autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Podobnost matic a Jordanův kanonický tvar

Podobnost matic

Definice

Nechť A, B jsou čtvercové matice téhož řádu nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Budeme říkat, že matice A, B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice C nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) taková, že

$$A = C^{-1}BC.$$

Poznámka:

Je lhostejné, zda píšeme $C^{-1}BC$ nebo CBC^{-1}, neboť podobnost je ekvivalence (tj. reflexivní, symetrická a tranzitivní).

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Charakteristickou maticí čtvercové matice A rozumíme matici $A - \lambda E$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Determinant charakteristické matice se nazývá charakteristický polynom.

Poznámka:

Je-li matice A řádu n, potom polynom je stupně n.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 4 + 0 - 0 - 0 + 3(1-\lambda) =$$
$$= -(1-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) - 4 + 3 - 3\lambda = (\lambda - 1)(1-\lambda^2) - 1 - 3\lambda =$$
$$= \lambda - \lambda^3 - 1 + \lambda^2 - 1 - 3\lambda = \underline{-\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 2}$$

Věta

Matice A a B jsou podobné právě tehdy, když jsou jejich charakteristické matice $A - \lambda E$ a $B - \lambda E$ ekvivalentní.

- bez důkazu, chybí teorie polynomiálních matic a jejich úprav

Metody zjištění podobnosti matic

I. Přes rovnost $A = C^{-1} B C$ $\longrightarrow$ přímo přes definici

$\sim$ $CA = B \cdot C$ C je regulární matice

$\longrightarrow$ Prvky matice C hledáme jako neznámé
$CA = BC$ - odpovídá soustavě n^2 lineárních rovnic
o n^2 neznámých

Příklad

Zjistěte, zda matice A a B jsou podobné:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}.$$

definice podobnosti $A = C^{-1}BC$

$C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\boxed{CA = BC}$

$\longrightarrow$ obyčejné násobení matic

$$CA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & x+3y \\ -2z & z+3t \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10x-4z & -10y-4t \\ 26x+11z & 26y+11t \end{pmatrix}$$

$CA = BC$

$$\begin{aligned} -2x &= -10x - 4z \\ x+3y &= -10y - 4t \\ -2z &= 26x + 11z \\ z+3t &= 26y + 11t \end{aligned}$$

po úpravách

$$\begin{aligned} x + 13y + 4t &= 0 \\ 2x + z &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

řešení: například $x = -1$ $y = 1$ $z = 2$ $t = -3$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

odtud $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ [dopočtene]

A, B jsou podobné

Poznámka: existuje-li 1 matice C, existuje již nekonečně mnoho

(*) 2 LN rovnice o 4 neznámých; vektorový prostor řešení dimenze 2 !

! Poznámka: pro velké matice značně nepraktická metoda

II. Přes úpravy charakteristické matice

– práce s polynomiálními maticemi
[látku neprobíráme]

III. Přes Jordanův kanonický tvar, vlastní čísla, vlastní vektory

– efektivní cesta

Jordanův kanonický tvar – Jordanova matice

Definice

Čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

se nazývá Jordanova buňka (na diagonále je prvek a, $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, na linii rovnoběžné pod diagonálou jsou jedničky).

Diagonální bloková matice, jejíž bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá Jordanova matice.

Příklady

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ jedna Jordanova buňka

$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}$ dvě Jordanovy buňky

$A = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$ tři Jordanovy buňky

Poznámka 1:

Jordanovu matici lze definovat i takto:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

kde I. $e_i = 0$ nebo $e_i = 1$

II. jestliže $e_i = 1$, potom $a_i = a_{i+1}$

Poznámka 2:

Je-li $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 1$, pak Jordanova matice je tvořena jedinou Jordanovou buňkou řádu n.

Je-li $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 0$, pak Jordanova matice je tvořena n Jordanovými buňkami řádu 1.

Věty - vlastnosti Jordanových matic

I. Dvě Jordanovy matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejný soubor Jordanových buněk, tj. liší-li se pouze pořadím Jordanových buněk na diagonále.

II. Jestliže je Jordanova buňka podobná diagonální matici, potom je sama diagonální.

III. Dvě diagonální matice jsou podobné právě tehdy, když se liší pouze pořadím prvků na diagonále.

Příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A, B podobné

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

—‖—

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A, B nejsou podobné

Jordanův kanonický tvar matice

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Jestliže existuje Jordanova matice J nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) taková, že matice A a J jsou podobné, potom říkáme, že matice A má nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) Jordanův kanonický tvar J.

Věta

Pro čtvercovou matici A nad $\mathbb{R}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

I. Matice A má nad $\mathbb{R}$ Jordanův kanonický tvar

II. Charakteristický polynom matice A je rozložitený na lineární faktory.

— bez důkazu

Poznámka:

Nad $\mathbb{C}$ má každá matice Jordanův kanonický tvar!

- $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené těleso, tj. každý polynom lze rozložit na součin lineárních členů
- v $\mathbb{R}$ nelze, např. x^2+1

Metoda nalezení Jordanova kanonického tvaru

Definice

Nechť A je čtvercová matice, $A-\lambda E$ je její charakteristická matice a $\det(A-\lambda E)$ její charakteristický polynom. Označme $\det(A-\lambda E)=0$ charakteristickou rovnicí; její kořeny nazveme vlastními čísly, které přísluší matici A.

Definice

Nechť A je čtvercová matice, nechť λ_1 je jedno z vlastních čísel matice A. Vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu λ_1 nazveme nenulový vektor u_1, pro který platí

$$(A-\lambda_1 E)\,u_1^T = o^T.$$

Poznámka

1) Vlastní vektor u_1 se zobrazí na λ_1 násobek sama sebe

$$Au_1^T = \lambda_1 E u_1^T$$

2) $(A-\lambda_i E)\,u_i^T = o^T$ – má jistě netriviální řešení, neboť $A-\lambda_i E$ je singulární matice
($\det(A-\lambda_i E)=0$!)

3) Je-li λ_i - vlastní číslo násobnosti 1 ... existuje „jediný" vlastní vektor [vypočteme jej až na násobek]

! Všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_i tvoří spolu s nulovým vektorem vektorový prostor dimenze 1.

– důkaz plyne z vlastností řešení $(A-\lambda_i E)u_i^T = o^T$
(homogenní soustava LR)

4) je-li λ_j k-násobné vlastní číslo příslušné matici A, potom existuje nejvýše „k" lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j.

(!) → Všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_j tvoří spolu s nulovým vektorem vektorový prostor dimenze nejvýše k.

(!!)

– plyne z vlastností řešení homogenní soustavy LR

Definice

Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že matice A je nad $\mathbb{R}$ diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Poznámka

Matice je diagonalizovatelná

~ JKT matice je diagonální

~ ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje právě tolik LN vlastních vektorů, kolik je násobnost vlastního čísla λ_i

Věty – souvislost podobnosti a maticových operací

I. Jsou-li A a B podobné matice, potom A^T a B^T, resp. A^{-1} a B^{-1} (pokud existují) a A^k a B^k, kde $k \in \mathbb{N}$, jsou podobné.

– triviální, plyne z maticových operací

$CA = BC \quad | \cdot A^{-1}$ zprava

$CA \cdot A^{-1} = BCA^{-1}$

$C = BC \cdot A^{-1} \quad | C^{-1}$ zprava

$CC^{-1} = BCA^{-1}C^{-1}$

$E = B \cdot C \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}, \quad | B^{-1}$ zleva

$B^{-1} = B^{-1}BC \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$

$B^{-1} = C \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$,

odpovídá definici podobnosti

II. Jsou-li A a B podobné, potom mají stejná vlastní čísla.

Důkaz:

$A = C^{-1}BC$ podobné $\det(A-\lambda E)$, $\det(B-\lambda E)$ charakteristické polynomy

$$\det|A-\lambda E| = \det|C^{-1}BC-\lambda E| = \det(C^{-1}BC - \lambda C^{-1}EC) =$$
$$= \det[C^{-1}\cdot(B-\lambda E)\cdot C] = \det C^{-1}\cdot\det(B-\lambda E)\cdot\det C =$$
$$= \underbrace{\det C^{-1}\cdot\det C}\cdot\det(B-\lambda E) =$$
$$= \det(C^{-1}\cdot C)\cdot\det(B-\lambda E) =$$
$$= \det E\cdot\det(B-\lambda E) = \det(B-\lambda E)$$

! - rovnost charakteristických polynomů = rovnost kořenů = rovnost vlastních čísel

III. A, B jsou podobné. Je-li x vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu λ, potom vektor $y^T = C\cdot x^T$ je vlastní vektor matice B příslušný k témuž vlastnímu číslu λ.

Důkaz:

$(A-\lambda E)x^T = o^T$ $A = C^{-1}BC$ definice podobnosti

$Ax^T = \lambda E x^T$ $CA = BC$

$CAx^T = \lambda CE x^T$

$B\underbrace{Cx^T}_{y^T} = \lambda ECx^T = \lambda E\underbrace{Cx^T}_{y^T}$

Označme

$By^T = \lambda y^T$

$(B-\lambda E)y^T = o^T$ tedy $Cx^T = y^T$ vlastní vektor matice B