autor: Martina Bečvářová, 2020

Matice, operace a jejich vlastnosti

I. Sčítání matic

- sčítat lze jen matice téhož typu
- výsledkem součtu dvou matic je matice téhož typu

$A = (a_{ij})$ $m \times n$

$B = (b_{ij})$ $m \times n$

$C = A + B = (c_{ij})$ $m \times n$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}, \ \forall i = 1, \dots, m, \ \forall j = 1, \dots, n$$

1. Sečtěte matice

$$\underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} + \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Poznámka: - A a $-A$
- nulová matice

$$\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}} + \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow$$ nelze, matice nejsou téhož typu

2. Najděte opačnou matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad -A = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka: - typ se zachová
- každý prvek matice vynásobíme -1

Poznámka:

1) $m \neq n$ ... obdélníková matice
   $m = n$ ... čtvercová matice

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m; \ \forall j = 1, \dots, n$

nulová matice

3) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a_{ij} = 1 & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$

jednotková matice

3. Zdůvodněte, proč

1) $A + B = B + A$ $\quad \forall A, B, C$, které lze sečíst

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

1) komutativita sčítání
2) asociativita sčítání

3) $\forall A, \exists! -A$ ... existence opačné matice.
($\exists!$ = právě jediná)

II. Násobení matice skalárem

$A = (a_{ij}) \quad m \times n$

$c \in \mathbb{R}$

$c \cdot A = (b_{ij}) \quad m \times n$

$b_{ij} = c \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, \ \forall j = 1, \dots, n$

- při násobení skalárem se nemění typ matice

1) Vypočtěte

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

— vynásobíme každý prvek matice

2) Zdůvodněte, proč

$1 \cdot A = A$

$0 \cdot A = \mathcal{O}$ (nulová matice) $\quad \forall A$

$-1 \cdot A = -A$ (opačná matice)

III. Násobení matic

$A = (a_{ij})$ $\quad m \times n$

$B = (b_{jk})$ $\quad n \times p$

$C = A \cdot B = (c_{ik})$ $\quad m \times p$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad \forall i = 1, \dots, m, \ \forall k = 1, \dots, p$$

- druhá matice má tolik řádků, kolik má první matice sloupců
- při násobení matic se může změnit typ matice
- výsledná matice má tolik řádků, kolik má první matice; má tolik sloupců, kolik má druhá matice

1) Vypočtěte následující součiny matic, pokud existují

- $$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 3 & -1\cdot 5 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ +1 & 6 \end{pmatrix}$$

! $A \cdot B \neq B \cdot A$

pozor na pořadí násobených matic

- $$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \longrightarrow \text{neexistuje}$$

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$ neexistuje

$\underbrace{2\times 2 \quad \neq \quad 4\times 2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 23 & 29 \\ 33 & 41 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}$

$\underbrace{4\times 2 \quad = \quad 2\times 2}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E jednotková matice

! $A \cdot E = E \cdot A = A$ ($\forall A$, pokud ~~lze~~ násobení realizovat)

Komutující matice

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ obecně násobení matic není komutativní,
- jeli však $A \cdot B = B \cdot A$ říkáme, že A a B komutují!

1) Rozhodněte, zda matice A a B komutují!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 11 & 17 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$\longrightarrow$ A a B nekomutují!

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Naleznĕte všechny matice B, které s ní komutují.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rovnost matic
$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 5c & 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+5b \\ c & 2c+5d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a+2c &= a && \longrightarrow c=0 \quad \vee \\ \bullet\ b+2d &= 2a+5b && \\ 5c &= c && \Longrightarrow c=0 \quad \vee \\ 5d &= 2c+5d && \longrightarrow c=0 \quad \vee \end{aligned}\right\} \underline{c=0}$$

$$\bullet \quad 2d = 2a+4b$$

$$\underline{d = a+2b, \quad a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\underline{B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+2b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}}$$ všechny komutující matice s maticí A

IV. Transponování matice

$A = (a_{ij}) \quad m \times n$

$A^T = (a_{ji}) \quad n \times m$

- „řádek se stane sloupcem"
- u obdélníkové matice se změní typ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$A \cdot A^T$ … symetrická matice

$$A^T \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

$A^T A$ … symetrická matice

Poznámka: AA^T, A^TA ... vždy lze provést násobení
výsledné matice jsou symetrické
[zopakujte, co je symetrická matice]

$$(A^T)^T = A$$

V. Hodnost matice

- maximální počet lineárně nezávislých řádků
- $A = (a_{ij})$, $m \times n$ $\longrightarrow$ $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- maticové úpravy: - záměna řádků (sloupců)
  - vynásobení řádku (sloupce) nenulovým skalárem
  - přičtení řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci)

$\longrightarrow$ úpravy nemění hodnost matice

1) Vypočtěte hodnost matice

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -13 \end{pmatrix} \qquad h(A) = 2$$

2LN řádky

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad h(A) = 3$$

3LN řádky

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \qquad h(A) = 2$$

2LN řádky

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \\ 1-i & i & -1 \end{pmatrix}$, počítáme v $\mathbb{C}$ $[i \cdot i = -1 \,!]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \\ 1-i & i & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -i \\ -1+i \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 2-i & 3+i \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 2-i \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 2-i & 3+i \\ 0 & 0 & -7-4i \end{pmatrix} \qquad h(A) = 3$$

3 LN řádky

2) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ stanovte hodnost matice

- $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ 3 & 2a & -1 \\ -a^2 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ 3 & 2a & -1 \\ -a^2 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2a & -1 \\ a & -2 & 1 \\ -a^2 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ -3 \\ +a \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2a & -1 \\ 0 & 2a^2+6 & -a-3 \\ 0 & -2a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2a+1 \\ 2a^2+6 \end{matrix}$$

$3 \neq 0$, na prvním řádku na prvním místě je vždy nenulová hodnota

nemám žádnou vedlejší podmínku; upravovaný řádek nenásobím výrazem s parametrem

$2a^2+6 \neq 0 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$!!

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2a & -1 \\ 0 & 2a^2+6 & -a-3 \\ 0 & 0 & -7a+3 \end{pmatrix} ?$$

I. $-7a+3 = 0$? ... ano $a = \frac{3}{7}$ ... $h(A) = 2$

II. $a \neq \frac{3}{7}$ ... $h(A) = 3$

DÚ: $A = \begin{pmatrix} a & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ $h(A) = ?$

[I. $a = 2$ $h(A) = 2$

II. $a = \frac{1}{6}$ $h(A) = 2$

III. $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{1}{6}$ $h(A) = 3$]

VI. Inverzní matice

A … čtvercová, regulární $\longrightarrow \exists!\, A^{-1} : \; A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A = E$

A^{-1} … inverzní matice k matici A

$$(A|E) \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{řádkové}} (E|A^{-1})$$

1) Vypočtěte inverzní matici k matici A, pokud existuje

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A … 2×3, A není čtvercová, A^{-1} neexistuje

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

A… 3×3, A je čtvercová, A^{-1} může existovat

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2,\; 2 \neq 3 \longrightarrow$ A není regulární

$\longrightarrow$ A^{-1} neexistuje

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Kontrola 1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

Dú: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $A \cdot B$, $(AB)^{-1}$. 9)

$$\left[\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ (AB)^{-1} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right]$$

Pozmámka: A, B ... regulární čtvercové matice

$\longrightarrow (A \cdot B)^{-1}$ existuje

$\longrightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (Pozor na pořadí)

2) Vypočtěte:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = ?, \; (AB)^{-1} = ?$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 & 12 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(AB)^{-1}$

$$\left(\begin{matrix} -2 & 25 & 12 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} + \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} -2 & 25 & 12 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 25 & 8 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\right)\begin{matrix} \\ -5 \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} -2 & 25 & 12 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{matrix}\right)\begin{matrix} + \\ + \\ 6 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} -2 & 25 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 7 & -30 & -12 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{matrix}\right)\begin{matrix} + \\ -5 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 & -10 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{matrix}\right)\begin{matrix} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\middle|\underbrace{\begin{matrix} -1 & 5 & +1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 50 & 10 \\ 2 & -8 & -4 \\ -5 & 25 & 10 \end{pmatrix}}$$

Dú: Vypočtěte A^{-1}, B^{-1}, $A^{-1} \cdot B^{-1}$, $B^{-1} \cdot A^{-1}$, porovnejte $A^{-1} \cdot B^{-1}$ a $B^{-1} \cdot A^{-1}$, vypočtěte $(AB) \cdot A^{-1} \cdot B^{-1}$, $(AB) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})$.

VII. Maticové rovnice

1) Řešte rovnici $A \cdot X = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

typ $A \cdot X = B$ $\quad$ A… regulární $[h(A) = 3] \longrightarrow A^{-1}$ existuje, je jednoznačně určena

$A \cdot X = B$ | vynásobíme A^{-1} zleva

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\underbrace{E \cdot X}_{} = A^{-1} \cdot B$$

$$\underline{\underline{X = A^{-1} \cdot B}} \longrightarrow X \text{ existuje a je jednoznačně určena}$$

1) $A \longrightarrow A^{-1}$

2) $X = A^{-1} \cdot B$ $\quad$! pozor na násobení ze správné strany

1) nalezení A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ )+ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right))+ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -5 \\ \sim \\ 3 \end{matrix})+$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +5 \\ -2 \end{matrix})+ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

2) $$X = -A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -11 & -5 & -23 \\ 8 & 10 & 14 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$

Poznámka:

$X \cdot A = B$, A regulární

$\Longrightarrow$ $\underline{X = B \cdot A^{-1}}$ [Násobení ze správné strany]

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot X = B$

A... vidíme, že A není regulární $h(A) = 2!$, předchozí postup nelze použít

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(A) = 2$$

2 LN řádky

$$(A|B) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

3 LN řádky

$h(A|B) = 3$

$h(A) = 2 \neq h(A|B) = 3$

$\longrightarrow$ úloha nemá řešení, X neexistuje

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot X = B$

A... vidíme, že A není regulární

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(A) = 2$$

$$(A|B) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad h(A|B) = 2$$

$h(A) = h(A|B) = 2$

$\longrightarrow$ X existuje

A 2×2

B 2×2

$$\underset{2 \times 2}{A} \cdot \underset{2 \times 2}{X} = \underset{2 \times 2}{B} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 1 \\ 2a + 4c &= 2 \\ 2b + 4d &= 2 \end{aligned}$$

4 rovnice o 4 neznámých
- třetí násobkem první
- čtvrtá násobkem druhé

$a + 2c = 1 \rightarrow a = 1 - 2c,\ c \in \mathbb{R}$
$b + 2d = 1 \rightarrow b = 1 - 2d,\ d \in \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} 1-2c & 1-2d \\ c & d \end{pmatrix},\quad c, d \in \mathbb{R}$$

všechna řešení rovnice $A \cdot X = B$

Poznámka: $A \cdot X = B$ je řešitelná právě tehdy, když $h(A) = h(A|B)$.

DÚ 1) • $A \cdot X = B$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ‖ X neexistuje

• $A \cdot X = B$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ‖ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2) Zopakujte pojmy: regulární matice
singulární matice
symetrická matice
antisymetrická matice
ortogonální matice
ortonormální matice
diagonální matice
horní trojúhelníková matice