Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Řekneme, že vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže nulový vektor lze vyjádřit pouze jako jejich triviální lineární kombinaci. Nejsou-li vektory lineárně nezávislé, říkáme, že jsou lineárně závislé.

LN $\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = o \iff (a_1, a_2, \dots, a_k) = (0, 0, \dots, 0)$

LZ $\quad$ alespoň jedno a_i $(i = 1, \dots, k)$ je nenulové

Věta

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když některý z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Poznámka: LZ … lineárně závislé
LN … lineárně nezávislé

1) Vektory $u_1 = (3,-2)$, $u_2 = (-2,1)$, $u_3 = (7,-4)$. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé.

SŠ:

$$a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \vec{o}$$

– tento postup známe

$$a(3,-2) + b(-2,1) + c(7,-4) = (0,0)$$
$$(3a,-2a) + (-2b,b) + (7c,-4c) = (0,0)$$
$$(3a-2b+7c, -2a+b-4c) = 0,0)$$

$$3a - 2b + 7c = 0$$
$$-2a + b - 4c = 0 \quad 2 \;)+$$
$$-a - c = 0$$

$\underline{\underline{a = -c,\ c \in \mathbb{R}}}$ $\qquad b = 2a + 4c = -2c + 4c = \underline{\underline{2c}}$

tedy $\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad -c\vec{u_1} + 2c\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \vec{o}$

$$-c \cdot \underbrace{(\vec{u_1} - 2\vec{u_2} - \vec{u_3})} = \vec{o}$$

netriviální lineární kombinace vektorů je rovna o

$\longrightarrow$ u_1, u_2, u_3 jsou LZ

$\vec{u_1} - 2\vec{u_2} + \vec{u_3} = \vec{o}$

$\rightsquigarrow \vec{u_3} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2}$ $\quad$ $\vec{u_3}$ je LK $\vec{u_1}$ a $\vec{u_2}$ (např.)

VŠ:

$$\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\\7&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&-2\\0&-1\\0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&-2\\0&-1\\\boxed{0}&\boxed{0}\end{pmatrix}$$

ve skupině se objevil nulový vektor

$\longrightarrow$ vektory jsou lineárně závislé

Poznámka: VŠ metoda je efektivnější a rychlejší; budeme jí dávat přednost.

2. $\vec{a}=(1,-1,-2)$, $\vec{b}=(-2,-1,1)$, $c=(-1,1,-2)$. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ LZ či LN.

SŠ $k\cdot\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{o}$

$k(+1,-1,-2)+l(-2,-1,1)+m(-1,1,-2)=(0,0,0)$

$(k-2l-m,\ -k-l+m,\ -2k+l-2m)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned}k-2l-m&=0\\-k\quad-l+m&=0\\-2k\quad+l-2m&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3k-m&=0\\-3k-5m&=0\end{aligned}$$

$4m=0 \quad m=0 \qquad k=-\frac{1}{3}m=0 \qquad l=-k+m=0$

$\longrightarrow$ nulový vektor lze získat pouze jako <u>triviální</u> LK vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $\longrightarrow$ vektory jsou LN

VŠ:

$$\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&-1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-3&-3\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

3 LN vektory $\Longrightarrow$ LN

[v odstupňovaném tvaru]

3. $\vec{p}=(4,8,-24)$, $\vec{q}=(-6,-12,36)$. Zjistěte, zda jsou LZ.

$$\left.\begin{aligned}p&=(4,8,-24)=4\cdot(1,2,-6)\\q&=(-6,-12,36)=-6\cdot(1,2,-6)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \text{LZ}$$

VŠ

$$\begin{pmatrix}4&8&-24\\-6&-12&36\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&-24\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{0}\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ LZ

4. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
$\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$
$\vec{c} = 4\vec{j}$

$\vec{i}, \vec{j}$ jsou LN vektory. Zjistěte, zda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou LZ?

SŠ: $\boxed{k\cdot\vec{a} + l\cdot\vec{b} + m\cdot\vec{c} = \vec{o}}$

$$2k\vec{i} + 3k\vec{j} + 3l\vec{i} + 2l\vec{j} + 4m\vec{j} = \vec{o}$$

$$(2k + 3l)\vec{i} + (3k + 2l + 4m)\vec{j} = \vec{o}$$

$\vec{i}, \vec{j}$ jsou LN vektory (ze zadání)

$\longrightarrow$ pouze jejich triviální LK je rovna $\vec{o}$

$$\begin{array}{rl} 2k + 3l = 0 & 2 \\ 3k + 2l + 4m = 0 & -3 \;)+ \\ \hline -5k - 12m = 0 & \end{array}$$

$k = -\frac{12}{5}m, \ \forall m \in \mathbb{R}$

$l = -\frac{2}{3}k = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)m = \frac{8}{5}m$

$\forall m \in \mathbb{R}$: $-\frac{12}{5}m\,(2,3) + \frac{8}{5}m\,(3,+2) + m\,(0,4) = (0,0)$

$\longrightarrow$ netriviální LK dává nulový vektor

$\longrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou LZ

VŠ: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & +2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3 \\ -2 \;)+ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -4 \\ 5 \;)+ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ \boxed{0 \quad 0} \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ LZ

5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou LN vektory

$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
$\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Zjistěte, zda vektory $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ jsou LZ.

SŠ: $\boxed{k\vec{m} + l\vec{n} + h\vec{p} = \vec{o}}$

$$k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} + l\vec{a} + l\vec{b} - l\vec{c} + h\vec{a} - h\vec{b} + h\vec{c} = \vec{o}$$

$$(k + l + h)\vec{a} + (k + l - h)\vec{b} + (k - l + h)\vec{c} = \vec{o}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou LN (ze zadání)

$\longrightarrow$ pouze triviální LK je rovna $\vec{o}$

$$\begin{aligned} k + l + h &= 0 \\ k + l - h &= 0 \\ k - l + h &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix})+ \\ )+ \end{matrix}$$

$$2k + 2l = 0$$
$$2k = 0$$
$$k = 0 \qquad l = -k = 0 \qquad h = -k - l = 0$$

$\longrightarrow$ pouze triviální lineární kombinace vektorů $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ je rovna $\vec{o}$

$\longrightarrow$ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ jsou LN

VŠ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1)+\,-1)}{\underset{+\,+}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ LN

C. $\vec{p} = (2,-3)$, $\vec{q} = (1,2)$; $\vec{a} = (9,4)$, $\vec{b} = (-8,12)$.

Vyjádřete vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jako LK $\vec{p}$ a $\vec{q}$.

$k\vec{p} + l\vec{q} = \vec{a}$

$k(2,-3) + l(1,2) = (9,4)$

$(2k + l, -3k + 2l) = (9,4)$

$$\begin{aligned} 2k + l &= 9 \quad \cdot(-2) \\ -3k + 2l &= 4 \end{aligned} \quad)+$$

$$-7k = -14$$
$$k = 2$$
$$l = 9 - 2k = 9 - 4 = 5$$

$\underline{\underline{\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}}}$

$k\vec{p} + l\vec{q} = \vec{b}$

$k(2,-3) + l(1,2) = (-8,12)$

$(2k + l, -3k + 2l) = (-8,12)$

$$\begin{aligned} 2k + l &= -8 \quad \cdot(-2) \\ -3k + 2l &= 12 \end{aligned} \quad)+$$

$$-7k = 28$$
$$k = -4$$
$$l = -8 - 2k = -8 + 8 = 0$$

$\underline{\underline{\vec{b} = -4 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q}}}$

(to je vidět ze zadání)

7. $\vec{p} = (1,2,3)$, $\vec{q} = (0,1,1)$; $\vec{a} = (1,4,5)$, $\vec{b} = (1,3,2)$. 5}

Napište vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{p}$ a $\vec{q}$.

$k\vec{p} + l\vec{q} = \vec{a}$

$k(1,2,3) + l(0,1,1) = (1,4,5)$

$(k, 2k+l, 3k+l) = (1,4,5)$

$k = 1 \rightarrow k = 1$

$2k+l = 4 \rightarrow l = 4-2k = 4-2\cdot 1 = 4-2 = 2$

$3k+l = 5$

! zkouška pro 3. rovnici

$L = 3k+l = 3\cdot 1+2 = 3+2 = 5$

$P = 5$

$L = P$

$\longrightarrow$ úloha má řešení

$\vec{a} = 1\cdot\vec{p} + 2\vec{q}$

$k\cdot\vec{p} + l\vec{q} = \vec{b}$

$k(1,2,3) + l(0,1,1) = (1,3,2)$

$(k, 2k+l, 3k+l) = (1,3,2)$

$k = 1 \longrightarrow k = 1$

$2k+l = 3 \quad l = 3-2k = 3-2\cdot 1 = 3-2 = 1$

$3k+l = 2$

! zkouška pro 3. rovnici

$L = 3k+l = 3\cdot 1+1 = 3+1 = 4$

$P = 2$

$L \neq P$

$\longrightarrow$ úloha nemá řešení, vektor $\vec{b}$ nelze vyjádřit jako LK vektorů $\vec{p}$ a $\vec{q}$

8. $\vec{p} = (3,-2,1)$, $\vec{q} = (-1,1,-2)$, $\vec{r} = (2,1,3)$.

Napište $\vec{a} = (11,-6,5)$ jako LK vektorů $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

$$k\vec{p} + l\vec{q} + m\vec{r} = \vec{a}$$

$$k(3,-2,1) + l(-1,1,-2) + m(2,1,3) = (11,-6,5)$$

$$\begin{aligned} 3k - l + 2m &= 11 \\ -2k + l + m &= -6 \\ k - 2l + 3m &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k + 3m &= 5 \\ -3k + 5m &= -7 \end{aligned}$$

$$14m = 8$$

$$\underline{\underline{m = \frac{4}{7}}}$$

$$k = 5 - 3m = 5 - \frac{12}{7} = \underline{\underline{\frac{23}{7}}}$$

$$3k - l + 2m = 11$$

$$l = 3k + 2m - 11 = \frac{69}{7} + \frac{8}{7} - \frac{77}{7} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\vec{a} = \frac{23}{7}\vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{4}{7}\vec{r}}}$$

DÚ: Lze $\vec{a}$ vyjádřit jen jako LK $\vec{p}$ a $\vec{q}$?

jen jako LK $\vec{p}$ a $\vec{r}$?

→ zkuste odpovědět bez počítání (jen na základě předchozího výpočtu)

DÚ: Nacvičte výpočet VŠ cestou.

Množina generátorů, báze

1. Z množiny $M = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vyberte nějakou bázi prostoru V, který je generován množinou M.

báze = lineárně nezávislá množina generátorů

Z M vybereme maximální počet LN vektorů

$u_1 = (1, 0, 2, -3)$
$u_2 = (3, 2, 1, -5)$
$u_3 = (-1, 2, 1, -2)$
$u_4 = (-3, 0, 2, 0)$

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3LN vektory

$\Longrightarrow B = \{u_1, u_2, u_3\}$

nebo

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

Poznámka: u_4 lze vyjádřit jako LK u_1, u_2, u_3

$$u_4 = u_1 - u_2 + u_3$$

- bází je nekonečně mnoho [závisí na pořadí vektorů, báze $B = \{2u_1 - u_2, 3u_3\}$ je jiná, než $\{u_1, u_2, u_3\}$, byť definuje stejný prostor]
- všechny $\dim V = 3$ (dimenze, počet vektorů v bázi u konečně generovaných vektorových prostorů)

2) $u_1 = (3,-1,-3,2)$, $u_2 = (1,2,0,-3)$, $u_3 = (1,2,1,2)$, $u_4 = (5,1,-3,2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \\ 0 & -9 & -3 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{4 LN vektory}$$

$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ (např.) $\dim V = 4$

3) $u_1 = (3,1,5,4)$, $u_2 = (2,2,3,3)$, $u_3 = (1,-1,2,1)$, $u_4 = (1,3,1,2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 2 LN vektory

$B = \{u_1, u_2\}$ $\dim V = 2$

Poznámky

1) Z množiny generátorů lze vždy vybrat bázi
$\longrightarrow$ úloha má vždy řešení.

2) Povolené operace:
   1) prohození řádků
   2) vynásobení řádku nenulovou konstantou
   3) přičtení násobku řádku k jinému řádku

cíl: úprava na odstupňovaný tvar („LZ či LN" je vidět)

4. Najděte bázi prostoru V, který je generován množinou M, báze B musí obsahovat vektor v.

$$M = \{ \overset{u_1}{(1,2,3)}, \overset{u_2}{(0,1,3)} \} \qquad v = (1,4,0).$$

$$\begin{array}{c} v \\ M \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

→ v, u_1, u_2 jsou LN

→ v nelze napsat jako LK u_1 a u_2

→ v neleží v prostoru V, který je generován množinou M

→ **úloha nemá řešení**

5. $M = \{ (1,2,3), (0,1,3) \} \qquad v = (2,3,3)$

$$\begin{array}{c} v \\ M \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LN vektory

→ v, u_1, u_2 jsou LZ

→ v lze napsat jako LK u_1 a u_2

→ v leží v prostoru V, který je generován množinou M.

→ **úloha má řešení**

$B = \{ v, u_1 \}$ $\qquad$ $\dim V = 2$

6. $M = \{ (1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,2,1,0) \} \qquad v = (2,4,2,0).$

$$\begin{array}{c} v \\ M \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LN vektory

$B = \{ v, u_1 \}$ $\qquad$ $\dim V = 2$

Dú: $M = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\qquad v = (1,-1,3,7)$ 4)

$u_1 = (0,1,-3,4)$
$u_2 = (2,2,2,2)$
$u_3 = (1,4,-4,-1)$

Najděte bázi B, prostoru generovaného množinou M, která obsahuje vektor v.

Dú: V všech příkladů rozhodněte, zda M je jen množina generátorů, resp. zda je to báze.

Souřadnice vektoru

1). $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
$v = (5,6,7)$.

Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B.

→ vektor v vyjádříme jako LK vektorů báze, koeficienty LK jsou hledané souřadnice

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = v$ $\qquad$ pořadí vektorů v bázi je dané!

$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (5,6,7)$

$(a,b,c) = (5,6,7)$

$a = 5$
$b = 6$
$c = 7$

$\langle v \rangle_B = (a,b,c) = (5,6,7)$

(to jsme viděli bez počítání)

2) $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,0)\}$ $\qquad v = (5,6,7)$

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = v$

$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,0) = (5,6,7)$

$$\begin{aligned} a + b \quad &= 5 \\ a \quad + c &= 6 \\ b \quad &= 7 \end{aligned}$$

$\to b = 7$ $\qquad a = 5 - b = 5 - 7 = -2$
$c = 6 - a = 6 - (-2) = 8$

$\langle v \rangle_B = (a,b,c) = (-2,7,8)$

Zkouška: $-2(1,1,0)+7(1,0,1)+8(0,1,0)=$

$= (-2,-2,0)+(7,0,7)+(0,8,0)=(5,6,7)$ OK

3. $B=\{(3,4,1,2),(2,0,1,2),(1,3,4,0)\}$

$v=(0,-1,4,0)$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B.

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = v$

$a(3,4,1,2)+b(2,0,1,2)+c(1,3,4,0)=(0,-1,4,0)$

$$\begin{aligned} 3a+2b+c &= 0 \\ 4a +3c &= -1 \quad 4 \\ a+b+4c &= 4 \quad -3 \;\big|+ \\ 2a+2b &= 0 \;\big|:2 \end{aligned}$$

$a+b=0 \qquad a=-b$

$13a-3b=-16$

$13a+3a=-16$

$\underline{\underline{a=-1}} \qquad \underline{\underline{b=1}} \qquad 4a+3c=-1$

$c=\frac{-1-4a}{3}=\underline{1}$

! zkouška pro 1. rovnici

$L = 3a+2b+c = 3(-1)+2\cdot 1+1=-3+3=0$

$P=0$

$\underline{\underline{L=P}}$

$\longrightarrow$ soustava má řešení! $\longrightarrow$ v lze vyjádřit jako LK u_1, u_2, u_3

$\longrightarrow$ souřadnice existují!

$$\underline{\underline{\langle v\rangle_B = (a,b,c) = (-1,1,1)}}$$

Zkouška: $-1\cdot(3,4,1,2)+1(2,0,1,2)+1(1,3,4,0)=$

$=(-3,-4,-1,-2)+(2,0,1,2)+(1,3,4,0)=$

$=(0,-1,4,0)=v$

OK

4. $B = \{(1,2,3), (0,1,1)\}$ 6.)

$v = (2,3,0)$ $\langle v \rangle_B = ?$

$a u_1 + b u_2 = v$

$a(1,2,3) + b(0,1,1) = (2,3,0)$

$a=2$

$2a+b=3$

$3a+b=0$

$\longrightarrow$ $a=2$

$b = 3-2a = 3-4 = -1$

! zkouška pro 3. rovnici

$L = 3a+b = 3\cdot 2 - 1 = 6-1 = 5$

$P = 0$

$L \neq P$

$\longrightarrow$ soustava nemá řešení

$\longrightarrow$ v nelze napsat jako LK vektorů u_1 a u_2

(v neleží v prostoru V, který je popsán bází B)

$\longrightarrow$ souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B nelze určit (nejsou definovány)

5. Je dána množina $M = \{(1,2,0,0), (0,2,1,0), (-2,-6,-1,0)\}$, $v = (1,0,-1,0)$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k množině M.

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = v$

$a(1,2,0,0) + b(0,2,1,0) + c(-2,-6,-1,0) = (1,0,-1,0)$

$a - 2c = 1$

$2a + 2b - 6c = 0$

$b - c = -1 \quad \cdot(-2)$ +

$0 = 0$ ✓

$\left.\begin{aligned} a - 2c &= 1 \\ 2a - 4c &= 2 \end{aligned}\right\}$ druhá rovnice je násobkem první

$a - 2c = 1$

$a = 1+2c$

$b = -1+c$

$c = c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

?? ~~$\langle v\rangle_M = (1+2c,\ c-1,\ c)\quad c\in\mathbb{R}$~~ Fuj!

$\longrightarrow$ souřadnice jsou určeny jednoznačně !
(viz definice)

Kde je problém?

$\longrightarrow$ čti zadání!

$\leadsto$ nehovoří se o bázi!, hovoří se o množině M

$\leadsto$ vzhledem k množině nejsou souřadnice definovány

Správný postup

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{+2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ u_1, u_2, u_3 jsou LZ vektory

$\longrightarrow$ M není báze, M je jen množina generátorů

$\Longrightarrow$ úloha nemá řešení, souřadnice jsou definovány jen vzhledem k bázi

DÚ: $B = \{(1,2,0,0),\ (0,2,1,0)\}$, $v = (1,0,-1,0)$.
Určete $\langle v\rangle_B$.

Uvědomte si rozdíl mezi složkami vektorů a souřadnicemi vektoru vzhledem k bázi.

$\langle v\rangle_B = (1,-1)$ $\qquad$ $v = (1,0,-1,0)$

2 souřadnice $\times$ 4 složky

Lineární závislost a nezávislost vektorů v závislosti na parametru

1) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,a,1)$, $u_3 = (2,2,a)$, $a \in \mathbb{R}$. V závislosti na parametru a rozhodněte o LZ vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}^{-1,\,-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1+a} & 0 \\ 0 & 0 & -2+a \end{pmatrix}$$

Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ se nám v odstupňovaném tvaru objeví nulový řádek?

I. $a = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ LZ

II. $a = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} \end{pmatrix} \longrightarrow$ LZ

III. $a \neq 1$ a $a \neq 2 \longrightarrow$ LN

2) $u_1 = (1,0,2)$ $u_2 = (4,3,1)$, $u_3 = (7,6,p)$, $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & p \end{pmatrix}^{-4,\,-7} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & -14+p \end{pmatrix}^{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} ?$$

Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ se nám v odstupňovaném tvaru objeví nulový řádek?

I. $p = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} \end{pmatrix} \longrightarrow$ LZ

II. $p \neq 0 \longrightarrow$ LN

3. $u_1 = (1, a, 2)$, $u_2 = (1, 3, 2a)$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2a \end{pmatrix} \overset{-1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 3-a & -2+2a \end{pmatrix} ?$$

Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ se v odstupňovaném tvaru objeví nulový řádek?

$3 - a = 0$ a současně $-2 + 2a = 0$

$a = 3$ $\wedge$ $a = 1$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nelze}}$

$\rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ u_1 a u_2 jsou LN

4. $u_1 = (a, 1, 3)$, $u_2 = (1, a, a+1)$, $u_3 = (a, a+2, a)$
$a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 3 \\ a & a+2 & a \end{pmatrix} \overset{-a, -1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & 3-a-a^2 \\ 0 & 1+a & a-3 \end{pmatrix} \sim$$

- na první místo volíme 2. řádek, $\forall a \in \mathbb{R}$ začíná 1 $(1 \neq 0)$

není žádná podmínka, násobím řádek, který k upravovanému přičítám

volíme na 2. řádek třetí vektor, $a+1$ … polynom stupně 1, $-a^2+1$ … polynom stupně 2

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1+a & a-3 \\ 0 & 1-a^2 & 3-a-a^2 \end{pmatrix} \overset{1-a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1+a & a-3 \\ 0 & 0 & 5a-6 \end{pmatrix} ?$$

$1+a \neq 0$ [za této podmínky počítáme dál]

Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ se na posledním řádku objeví nulový vektor?

I. $5a - 6 = 0$ $\quad a = \frac{6}{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{9}{5} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \rightarrow \text{LZ}$$

Nyní projdeme poznámky (tj. nutné podmínky)

II. $a+1=0 \quad a=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \longrightarrow LZ$$

dosadili jsme do matice, pod níž je uvedena podmínka $a+1 \neq 0$

Žádné další podmínky nemáme.

III. $a \neq -1 \wedge a \neq \frac{6}{5} \longrightarrow LN$

odpověď:

I. $a = \frac{6}{5}$ LZ

II. $a = -1$ LZ

III. $a \neq -1 \wedge a \neq \frac{6}{5}$ LN

5. $u_1 = (a,-4,-1),\ u_2 = (4,-6,-3),\ u_3 = (1,1,-a)$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -a \\ a & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -4)^{+} \\ \\ -a \\ +) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & 4a-3 \\ 0 & -4-a & a^2-1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 4+a \\ -10)^{+} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & 4a-3 \\ 0 & 0 & -6a^2+13a-2 \end{pmatrix} ?$$

$4 \neq 0$, 1. řádek neobsahuje parametr, 2. řádek, na prvním místě nemá parametr, bude se dobře počítat

žádná podmínka, násobíme neupravované řádky

žádná podmínka, výrazem s parametrem nenásobíme upravovaný řádek

Kdy na místě $-6a^2+13a-2$ bude nula?

$$-6a^2+13a-2=0$$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169-48}}{-12} = \frac{-13 \pm 11}{-12} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

I. $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & 9 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \Longrightarrow LZ$$

II. $a = \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & -\frac{7}{3} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \Longrightarrow LZ$$

III. $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 0 & -10 & \cdot \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix} \Longrightarrow LN \qquad \triangle \neq 0$$

Žádné další podmínky nejsou, tedy

I. $a = 2$ LZ
II. $a = \frac{1}{6}$ LZ
III. $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{1}{6}$ LN

DÚ: $u_1 = (a, -2, 1)$, $u_2 = (3, 2a, -1)$, $u_3 = (a^2, 1, a-1)$

[I. $a = \frac{3}{7}$ LZ, II. $a \neq \frac{3}{7}$ LN]

! Pozor na vedlejší podmínky. Pečlivě promýšlejte úpravy.

6. $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (a, b, 2)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} \overset{-a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & 2-a \end{pmatrix} \overset{a-b}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} ?$$

žádná vedlejší podmínka

žádná vedlejší podmínka

Kdy se poslední řádek změní v nulový?

I. $2-a=0$ $a=2$, $b\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{LZ}$$

II. $a\neq 2$, $b\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{LN}$$

$\Delta \neq 0$

Žádná další podmínka.

Shrnutí I. $a=2$, $b\in\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ LZ

II. $a\neq 2$, $b\in\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ LN