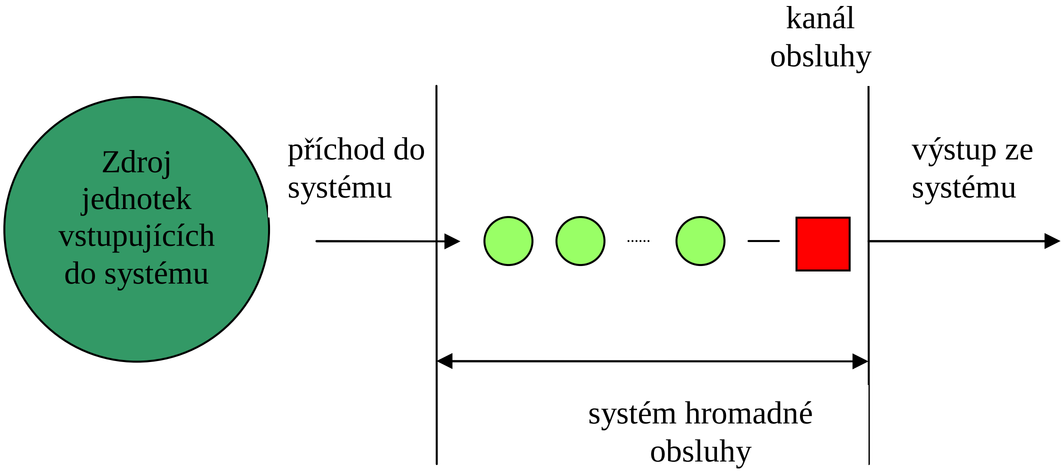
2. Formulace problému pomocí termínů THO

Systémem hromadné obsluhy rozumíme všechno, co je mezi příchodem požadavku do systému a jeho odchodem ze systému. To znamená jedna nebo více front čekajících požadavků a jedno nebo více obslužných zařízení (viz. Obr. 1).



Obr. 1 – obecná struktura systému hromadné obsluhy

Zvolený systém
Systém znázornění v této práci je jednokanálový s jedinou frontou bez určení priorit.



Obr. 2 – jednokanálový systém hromadné obsluhy s jednou frontou

Charakteristika jednokanálového systému

a) **Vstupní proud** – proces, při které vznikají požadavky na obsluhující jednotku. Vstup do systému je v tomto případě náhodný. Okamžiky příchodu jsou náhodné veličiny. Intervaly mezi příchody jsou popisovány pomocí některého z pravděpodobnostních rozdělení.
b) **Doba trvání obsluhy** - náhodná
c) **Disciplína fronty** – bez netrpělivosti (požadavky čekají dokud nejsou splněny)
d) **Čekací prostor** – místo mezi zdrojem jednotek a obslužnými kanály. Zde se vytváří fronta. V tomto případě je prostor nenulový (je-li nenulový a neomezený, dovoluje frontu jakékoliv délky)
e) **Režim fronty** – způsob určující formu přechodu čekajících požadavků z fronty do obsluhy. V tomto případě je to způsob FIFO (first-in/first-out)

Klasifikace systémů hromadné obsluhy
Kendallův zápis, zachycující a klasifikující standartní typy modelů hromadné obsluhy. Obsahuje posloupnost pěti znaků:

A / B / X / Y / Z

A - typ pravděpodobnostního rozdělení popisující intervaly mezi příchody požadavku do systému. Pro exponenciální rozdělení je používán symbol *M*, pro konstantní intervaly mezi příchody symbol *D*, pro Erlangovo rozdělení symbol E_k, pro normální rozdělení symbol *N*, pro nespecifikované rozdělení s nějakou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou symbol *G*.

B - typ pravděpodobnostního rozdělení popisující dobu trvání obsluhy. Používají se stejné symboly jako při popisu intervalu mezi příchody.

X - číslo udávající počet paralelně uspořádaných kanálů obsluhy.

Y - číslo udávající kapacitu systému hromadné obsluhy (počet prvků, které mohou být v systému přítomny) – pokud není tato kapacita omezená, použije se symbol $\propto$.

Z - režim fronty (FIFO, LIFO, SIRO, PRI).

Modelovaný systém je typu **M/M/1/∝/FIFO**. Předpoklám, že vstupy i výstupy mají pravděpodobnostní charakter s Poissonovým (Exponenciálním) rozdělením.

3. Popis řešeného problému

Do copycentra přijde v daném čase průměrně 15 zákazníků za hodinu. Počet vstupů se řídí Poissonovým rozdělením. Tisk a následná obsluha jednoho zákazníka trvá v průměru 3 minuty s předpokladem, že tato doba je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením. Zákazníci jsou obsluhováni v pořadí, v jakém do copycentra přišli. Malé procento zákazníků, kteří tisknout nepotřebují, ale chtějí pouze zakoupit papírnické potřeby, nebudu uvažovat, vzhledem k jejich minimálnímu počtu. Budu sledovat období jedné směny (12 hodin) v pondělí (otevírací doba 7:30 – 20:00). Určím střední intenzitu provozu, střední počet zákazníků čekajících ve frontě, střední počet zákazníků v systému, střední dobu, kterou zákazník čeká ve frontě a střední dobu, která uplyne od příchodu zákazníka do zaplacení a odchodu.

3.1. Použité veličiny

λ - střední intenzita vstupu: udává střední počet jednotek, které vstoupí do systému během dané časové jednotky.

μ - střední intenzita výstupu: vyjadřuje střední počet obsloužených jednotek během dané časové jednotky.

Platí: $\mu > \lambda$**,** c čili $\eta = \lambda / \mu < 1$, nemá –li fronta narůstat nade všechny meze.

Toto je **základní podmínka stabilizace systému** (při jejím splnění se jedná o systém bez explozívní fronty).

η - střední intenzita provozu (koeficient čekacího systému).

t – průměrná doba obsluhy

n – počet jednotek v systému

3.2. Výpočet analyticky

$\lambda = 15$

Za hodinu do centra přijde v průměru 15 zákazníků.

$\mu = 60/\ t = 60/\ 3 = 20$

Za hodinu systém obslouží v průměru 20 zákazníků.

Stabilita systému

$\eta = \lambda / \mu = 15/20 =$ **0,75**

- systém je stabilní
- s pravděpodobností 75 % bude muset zákazník čekat na obsluhu
- s pravděpodobností 25 % nebude v centru žádný zákazník

Základní charakteristiky systému

1) *střední počet zákazníků čekajících ve frontě*

   $n_f = \lambda^2 / \mu*(\mu-\lambda) = 15^2 / 20*(20-15) = 225/100 = \mathbf{2{,}25}$

2) *střední počet zákazníků v systému*

   $n_s = \lambda / \mu-\lambda = 15 / 20\text{-}15 = 15/5 = \mathbf{3}$

3) *střední doba čekání ve frontě*

$t_f = n_f / \lambda = \lambda / \mu*(\mu-\lambda) = 15 / 20*(20\text{-}15) = 15/100 = 0{,}15$

převod na minuty – 0,15 * 60 = **9**

4) *střední doba, kterou zákazník stráví v systému*

$t_s = n_s / \lambda = 1 / (\mu-\lambda) = 1 / (20\text{-}15) = 1/5 = 0{,}2$ hod = **12**

5) *pravděpodobnost, že v systému bude 10 a více zákazníku najednou p_n*:

$p_n = \eta_n (1-\eta)$ n = 0,1,2,…9

$p_0 = 0{,}75^0 (1 - 0{,}75) = 0{,}75^0 * 0{,}25 = 0{,}25$

$p_1 = 0{,}75^1 * 0{,}25 = 0{,}1875$

$p_2 = 0{,}75^2 * 0{,}25 = 0{,}1406$

$p_3 = 0{,}75^3 * 0{,}25 = 0{,}1054$

$p_4 = 0{,}75^4 * 0{,}25 = 0{,}0791$

$p_5 = 0{,}75^5 * 0{,}25 = 0{,}0593$

$p_6 = 0{,}75^6 * 0{,}25 = 0{,}0445$

$p_7 = 0{,}75^7 * 0{,}25 = 0{,}0334$

$p_8 = 0{,}75^8 * 0{,}25 = 0{,}025$

$p_9 = 0{,}75^9 * 0{,}25 = 0{,}0188$

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 = 0{,}9436$

1 – 0,9436 = 0,0564 = **5,64%**

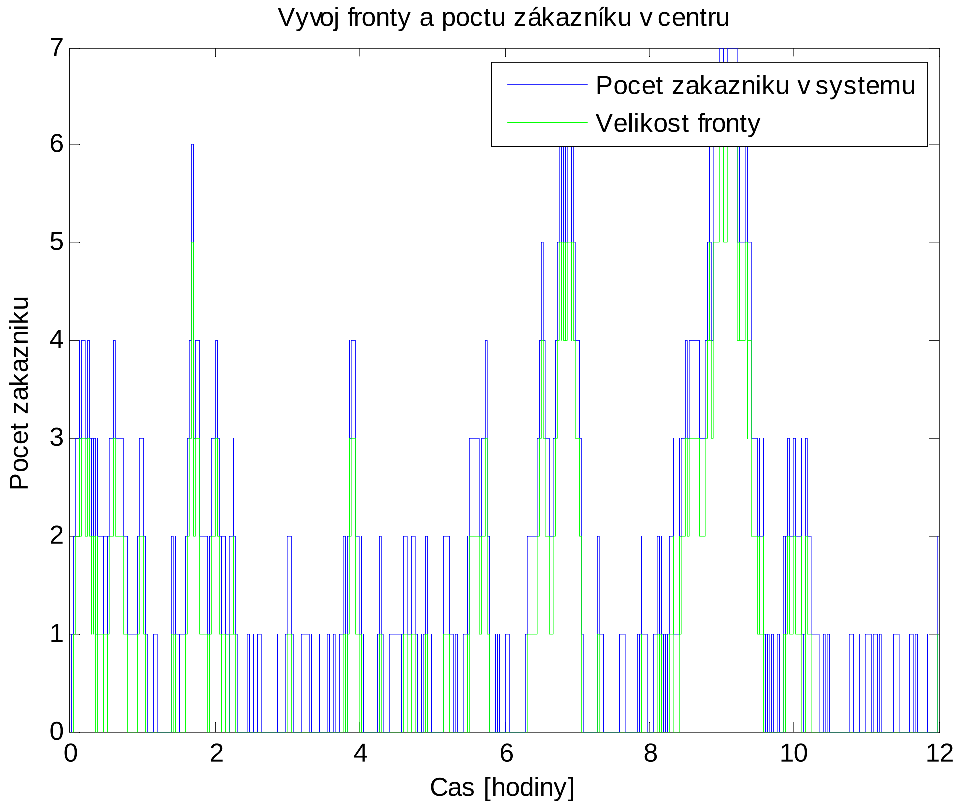
4. Simulace v programu MATLAB

Pro simulaci problému jsem použil program MATLAB (R2010b). Nejdříve jsem určil střední hodnoty vstupu (λ, v kodu lambda) a výstupu (μ, v kodu mu). Systém je schopen obsloužit jednoho zákazníka za tři minuty. Je sledován vývoj za 12 hodin. Pro přehlednost jsem výsledky vykreslil do dvou grafů (viz. Obr. 3 a Obr. 4).

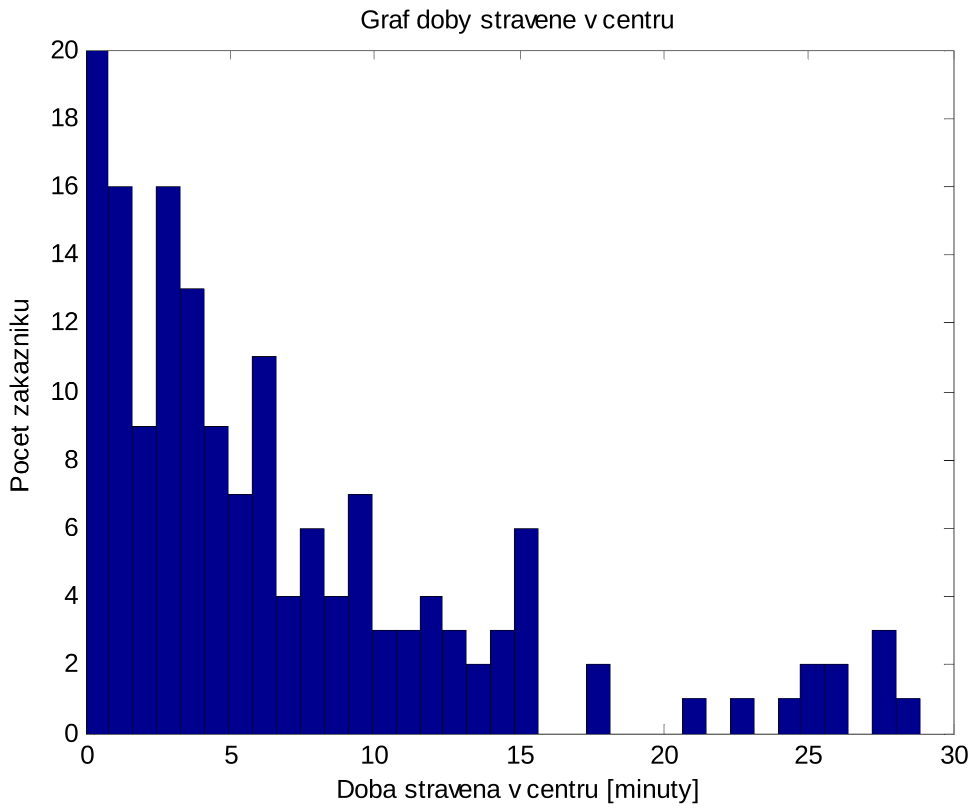
Vložený kód:

```
clear all; clc;
lambda=15; %stredni intenzita vstupu
mu=60/3;   %stredni intenzita vystupu
pocet_kanalu=1; %pocet obsluznych mist
doba_simulace=12; %celkovy cas simulace (v hodinach)
cas=0; %pocatecni cas
fronta=0; %pocet lidi ve fronte na zacatku simulace

%vektor ukazujici, kdy konci obsluha
obsluha=[ ];
prichod=cas+exprnd(1/lambda);
fronta_hist=[ ];

%1.sloupec – prichod zakaznika do systemu, 2.sloupec - zacatek obsluhy,
3.sloupec - konec obsluhy
zakaznici=[ ];
zakaznici_index=1;
while cas<doba_simulace
fronta_hist(end+1,:)=[cas fronta fronta+length(obsluha)];
cas_min=cas;

%okamzik prichodu pozadavku do systemu
if (isempty(obsluha))||(prichod<min(obsluha))
cas=prichod;
```

```
zakaznici(end+1,1)=cas;
if(length(obsluha)<pocet_kanalu) %tiskove misto je volne a ceka na dalsiho
zakaznika
obsluha=[obsluha,cas+exprnd(1/mu)];
zakaznici(end,2)=cas;
zakaznici(end,3)=obsluha(end);
zakaznici_index=zakaznici_index+1;
else %zakaznik musí cekat ve fronte
fronta=fronta+1;
end
prichod=cas+exprnd(1/lambda);
else

%okamzik obslouzeni zakaznika
[cas zakaznik]=min(obsluha);
if(fronta>0)
fronta=fronta-1;
obsluha(zakaznik)=cas+exprnd(1/mu);
zakaznici(zakaznici_index,2)=cas;
zakaznici(zakaznici_index,3)=obsluha(zakaznik);
zakaznici_index=zakaznici_index+1;
else
obsluha(zakaznik)=[ ];
end
end
end

%odstraneni neobslouzenych zakazniku z tabulky
zakaznici(end-fronta+1:end,:)=[ ];

%vykresleni fronty do grafu a vypocet prumerne delky fronty
figure
stairs(fronta_hist(:,1),fronta_hist(:,3))
hold on
stairs(fronta_hist(:,1),fronta_hist(:,2),'g')
title('Vyvoj fronty a poctu zákazníku v centru')
xlabel('Cas [hodiny]')
ylabel('Pocet zakazniku')
legend('Pocet zakazniku v systemu','Velikost fronty')
prumerna_delka_fronty=sum(diff(fronta_hist(:,1)).*fronta_hist(1:end-
1,2))/fronta_hist(end-1,1)

%vypocet pozadovanych casu [v min]
doba_v_systemu=(zakaznici(:,3)-zakaznici(:,1))*60;
doba_ve_fronte=(zakaznici(:,2)-zakaznici(:,1))*60;
prumerna_doba_v_systemu=mean(doba_v_systemu)
prumerna_doba_ve_fronte=mean(doba_ve_fronte)

%vykresleni doby stravene v centru
figure
hist(doba_v_systemu,35)
title('Graf doby stravene v centru')
xlabel('Doba stravena v centru [minuty]')
ylabel('Pocet zakazniku')
```


Vyvoj fronty a poctu zákazníku v centru
Pocet zakazniku v systemu
Velikost fronty
Pocet zakazniku
Cas [hodiny]
0
1
2
3
4
5
6
7
0
2
4
6
8
10
12

Obr. 3


Graf doby stravene v centru
Pocet zakazniku
Doba stravena v centru [minuty]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
15
20
25
30

Obr. 4

5. Závěr

Z výpočtu jsem zjistil, že v systému (přímo v centru) se nachází průměrně 3 zákazníci, z těchto 3 zákazníků v průměru 2,25 zákazníka čeká ve frontě. Zákazník stráví vyřizováním požadavku průměrně 12 minut (z toho 9 minut čeká ve frontě a 3 minuty je obsluhován). S pravděpodobností 5,64% bude v centru více než 10 zákazníků.

Podle simulace v MATLABu jsem zjistil, že zákazník stráví vyřizováním požadavku průměrně 6,8731 minuty, z čehož ve frontě stráví průměrně 4,0342 minuty. Průměrná délka fronty je 0,8929 minuty. Z těchto výsledků bych usoudil, že systém je nastavený správně. Pouze v případě větších výkyvů poptávky bych doporučil možnost otevření druhého obslužného kanálu.

Výsledná data simulace v MATLABu se výrazně liší od hodnot vypočtených analyticky, což je pravděpodobně způsobeno nízkým počtem dat zadaných do simulace.

6. Testy hypotéz

Test náhodného příchodu (správné nastavení systému)

H0 (nulová hypotéza): „zákazníci přicházejí náhodně“
HA (alternativní hypotéza): „zákazníci přicházejí v pevně daném (deterministickém) intervalu“
Hladina významnosti α: 0,05

Kód pro MATLAB:

```
Alfa= .05;
prac_doba= [720 720 720 720 480 720 720 720 720 480];
x = [175 193 164 188 126 190 178 185 169 134];
T = sum(prac_doba);
C = sum(x); %celkem lidí
p = C/T; %počet lidí za minutu
e = prac_doba*p; %celkem lidí za sledovanou dobu
chisquare_test(x,e)
```

<u>Výsledek:</u>

Chi2 test
****
p-hodnota: 0.7584
hodnota statistiky chi2: 5.814

P-hodnota > α => <u>zamítáme HA</u>, pacienti přicházejí do systému náhodně.

Test byl proveden z dat vygenerovaných simulací 10 pracovních dní.

Test věrohodnosti závěrů

H0: „Průměrná doba ve frontě neodpovídá naměřeným hodnotám“
HA: „Průměrná doba ve frontě se s počtem opakování simulací nesnižuje“
Hladina významnosti α: 0,05

Kód pro MATLAB:

```
alfa = 0.05;
x=[ 8.0803 5.7602 8.9885 16.8467 8.2235 7.1427 7.1729 3.3858 4.4499 9.7069 3.3814
10.5629 6.4959 3.6576 4.6690 8.4127 4.5085 9.3598 7.9898 4.4249 11.9097 10.0860
4.3018 5.4944 5.4069 4.7340 8.2607 3.2334 3.9940 5.6088];
d= 4.0342;

t_test(x,d,'<>');
```

Výsledek:

```
Test stredni hodnoty
 *******************
 p-hodnota:              2.092e-005
 hodnota statistiky t:      5.069
 stupne volnosti:             29
```

P-hodnota < α => zamítáme H0, průměrná doba se výrazněji nemění ani s rostoucím počtem opakování simulace.
Test byl proveden z dat vygenerovaných z 30 simulací.

7. Zdroje:

http://www.fd.cvut.cz/department/k611/PEDAGOG/K611THO.html
http://staff.utia.cas.cz/nagy/skola/PrpStat/Stat/statistika.html