autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Determinanty

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).
Determinant matice A definujeme rovností

$$\det A = \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \; a_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)} .$$

Místo $\det A$ píšeme též $\det(a_{ij})$ nebo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Řádem determinantu budeme rozumět řád odpovídající matice.

Komentář a vysvětlení

1) P ... permutace (sloupcového indexu) $j = \{1, 2, \ldots, n\}$

ze SŠ – Permutace n prvkové množiny $\rightarrow$ uspořádaná n-tice

$(1, 2, 3, \ldots, n)$

$(n, n-1, \ldots, 1)$

$(2, 1, 3, \ldots, n)$

$\vdots$

$\longrightarrow$ $n!$ počet

2) Σ „součet, sčítáme přes všechny permutace"

$\longrightarrow$ máme $n!$ sčítanců

3) $a_{1P(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$ – součin n prvků vybraných z matice A tak, že z každého řádku a každého sloupce vybereme právě jeden prvek

4) sgn – znaménko permutace $\operatorname{sgn} P = (-1)^{\text{počet inverzí}}$

$$\operatorname{sgn} P = \begin{cases} 1 & \rightarrow 1/2 \text{ permutací } (+) \\ -1 & \rightarrow 1/2 \text{ -''- } (-) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ inverze = každá dvouprvková množina $\{k, l\}$ z množiny M (jejíž permutace vytváříme), že
$$k < l \quad a \quad P(k) > P(l)$$

Příklad

$M = \{1, 2, 3\}$

$(1,2,3)$	0 inverzí	
$(1,3,2)$	1 inverze	$2 \leftrightarrow 3$
$(3,2,1)$	3 inverze	$3 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 1$

<u>Poznámka</u>

Někdy budeme psát determinant místo determinant matice A, budeme hovořit o řádcích/sloupcích determinantu.

<u>Výpočet determinantu „malých" matic</u>

I. $A = (a_{11})$ $\qquad \det A = |a_{11}| = a_{11}$

- determinant matice prvního řádu je roven prvku, který stojí v matici
- neplést s absolutní hodnotou

II. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- determinant matice druhého řádu je roven rozdílu součinu prvků hlavní a vedlejší diagonály
- $2! = 2$ $\qquad$ 2 součiny po 2 prvcích (jde i přes definici)

III

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sarrusovo pravidlo

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array}$$

$+$ $\quad$ $-$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

6 součinů, tři prvky v součinu

$1/2 +$, $1/2 -$

Poznámka

- trochu cviku a nemusíme ani řádky připisovat

Poznámka

- podle definice se špatně počítá

$\longrightarrow$ $n!$ – „rychle roste" $\quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$\vdots$

$\longrightarrow$ musíme zavést jednoduché věty popisující vlastnosti determinantu

Základní věty

- užívané k výpočtům některých determinantů

I. Nechť A je matice řádu n, t je jeden ze sloupců matice A. Jestliže $t = t_1 + t_2$, kde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$, potom

$$\boxed{\det A = \det A_1 + \det A_2},$$

kde matice A_1, resp. A_2 vzniknou z matice A nahrazením jejího sloupce t sloupcem t_1, resp. t_2.

Vysvětlení

Sloupec t je součtem t_1 a t_2

Důkaz

Pro jednoduchost předpokládejme, že t je první sloupec matice A

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1}+c_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, (b_{1P(1)} + c_{1P(1)}) \cdot a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$$

$$= \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, b_{1P(1)} a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)} + \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, c_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)} = \det A_1 + \det A_2 .$$

II. Determinant matice, která má jeden řádek (sloupec) nulový, je roven nule.

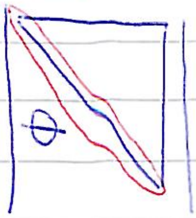
Důkaz: přímo z definice

$$\det A = \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, a_{1P(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$$

$\rightarrow$ sčítáme $n!$ samých 0

III. Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu všech prvků na hlavní diagonále.

Důkaz



- přímo z definice
  - jediný nenulový součin může být právě součin prvků na hlavní diagonále.
  - ostatní jsou nulové

IV. Determinanty navzájem transponovaných matic jsou si rovny

$$\det A = \det A^T.$$

Bez důkazu.

Poznámka: - důkaz plyne z / opírá se o permutace, „sčítání indexů"
- „je jedno, zda permutujeme sloupcový nebo řádkový index"
- co platí pro řádky, platí i pro sloupce

V. Vynásobíme-li nějaký řádek (sloupec) matice A reálným číslem, je determinant vzniklé matice roven $c \cdot \det A$

$$\det A' = c \cdot \det A.$$

Důkaz: přímo z definice; pro jednoduchost uvažujme 1. řádek

$$\begin{vmatrix} c a_{11} & c a_{12} & \dots & c a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, c a_{1P(1)} a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)} =$$

$$= c \sum_{P \in S_n} \operatorname{sgn} P \, a_{1P(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)} = c \cdot \det A$$

VI. Jestliže je matice A řádu n, c je reálné číslo, pak $\det(cA) = c^n \det A$.

Důkaz: Přímý důsledek **V.** zřejmé

VII. Prohodíme-li v matici dva řádky (dva sloupce), je determinant vzniklé matice roven $-\det A$.

Bez důkazu: Vychází z teorie permutací.

VIII. Determinant matice, která má dva stejné řádky (sloupce), je roven nule.

Komentář

„Důkaz": Aplikací **VII.** Prohození řádků nepoznáme, determinant však musí měnit znaménko ⟶ „splňuje jen $\emptyset$".

IX. Přičteme-li k nějakému řádku (sloupci) matice A lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců) matice A, je determinant vzniklé matice roven determinantu matice A.

Komentář: Stačí uvážit význam předchozích vět a pojem LK

X. Je-li v matici A nějaký řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců) matice A, potom je determinant matice A roven $\emptyset$.

Komentář: Důkaz plyne z předchozích vět.

XI. Determinant součinu matic typu n, je roven součinu determinantů těchto dvou matic.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Bez důkazu

XII, Matice A je nad $\mathbb{R}$ singulární právě tehdy, když je její determinant roven nule. Matice A je nad $\mathbb{R}$ regulární právě tehdy, když je její determinant nenulový.

Komentář: důkaz plyne přímo z definic pojmů

Definice

Nějme čtvercovou matici A n-tého stupně nad $\mathbb{R}$. Vynecháme-li v této matici i-tý řádek a j-tý sloupec, dostaneme matici stupně $n-1$. Její determinant nazveme subdeterminantem matice A, který je příslušný k prvku a_{ij}.

Značení: $\det A_{ij}$

$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ označujeme jako algebraický doplněk prvku a_{ij}

Věta o rozvoji determinantu (Laplaceova věta)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$. Potom pro každé $i = 1, \dots, n$ je

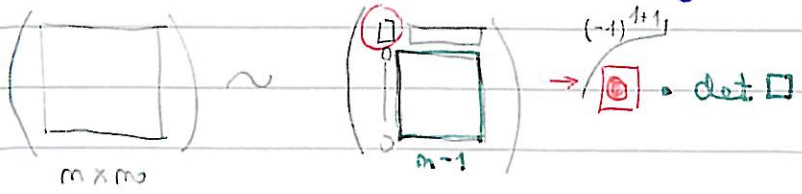
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Bez důkazu

Komentář: - Rozvoj determinantu podle i-tého řádku.
- Důležitá „metoda" počítání
  - místo jednoho determinantu řádu n počítáme n determinantů řádu $n-1$
  - po konečném počtu kroků se dostaneme k řádu 3 a aplikujeme Sarrusovo pravidlo

- role a_{ij}
  - vybíráme takový řádek, kde je hodně 0, neboť $0 \cdot \det A_{ij}$ – nemusím dál počítat

- metoda se kombinuje s užitím vět I. – XII.
  $\longrightarrow$ „vyrobíme" správný řádek a užijeme rozvoj



__Poznámka__ : A je matice řádu n nad $\mathbb{R}$, $n > 1$. Pak pro každé $j = 1, \dots, n$ je

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

- rozvoj podle j-tého sloupce.

__Příklad__

1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

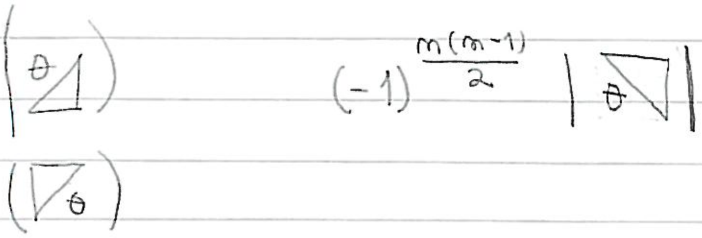
$$= 12 + 0 + 0 - 4 - 0 - 3 = \underline{5}$$

2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{-1 \;\; -3 \;\; +}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

! Výroba správného řádku. Pozor na užití úprav. Neplatí jako u matic.

Zajímavosti, důsledky probraného

1. Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice podle vedlejší diagonály je roven $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ · součin prvků na vedlejší diagonále.



– plyne z přerovnání řádků (sloupců)

2. Determinant antisymetrické matice řádu n

n – liché $\det A = 0$

n – sudé ? musíme vypočítat

antisymetrická matice $A^T = -A$

$$\Rightarrow \det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

$$\boxed{[(-1)^n - 1]\cdot \det A = 0}$$