Diferenciální geometrie v první polovině 19. století

Antonín Slavík, MFF UK v Praze

Důležitým milníkem v historii klasické diferenciální geometrie je práce Karla Friedricha Gausse nazvaná *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Obecná zkoumání zakřivených ploch) z roku 1827. Význam tohoto pojednání dokládá i skutečnost, že existují tři latinská vydání, dva francouzské překlady, dva německé a jeden anglický.

V přednášce připomeneme některé klíčové Gaussovy objevy z této práce a stručně zmíníme i další zajímavé výsledky z diferenciální geometrie v 19. století.

Gauss navázal na práce Leonharda Eulera, přistoupil však novým způsobem ke studiu křivosti ploch. Zatímco Euler studoval křivosti normálových řezů a jejich extrémy (hlavní křivosti), Gauss se rozhodl charakterizovat křivost plochy v daném bodě jediným číslem, které popisuje rychlost naklánění normál v okolí daného bodu. Zjistil, že takto zavedená křivost je ve skutečnosti součinem hlavních křivostí a lze ji vypočítat pomocí první a druhé základní formy plochy. Vzápětí dokonce pracným způsobem zjistil, že k výpočtu křivosti stačí pouze první základní forma! Tento překvapivý výsledek je dnes znám jako *theorema egregium* a vyplývá z něj, že zobrazení zachovávající délky křivek (izometrie) zachovávají i křivost plochy. Nutnou podmínkou pro existenci takového zobrazení mezi dvěma plochami je tedy shodná křivost v odpovídajících bodech.

Gauss se věnoval také trojúhelníkům, jejichž stranami jsou geodetické křivky. Zajímal se o součty velikostí vnitřních úhlů v takových trojúhelnících a dospěl k dalšímu slavnému výsledku: Součet zmenšený o π je roven integrálu křivosti přes plochu trojúhelníka. Na plochách s kladnou křivostí tedy součet vnitřních úhlů přesahuje π, zatímco na plochách se zápornou křivostí je součet naopak menší než π.

Gaussův přístup přinesl nový pohled na diferenciální geometrii. Podstatnou roli hrají veličiny a vlastnosti plochy, které lze vypočítat pouze měřením vzdáleností a úhlů na ploše, tj. pomocí první základní formy. Tyto vlastnosti a veličiny popisují tzv. vnitřní geometrii plochy, neboť se zachovávají při izometriích a nezávisí na parametrizaci plochy. Gaussovy myšlenky významně ovlivnily Bernharda Riemanna, vedly ke vzniku riemannovské geometrie a k rozvoji neeukleidovských geometrií.