autor textu: Martina Bečvářová, 2020

Příklady: Najděte Jordanův kanonický tvar matice

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická matice

II. $\det(A-\lambda E) = -\lambda(1-\lambda)^2 - 8 + 4 + 4\lambda - 4(1-\lambda) + 2(1-\lambda) =$

$= -\lambda(1-2\lambda+\lambda^2) - 4 + 4\lambda - 4 + 4\lambda + 2 - 2\lambda =$

$= -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 6\lambda - 6 = \underline{-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6}$

charakteristický polynom

III. $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$ charakteristická rovnice

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}\right\}$ vlastní čísla

IV. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & -2 & 0 \\ 0 & \cdot & 3 \end{pmatrix}$

musíme rozhodnout o $\odot < \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$?

$1 \neq -2 \neq 3$

→ tři různá vlastní čísla

→ tři Jordanovy buňky

→ $\odot$ jsou 0

V. $J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$

Jordanova matice je diagonální

→ matice A je diagonalizovatelná

→ triviální případ

Příklad 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = ?$$

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická matice

II. $\det(A - \lambda E) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 + (2-\lambda) - 0 - 0 =$
$= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda) + 1\right] = (2-\lambda)(3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1) =$
$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \underline{-(\lambda-2)^3}$

charakteristický polynom

III. $-(\lambda-2)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ jedno trojnásobné vlastní číslo

IV. $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \cdot & 2 & 0 \\ 0 & \cdot & 2 \end{pmatrix}$

- musíme rozhodnout, zda $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$\rightarrow$ násobné vlastní číslo, musíme vyjít z počtu LN vlastních vektorů, který určuje počet buněk

V. $(A - 2E)u^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ řešíme soustavu s maticí $A-2E$

$h(A-2E) = 1$ počet neznámých 3 (x, y, z)

$\dim V = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ 2 LN vlastní vektory $\quad u_1 = (-1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$

$\rightarrow$ 2 LN vektory $\sim$ 2 Jordanovy buňky

VI. Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

liší se jen pořadím buněk

$\rightarrow$ A není diagonalizovatelná

Příklad 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad J = ?$$

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická matice

II. $\det(A-\lambda E) = (-2-\lambda)^3 + 1 + 1 + 2+\lambda + 2+\lambda + 2+\lambda = -8 - 12\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 8 + 3\lambda$

$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda^2+6\lambda+9) = -\lambda(\lambda+3)^2$

charakteristický polynom

III. $-\lambda(\lambda+3)^2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -3 \end{matrix}\right\} \text{ vlastní čísla}$$

IV. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{\cdot} & -3 & 0 \\ 0 & \cdot & -3 \end{pmatrix}$

- musíme rozhodnout
  - $\boxed{\cdot}$ ... triviální $0 \neq -3 \rightsquigarrow$ různé buňky $\rightsquigarrow \boxed{\cdot}$ je 0
  - $\cdot$ ... lze rozhodnout ze znalosti počtu vlastních vektorů

V. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & \cdot & -3 \end{pmatrix}$

VI Počet vlastních vektorů příslušných $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ (LN!)

$$(A+3E)u^T = o^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{hod}(A+3E) = 1$ počet neznámých 3 $\dim V = 3-1 = 2$

$\rightarrow$ 2 LN vlastní vektory příslušné $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$\rightarrow$ 2 Jordanovy bloky pro $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$\rightarrow$ na $\odot$ je 0

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

matice A je diagonalizovatelná

Poznámka

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

! nelze $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (obecně v tomto případě by bylo OK)

Nalezení transformační matice

I. Přímým výpočtem (z definice podobnosti)

$$CA = BC$$

- zdlouhavé; ukázáno v předešlé přednášce

II. Pomocí vlastních a zobecněných vlastních vektorů

a) A čtvercová matice λ_i vlastní číslo

$$(A - \lambda_i E)\, u_i^T = o^T$$

u_i vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i

a) • – je-li λ_i násobnosti 1 – není problém, vypočteme ke každému vlastnímu číslu právě „jeden" vlastní vektor

– transformační matice C má ve sloupcích vlastní vektory !

$C = \left(\begin{matrix} () & () & () & \cdots & () \end{matrix} \right)$ „bez ohledu na pořadí" (*)

b) • – je-li λ_i násobnosti k a matice A je diagonalizovatelná – není problém, vypočteme ke každému vlastnímu číslu právě „k" LN vlastních vektorů

– transformační matice C má ve sloupcích vlastní vektory ! (*)

c) • je-li λ_i násobnosti k a matice není diagonalizovatelná – je problém, musíme přidat tzv. zobecněné vlastní vektory

• λ_i ... k-násobné, u_1 je „jediný" vlastní vektor
vytvoříme řetězec zobecněných vlastních vektorů, jehož délka je k-1

$$
\left.
\begin{aligned}
(A-\lambda_i E)u_1^T &= o^T && u_1 \dots \text{vlastní} \\
(A-\lambda_i E)u_2^T &= u_1^T && u_2 \dots \text{první zobecněný} \\
(A-\lambda_i E)u_3^T &= u_2^T && u_3 \dots \text{druhý zobecněný} \\
&\vdots \\
(A-\lambda_i E)u_{k-1}^T &= u_k^T && u_k \dots (k-1) \text{ zobecněný}
\end{aligned}
\right\}
\left.
\begin{matrix} 1 \\ + \\ k-1 \end{matrix}
\right\} k
$$

$$C = \left(\begin{matrix} () & \cdots & () & () \\ u_k & & u_2 & u_1 \end{matrix} \right)$$ hledaná transformační matice

• λ_i ... k-násobné, více LN vlastních vektorů [2 až k-1]
– komplikované, pro matice 4x4 a více vyložená teorie nestačí, museli bychom rozšířit o minimální polynom ...

Příklad 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Vypočtěte J a C.

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

II. $\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

III. $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{array}\right\} \text{· vlastní čísla}$$

IV. $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$ • musíme určit počet LN vlastních vektorů

V. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \qquad (A - 1E)u^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(A-E) = 2$ počet neznámých 3 $\dim V = 3 - 2 = 1$

$\rightarrow$ 1 LN vlastní vektor $\rightarrow$ 1 Jordanova buňka pro $\lambda_2 = \lambda_3$

$u_2 = (1, 0, 0)$ vlastní vektor

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

VI. Transformační matice

$\lambda_1 = 2 \qquad (A - 2E)u_1^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(A-2E) = 2$ počet neznámých 3 $\dim V = 3 - 2 = 1$

$u_1 = (2, 1, 1)$ vlastní vektor

→ máme 2 vlastní vektory

→ od vektoru u_2 musíme najít zobecněný → dostaneme potřebné „3" pro matici C

- $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \qquad (A-E)u_3^T = u_2^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ nehomogenní soustava, hledáme jedno její řešení!

$u_3 = (0, 1, 0)$ např.

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 \downarrow \qquad \downarrow \lambda_2 = \lambda_3$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_3 & u_2 \end{array} \end{array}$$

kdyby

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \downarrow \quad \lambda_1 \downarrow$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_3 & u_2 & u_1 \end{array} \end{array}$$

Příklad 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Vypočtěte J a C.

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

II. $\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\lambda)^3$

III. $(1-\lambda)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ trojnásobné vlastní číslo

IV. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ • určíme zda $<\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ podle počtu vlastních vektorů

V. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$(A-E)u_1^T = o^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(A-E) = 2$ počet neznámých 3 $\dim V = 3-2 = 1$ $u_1 = (1,0,0)$

$\rightsquigarrow$ 1 LN vlastní vektor $\rightsquigarrow$ 1 Jordanova buňka

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

VI. Transformační matice

$\to$ musíme najít řetězec zobecněných vektorů délky 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$(A-E)u_1^T = o^T$ $u_1 = (1,0,0)$ vlastní vektor

$$(A-E)u_2^T = u_1^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $u_2 = (0,1,0)$ hledáme jedno řešení NSLR – první zobecněný vektor

$$(A-E)u_3^T = u_2^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $u_3 = (0,-1,1)$ hledáme jedno řešení NSLR – druhý zobecněný vektor

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_3 \; u_2 \; u_1$

Príklad 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & +1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Vypočítajte C a J.

I. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

II. $\det(A - \lambda E) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 + 2 - \lambda - 0 - 0 =$
$= \dots = (2-\lambda)^3$

III. $(2-\lambda)^3 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ trojnásobné vlastné číslo

IV. $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \cdot & 2 & 0 \\ 0 & \cdot & 2 \end{pmatrix}$ • musíme vypočítať počet LN vlastných vektorov

V. $(A - 2E)\, u_1^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h(A-2E) = 1$ počet neznámych 3 $\dim V = 3 - 1 = 2$

$\rightarrow$ 2 LN vlastné vektory $\qquad u_1 = (0, 1, 1)$

$\rightarrow$ 2 Jordanove bunky $\qquad u_2 = (1, 0, 1)$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

VI. Transformační matice

- musíme najít jeden zobecněný vektor — ? kde začít

a) $(A-2E)u_3^T = u_1^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

... nemá řešení, nevadí, máme ještě u_2

b) $(A-2E)u_3^T = u_2^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$u_3 = (1, 0, 0)$ hledáme jedno řešení NSLR

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

u_3!! u_2 u_1!!

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Poznámka 1

1. Pečlivě počítat determinanty!
2. Zopakovat dělení polynomů → hledání kořenů ≈ vlastních čísel
3. Nutno bezpečně a rychle umět řešit SLR

Poznámka 2

Využití – řešení soustav diferenciálních rovnic
– klasifikace KVF (extrémy funkcí, kuželosečky/kvadriky)