Česká stopa v základech matematické analýzy

Magdalena Hykšová, FD ČVUT v Praze

Pro matematickou analýzu byla první polovina 19. století obdobím snah o vybudování pevných základů. Mezi nejpozoruhodnější osobnosti (nejen) v tomto ohledu patřil Bernard Bolzano (1781−1848), který usiloval o systematické vybudování celé matematiky včetně nauky o funkcích zcela od základů, od logiky a teorie reálných čísel. Z didaktického hlediska je zajímavá Bolzanova snaha o důkazy matematických tvrzení, která se zdají být na první pohled zřejmá z geometrické intuice. To je zvlášť aktuální v dnešní době, kdy se i ve výuce stále více používá geometrický software, který na jednu stranu poskytuje názornou představu o grafech různých funkcí a dalších objektech, ale zároveň může vést k mylným závěrům.

Jak uvidíme v přednášce, uvedenou problematikou se Bolzano zabýval již ve své práci *Rein analytischer Beweis des Lehrsatz, dass zwischen jeder zwey Werthen, die ein entgegensetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege* z roku 1817, kde mj. jako první podal definici spojitosti funkce v dnešním smyslu a analytický důkaz věty z názvu spisu, která se dnes označuje jako *věta o mezihodnotě* a která tvrdí: Jestliže funkce spojitá v uzavřeném intervalu nabývá v krajních bodech tohoto intervalu hodnot různého znaménka, pak je tato funkce aspoň v jednom vnitřním bodě daného intervalu rovna nule. Zatímco Augustin Louis Cauchy (1789−1857), se v prvním ze svých důkazů věty o mezihodnotě, podaném ve spise *Cours d' Analyse De L'Ecole Royale Polytechnique* z roku 1821, spokojil s konstatováním, že je zřejmé, že křivka, která je grafem spojité funkce, protne jednou nebo vícekrát vodorovnou přímku $y = c$, kde c je mezihodnota mezi funkčními hodnotami v krajních bodech daného intervalu, Bolzano upozorňoval na to, že geometrická intuice může vést k chybným závěrům a větu je třeba analyticky dokázat.

Jak dnes víme, pro funkce definované na množině racionálních čísel věta o mezihodnotě neplatí. Pro reálnou funkci reálné proměnné její důkaz využívá úplnosti množiny reálných čísel. Bolzanův důkaz z roku 1817, kdy struktura reálných čísel ještě nebyla exaktně zkonstruována, proto ještě není stoprocentní. Nicméně v pozdějším spise *Reine Zahlenlehre* z počátku 30. let 19. století, a tedy dlouho před Dedekindem, Weierstrassem, Mérayem a Cantorem, Bolzano reálná čísla vybudoval a následně využil ve spise *Functionenlehre* ze stejného období. Oba tyto spisy byly součástí rozsáhlého díla *Grössenlehre*, které bohužel zůstalo jen v rukopise a znovu objeveno bylo až ve 20. století.

Ve *Functionenlehre* Bolzano dokazuje řadu dalších vět, jejichž důkaz je založen na vlastnostech množiny reálných čísel, mj. věty označované dnes jako Bolzanova-Cauchyova podmínka pro existenci limity posloupnosti, Weierstrassovy věty existenci maximální a minimální hodnoty pro funkci, která je spojitá na omezené a uzavřené množině, existenci infima zdola omezené množiny aj. Kromě toho Bolzano uvádí mnoho příkladů spojitých funkcí, které mají překvapivě nenázorné vlastnosti a nutí čtenáře si názor opravovat a vyostřovat. Asi nejpozoruhodnější je příklad spojité funkce, která není monotónní na žádném intervalu a v žádném bodě nemá derivaci.

V přednášce se rovněž zmíníme o vztahu Bernarda Bolzana a Augustina Louise Cauchyho (1881−1848), který pobýval v Čechách v letech 1833 až 1836 a jehož si Bolzano jako matematika velice vážil.