Jak stanovíme signaturu kvadratické formy?

I. Symetrické úpravy

- symetrickými úpravami nalezneme diagonální matici a současně nalezneme i polární bázi
- metoda vždy vede k cíli, zdlouhavá
- symetrické úpravy = „co na řádek, to na sloupec"

Příklad

Je dána matice kvadratické formy, zjistěte signaturu formy. Uvažujte, že matice formy je dána vzhledem ke kanonické bázi. Najděte polární bázi a analytické vyjádření vzhledem k ní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F(\vec{x}) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2z^2 + 2yz$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

matice

vektory kanon. báze v řádcích

úpravy na řádky v obou částech

úpravy na sloupce jen v části matice A

diagonální matice

Polární báze: $B = \{(1,0,0), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$

analytické vyjádření: $F(\vec{x}') = x'^2 + y'^2 + z'^2$

signatura: $\operatorname{sgn} F = (3,0,0)$ – pozitivně definitní KVF

- metoda vhodná pro algebru a geometrii (klasifikace „kvadrik")

II. Pomocí determinantů

Věta

Jestliže determinanty hlavních rohových minorů jsou všechny kladné, kvadratická forma je pozitivně definitní, střídají-li znaménko, první je záporné, kvadratická forma je negativně definitní.

– metoda vhodná pro analýzu (extrémy funkce více proměnných)

Příklad 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = |1| = 1$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+1+1-2-1-2 = 1$

znaménka: $+, +, +$ $\longrightarrow$ pozitivně definitní KVF

Příklad 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = |-2| = -2$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6+0+0-0-0+3 = -3$

znaménka: $-, +, -$ $\longrightarrow$ negativně definitní KVF

Příklad 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = |1| = 1$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-1-2-0 = -3$

znaménko: $+, +, -$ $\longrightarrow$ indefinitní kvadratická forma

III. Vlastní čísla a vlastní vektory

Věta

Nechť A je symetrická reálná matice řádu n. Potom všechna vlastní čísla jsou reálná.

- bez důkazu

$\det(A-\lambda E) = 0$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou reálná čísla

Věta

Nechť A je symetrická reálná matice řádu n a λ je k-násobné vlastní číslo její charakteristické rovnice. Pak podprostor řešení homogenní soustavy pro výpočet vlastních vektorů příslušných k číslu λ má dimenzi k.

- bez důkazu

Poznámka:

Symetrická matice je diagonalizovatelná, tj. její Jordanova matice je diagonální matice.

Věta

Nechť u, v jsou dva vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům λ_1, λ_2 symetrické matice A. Pak u a v jsou kolmé, tj

$$u \cdot v = 0 .$$

Důkaz

λ_1 ... vlastní vektor u $\qquad Au^T = \lambda_1 u^T$

λ_2 ... vlastní vektor v $\qquad Av^T = \lambda_2 v^T$

$$Au^T = \lambda_1 u^T \quad | \, v^T$$
$$Av^T = \lambda_2 v^T \quad | \, u^T$$

$$v^T A u^T = \lambda_1 v^T u^T$$
$$u^T A v^T = \lambda_2 u^T v^T$$

$$v^T A u^T - u^T A v^T = (\lambda_1 - \lambda_2) u^T v^T$$
$$\underbrace{u^T A v^T - u^T A v^T}_{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} u^T v^T$$

A symetrická !!

$\Longrightarrow$ $u \cdot v = 0$ kolmé vektory

Věta

Nechť A, B jsou matice kvadratické formy F ve dvou různých ortonormálních bázích prostoru V. Potom

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$$

Důkaz:

$B = C^T A \cdot C$ $\qquad$ C matice přechodu od jedné ortonormální báze ke druhé

- $\det C = \det C^T$
- ortonormální báze $\quad \det C = \pm 1$

$$\det(B - \lambda E) = \det(C^T A C - \lambda E) = \det(C^T A C - \lambda C^T E C) =$$
$$\det[C^T (A - \lambda E) C] = \det C^T \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E)$$

Věta

Ke každé kvadratické formě F na euklidovském prostoru V (dim V = n) existuje taková ortonormální báze N, že $F(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

!! Ortonormální bázi tvoří vlastní vektory.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 0 + 0 + 9\lambda + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 13)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \sqrt{13} \\ \lambda_3 &= -\sqrt{13} \end{aligned}\right\} \text{vlastní čísla}$$

$$F(\vec{x'}) = 0 \cdot x'^2 + \sqrt{13}\, y'^2 - \sqrt{13}\, z'^2$$

indefinitní KVF

umožňují stanovit signaturu KVF

ortonormální báze

- $\lambda_1 = 0$ $\quad (A - 0E)u_1^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 = (0, 3, -2)$$

- $\lambda_2 = \sqrt{13}$ $\quad (A - \sqrt{13}E)u_2^T = o^T$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{13} & 2 & 3 \\ 2 & -\sqrt{13} & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{13} & 2 & 3 \\ 0 & -3\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad u_2 = (\sqrt{13}, 2, 3)$$

- $\lambda_3 = -\sqrt{13}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 2 & 3 \\ 2 & \sqrt{13} & 0 \\ 3 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{13} & 2 & 3 \\ 0 & 3\sqrt{13} & -2\sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad u_3 = (-\sqrt{13}, 2, 3)$$

Poznámka: u_1, u_2, u_3 – kolmé, normování ještě chybí