autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Aplikace determinantů

Inverzní matice

Definice

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$. Reciprokou maticí k matici A budeme rozumět matici A_{rec} řádu n, ve které na místě ij stojí algebraický doplněk prvku a_{ji} matice A, tj. prvek

$$(-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Věta

Nechť A je čtvercová matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$. Potom platí

a) $$A \cdot A_{rec} = A_{rec} \cdot A = \det A \cdot E$$

Bez důkazu

b) Je-li $\det A$ nenulový, potom inverzní matice k matici A je rovna matici

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{rec}.$$

Zřejmé z definice A^{-1} a a)

Poznámka

Věta b) poskytuje jednoduché kritérium existence inverzní matice.

Čtvercová matice A nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když je její determinant nenulový.

$$A = (a_{ij}) \qquad A^{-1} = (b_{ij}) \longrightarrow \boxed{b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 0 - 21 - 0 - 14 - 0 = -30 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ existuje}$$

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad \det A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \det A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$\det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -21 \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$\det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15 \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -9 & 1 & -7 \\ 21 & 1 & -7 \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

kontrola a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

b) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Poznámka

- Zdlouhavá metoda – počítáme 1 determinant matice řádu n
  n^2 determinantů matic řádu $n-1$
- Výhoda – jednoduché kritérium existence A^{-1}
  - vzorec pro výpočet prvku na místě ij (to metoda úprav neumožňuje)

Hodnost matice

Věta

Nenulová matice A nad $\mathbb{R}$ má hodnost k právě tehdy, když platí:

a) V matici A existuje nenulový subdeterminant řádu k.

b) Všechny subdeterminanty matice A, které mají řád větší než k, jsou rovny nule.

Poznámka

- není to ideální metoda

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

řád 4×5 → maximální možná hodnost je 4

Vybereme čtvercovou matici 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{2+4} \cdot (3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \cdot (-1-5) = 6 \cdot 6 = 36 \neq 0$$

$$\rightsquigarrow h(A) = 4$$

! Pozor - kdyby subdeterminant vyšel nulový, výpočet by nic neřekl. Museli bychom projít všechny matice 4×4 → pokud by všechny měly determinant nulový → $h(A) \neq 4$.

- totéž bychom dělali pro 3×3 ...

Cramerovo pravidlo

Věta - Cramerovo pravidlo

Nechť A je čtvercová matice řádu n a $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nenulová n-tice prvků z $\mathbb{R}$. Nechť A má nenulový determinant. Pro každé $j = 1, \dots, n$ označme symbolem A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem $b = (b_1, \dots, b_n)$. Potom každé řešení soustavy lineárních rovnic

$$A \cdot x = b$$

má tvar

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}.$$

Bez důkazu

Poznámka

- máme-li soustavu n rovnic
  → počítáme $n+1$ determinantů matic řádu n
  → pomalé
- výhoda - někdy nás nezajímají všechna x_j
  - máme vzorec; to nedovolí Gaussova eliminace

„použití" - jen pro nehomogenní soustavy se čtvercovou maticí

Příklad

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y &= 2 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{3}{3} = 1 \qquad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\underline{[1, -1, 1]}$$

Využití determinantů v analytické geometrii

Rovina

I. Máme dány 3 body $A=[x_1,y_1]$, $B=[x_2,y_2]$, $C=[x_3,y_3]$. Zjistěte, zda A,B,C leží v jedné přímce.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{leží} \\ \neq 0 & \text{neleží} \end{cases}$$

SŠ: - $u = A - B$, $v = A - C$ $\Big\}$ $u = k \cdot v \implies A,B,C$ leží v jedné přímce

- nalezneme rovnici přímky AB, zjistíme, zda souřadnice bodu C vyhovují rovnici přímky

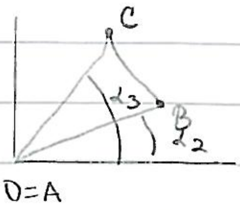
II. Máme dány 2 body $A=[x_1,y_1]$ a $B=[x_2,y_2]$. Napište rovnici přímky AB

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Důkaz - stačí vypočítat determinant, sepsat rovnici přímky jako na SŠ a porovnat výsledky.

III. Obsah trojúhelníku určeného body A,B,C

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$



$OB = r_2$

$OC = r_3$

$$S = \frac{1}{2}\, OB \cdot OC \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$$
$$= \frac{1}{2}\, r_2 r_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$$

$\sin(\alpha_3-\alpha_2) = \sin\alpha_3\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_3$

$A = [0,0]$

$B = [r_2\cos\alpha_2, r_2\sin\alpha_3]$

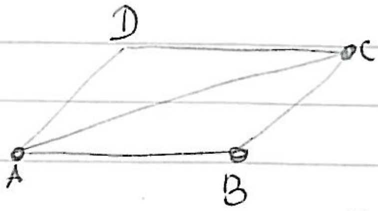
$C = [r_3\cos\alpha_3, r_3\sin\alpha_3]$

$$2\cdot S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = r_2 r_3\,(\cos\alpha_2\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2\cos\alpha_3)$$

! připomenutí SŠ – vztahy pro △

IV. Obsah rovnoběžníku

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



– D určím již jednoznačně

Prostor E_3 – podobné

I. Čtyři body $A=[x_1,y_1,z_1]$, $B=[x_2,y_2,z_2]$, $C=[x_3,y_3,z_3]$ a $D=[x_4,y_4,z_4]$. Rozhodněte, zda leží v jedné rovině.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{leží} \\ \neq 0 & \text{neleží} \end{cases}$$

Odkaz na SŠ

- najdeme rovnici $\rho(ABC)$ a zjistíme, zda souřadnice bodu D vyhovují rovnici

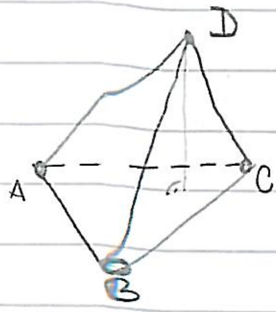
II. Rovnice roviny určené trojicí nekolineárních bodů A, B, C.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

důkaz – obdoba E_2 – II

III. Objem čtyřstěnu ABCD

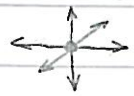
$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|$$



připomenutí $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

! připomenutí postupů na SŠ

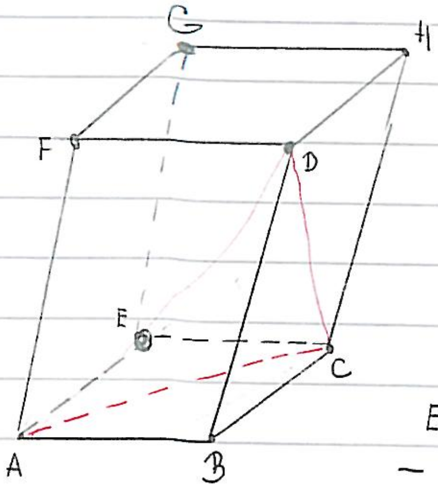
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, fyzikální zdůvodnění



zobecnění: n-rozměrný prostor $\frac{1}{n!}$

IV. Objem hranolu

$$V = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|$$



E, F, G, H – určeny jednoznačně