autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Skalární součin

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Skalárním součinem na prostoru V nazveme každé zobrazení f množiny $V \times V$ do $\mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

a) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) = f(y,x)$, symetrie

b) $\forall x, y, z \in V \quad f(x+y, z) = f(x,z) + f(y,z)$, sčítání

c) $\forall x, y \in V \ \forall a \in \mathbb{R} \quad f(ax, y) = a \cdot f(x,y)$, násobení skalárem

d) $\forall x \in V \ x \neq o \quad f(x,x) > 0$. pozitivnost

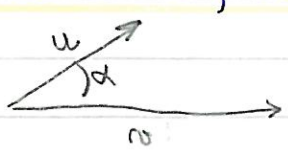
Prostorem se skalárním součinem budeme rozumět každý vektorový prostor s nějakým pevně zvoleným skalárním součinem.

Poznámka

- „druhů" skalárních součinů je mnoho
- proč zavádíme ⟶ můžeme měřit — velikost (délku)
  — úhel
  ⟶ můžeme promítat a rozkládat vektory

Příklady

1) Dva nenulové vektory v rovině (prostoru) se společným počátkem, V rovina (prostor), součin definujeme jako součin délek a kosinu úhlu, který svírají:



$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

2) Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme skalární součin obvyklým způsobem

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

– tzv. standardní skalární součin
Znáte ze SŠ – typický pro LA a AG!

3) Prostor všech reálných funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx .$$

4) Prostor všech polynomů nejvýše stupně n na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$(p_1|p_2) = \int_a^b p_1(x)\cdot p_2(x)\,dx .$$

Definice

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Normou (délkou, velikostí) vektoru $v \in V$ budeme rozumět reálné číslo $\|v\|$ definované rovností

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} .$$

Vektor v se nazývá normovaný (též jednotkový), jestliže $\|v\| = 1$.

Poznámky

– Pro rovinu (prostor) – norma vektoru je rovna délce vektoru
⟶ můžeme se opřít o geometrickou představu !

- normu značíme $\|v\|$
  - dvojitá čára, odlišení absolutní hodnoty
- pro každý nenulový vektor
  - norma >0

Vlastnosti skalárního součinu

Věta

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom platí

a) $\|o\| = 0$, — velikost nulového vektoru

b) $\forall x \in V,\ x \neq o \quad \|x\| > 0$,

c) $\forall x \in V,\ \forall a \in \mathbb{R} \quad \|ax\| = |a|\,\|x\|$, — velikost skalárního násobku

d) $\forall x \in V,\ x \neq o \quad \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = 1$. — „normování"

Důkaz – plyne přímo z definice součinu

Věta – Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Pro každé dva vektory x, y vektorového prostoru se skalárním součinem platí nerovnost

$$\|x|y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

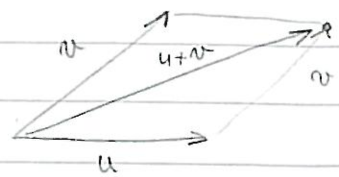
Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory x a y lineárně závislé.

– bez důkazu

Věta – Trojúhelníková nerovnost

Pro každé dva vektory x, y vektorového prostoru se skalárním součinem platí nerovnost

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$



- důkaz – plyne z definice skalárního součinu a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

- geometrická intuice již ze ZŠ – kdy lze sestrojit △!!

- zkušenost z dětství – chodníky!

Definice

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Řekneme, že vektory $x, y \in V$ jsou navzájem ortogonální (resp. kolmé), jestliže je jejich skalární součin roven nule.

Podmnožina M prostoru V se nazývá ortogonální, jestliže jsou každé dva její různé vektory navzájem kolmé.

Podmnožina M prostoru V se nazývá ortonormální, jestliže je ortogonální a každý její vektor je normovaný.

Poznámka

- nulový vektor je kolmý ke každému vektoru prostoru V
- žádný jiný vektor tuto vlastnost nemá
- nulový vektor je rovněž jediným vektorem, který je kolmý sám na sebe

Příklad

$x = (1,2,3)$

$y = (1,1,-1)$

$(x|y) = 1+2-3 = 0$

$\longrightarrow$ vektory jsou ortogonální

$$\left.\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \\ \|y\| &= \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \text{ nejsou ortonormální}$$

Definice

Ortogonální, resp. ortonormální bází vektorového prostoru se skalárním součinem budeme rozumět každou bázi tohoto prostoru, která je ortogonální, resp. ortonormální množinou.

Příklad

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \right\}$$

– ověříme výpočtem skalárního součinu a normou

Věta - Pythagorova věta

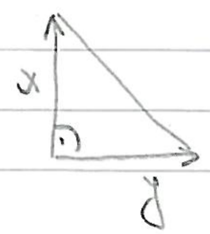
Jsou-li vektory x a y navzájem ortogonální vektory vektorového prostoru se skalárním součinem, potom je

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x+y|x) + (x+y|y) = (x|x) + \underbrace{(y|x)}_{0} + \underbrace{(x|y)}_{0} + (y|y)$$
$$= (x|x) + (y|y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

– Pythagorovu větu známe již ze ZŠ

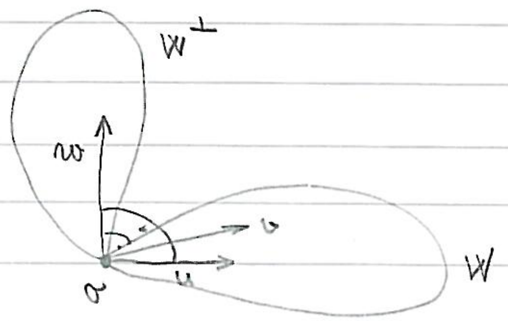


Definice

Nechť M je podmnožina vektorového prostoru se skalárním součinem. Řekneme, že vektor $u \in V$ je ortogonální k podmnožině M, jestliže je ortogonální ke každému vektoru této podmnožiny.

Množinu všech vektorů prostoru V, které jsou ortogonální ke podmnožině M, označíme $M^{\perp}$.

Jestliže W je podprostor prostoru V, potom množinu $W^{\perp}$ nazýváme ortogonální doplněk podprostoru W v prostoru V.



Poznámky

1) W a $W^{\perp}$ mají společný pouze nulový vektor.

2) Vektor $v \in V$ je ortogonální k podprostoru W právě tehdy, když je ortogonální ke všem vektorům nějaké množiny generátorů podprostoru W.

Věta

Každý vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze má ortonormální bázi.

bez důkazu

Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť W je podprostor konečné dimenze vektorového prostoru V se skalárním součinem. Potom

$$V = W \oplus W^{\perp},$$

tj. ke každému vektoru $v \in V$ existují jednoznačně určené vektory $v^{\Gamma} \in W$ a $v^{\perp} \in W^{\perp}$, pro které je

$$v = v^{\Gamma} + v^{\perp}.$$

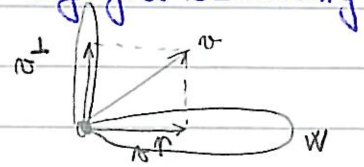
bez důkazu

Poznámka

1) $v = v^{\Gamma} + v^{\perp}$ – rozklad vektoru v

v^{Γ} – projekce v do W

2) – rozklad existuje a je jednoznačný



Definice

Nechť x, y jsou nenulové vektory vektorového prostoru se skalárním součinem. Velikost úhlu φ, který svírají vektory x, y definujeme pomocí vztahu:

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Věta – Kosinová věta

Nechť x, y jsou nenulové vektory vektorového prostoru se skalárním součinem. Jestliže vektory x, y svírají úhel φ, potom je

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\varphi + \|y\|^2.$$

– důkaz triviální – definice skalárního součinu a úhlu.

Gram - Schmidtův ortogonalizační proces

$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ báze prostoru V $\longrightarrow$
$B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ báze ortogonální téhož prostoru V.

Výroba

1) $v_1 = u_1$

2) $v_2 = u_2 + k_1 \cdot v_1$ $\qquad v_2 \perp v_1$

3) $v_3 = u_3 + l_1 \cdot v_1 + l_2 v_2$ $\qquad v_3 \perp v_1 \wedge v_3 \perp v_2$

$\vdots$

n) $v_n = u_n + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$ $\qquad v_n \perp v_1 \wedge \ldots v_n \perp v_{n-1}$.

Příklad

$B = \{\overset{u_1}{(1,1,0)}, \overset{u_2}{(0,1,2)}, \overset{u_3}{(-1,0,1)}\}$. Najděte ortogonální bázi.

1) $v_1 = (1,1,0)$

2) $v_2 = (0,1,2) + k(1,1,0)$ $\qquad v_1 \perp v_2$

$(v_1|v_2) = 0 + 1 + 0 + k + k + 0 = 0$

$2k = -1$

$k = -\frac{1}{2}$

$v_2 = (0,1,2) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (0,1,2) + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) =$

$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2) \rightsquigarrow (-1,1,4) = v_2$

3) $v_3 = (-1,0,1) + a(1,1,0) + b(-1,1,4)$ $\qquad v_3 \perp v_1 \wedge v_3 \perp v_2$

$= (-1+a-b, a+b, 1+4b)$

$(v_3|v_1) = -1 + a - b + a + b = 0$ $\qquad 2a = 1$ $\qquad a = \frac{1}{2}$

$(v_3|v_2) = -a + 1 + b + a + b + 4 + 16b = 0$ $\qquad 18b = -5$ $\qquad b = -\frac{5}{18}$

$v_3 = \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{18}, \frac{1}{2} - \frac{5}{18}, 1 - \frac{20}{18}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{18}, \frac{9-5}{18}, \frac{18-20}{18}\right) = \left(\frac{-4}{18}, \frac{4}{18}, \frac{-2}{18}\right)$

$\rightsquigarrow (-4, 4, -2) \sim (-2, 2, -1)$

$$B' = \{ \overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(-1,1,4)}, \overset{v_3}{(-2,2,-1)} \}$$ ortogonální báze

$(v_1|v_2) = -1+1+0=0$

$(v_1|v_3) = -2+2+0=0$

$(v_2|v_3) = 2+2-4=0$

Provedeme-li normování $\longrightarrow$ ortonormální báze

$\|v_1\| = \sqrt{2}$ $\rightsquigarrow$ $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0)$

$\|v_2\| = \sqrt{18}$ $\quad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (-1,1,4)$

$\|v_3\| = \sqrt{9} = 3$ $\quad w_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{3} (-2,2,1)$

$$B'' = \{ w_1, w_2, w_3 \}$$

Vektorový součin - připomenutí ze SŠ

Poznámky

1) Budeme pracovat v E_3

$u, v \in E_3$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ u_1 u_2

$v = (v_1, v_2, v_3)$ v_1 v_2

$u \times v = w = (w_1, w_2, w_3)$ $w \in V$, vektor w nazýváme vektorový součin vektorů u a v

$$w_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3,$$
$$w_2 = u_3 v_1 - v_3 u_1,$$
$$w_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

$\rightarrow$ („skrytý" determinant

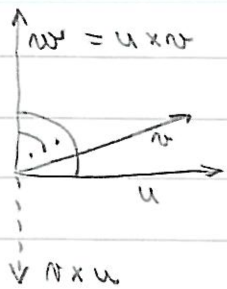
$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

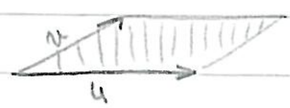
2) Vlastnosti

a) $u \times v = -v \times u$ antisymetrie

b) $u \times v \perp u \wedge u \times v \perp v$ kolmost

c) $\| u \times v \| = S_{rovn.}$





3) Využití

- nalezení obecné rovnice roviny
- výpočet obsahu
- kolmost