1 Metody řešení úloh IP

1.1 Metoda větví a mezí (branch and bound)

Je to metoda pro řešení celočíselného programování, založená na opakovaném řešení pomocí simplexové metody s postupným přidáváním omezení. Metoda konverguje v konečném počtu kroků, i když doba konvergence může být dlouhá.

Jestliže úlohu řešíme tak, že jednou simplexovou tabulkou dostaneme řešení a to zaokrouhlíme, nemusíme dostat optimální řešení. Lze dokázat, že optimální řešení může ležet libovolně daleko, viz následující příklad.

Zadání úlohy:

Podle následujícího zadání, chceme dosáhnout maximálního zisku

$$x + 5y \to \max$$

Dále musíme splnit následující podmínky

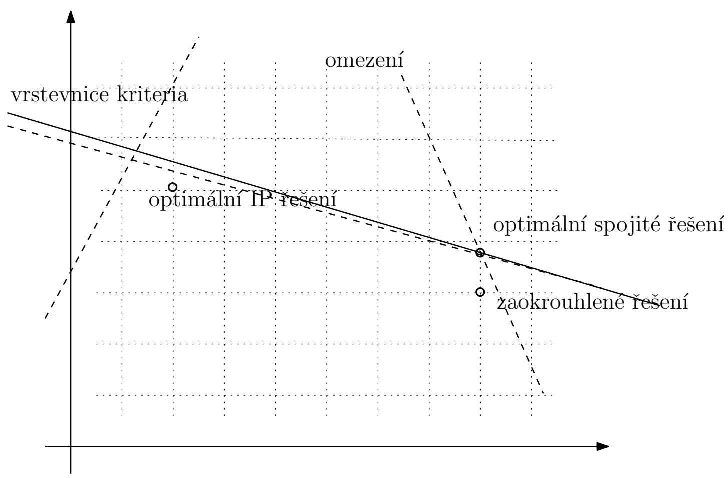
$$x + 5y \leq 50$$
$$x - y \leq 5$$
$$x + y \leq 30$$

Řešení

Úlohu nejdříve vyřešíme metodou lineárního programování, kde získáme řešení [12.5, 7.5]. Řešení celočíselného programování dá řešení [10, 8]. Výsledek celočíselného programování není zaokrouhlení lineárního programování. Z obrázku 1.1 je vidět, že zaokrouhlené řešení leží od optimální vrstevnice kritéria dále, než optimální IP řešení.

Algoritmus Metody větví a mezí (Branch and Bound - B&B) je:

1. Vezmeme optimální bod řešení - např. [12.5, 7.5] a tento bod vyjmeme z přípustné oblasti (buď vodorovně nebo svisle) tak, že přidáme nové omezení - např. $x \leq 12$ a $x \geq 13$ (tady vodorovně). Tím vzniknou dvě nové přípustné oblasti kde již neceločíselné řešení neleží, ale žádné celočíselné řešení není vyjmuto.
2. Znovu řešíme LP úlohu (simplexovou metodou) pro původní úlohu s dalšíma dvěma omezeními.
3. Dostaneme optimální řešení. Pokud je řešení celočíselné, je konec. Pokud není, pokračujeme opět od bodu 1.
4. Takhle stále přidáváme nová omezení, dokud nedostaneme celočíselné řešení.



Obrázek 1.1: Porovnání výsledku LP a IP

Řešení budeme demonstrovat na předchozím příkladě.

LP řešení	[12.5, 7.5]	krit=42.5	
řešení	omez	$x \leq 12$	
x(dolní)	$[12, 7, 6]$	krit=42.4	
řešení	omez	$x >= 13$	
x(horní)	X		omez vyhodíme
řešení	omez	$y \leq 7$	
y(dolní)	[12, 7]	krit=40	pamatujeme a vyhodíme
řešení	omez	$x \geq 8$	
y(horní)	[10, 8]	krit=42	

Obě řešení pro y vyhovují celočíselnosti. Druhé má ale vyšší hodnotu kritéria, proto ho volíme. Vidíme také, že toto řešení souhlasí s IP řešením.

Lips: Podmínky zadáme do programu Lips (BaB_demo.lpx).

1.2 Metoda řezů (cutting planes)

Tato metoda vychází z optimální simplexové tabulky pro LP. Tuto tabulku přepíšeme do rovnic, v kterých eliminujeme zlomkové koeficienty na pravou stranu. Vzniklé rovnice se zlomkovými koeficienty znovu řešíme simplexovou tabulkou. Končíme, když jako výsledek obdržíme celá čísla.

K soustavě omezení přidáváme další lineární omezení, která vyloučí optimální (zlomkové) LP řešení ale zachovají všechna přípustná celočíselná řešení.

Zadání úlohy:

Podle následujícího zadání, chceme dosáhnout maximálního zisku

$$J = 5x + 8y \rightarrow \max$$

Dále musíme splnit následující podmínky

$$x + y + s_1 = 6$$
$$5x + 9y + s_2 = 45$$

$$x, y, s_1, s_2 > \geq 0$$

Řešení

LP řešení tohoto problému dá simplexovou tabulku

$$\begin{array}{cccccc}
(-z) & & & -\frac{5}{4}s_1 & -\frac{3}{4}s_2 & = & -41\frac{1}{4} \\
& x & & +\frac{9}{4}s_1 & -\frac{1}{4}s_2 & = & \frac{9}{4} \\
& & y & -\frac{5}{4}s_1 & +\frac{1}{4}s_2 & = & \frac{15}{4}
\end{array}$$

Tu přepíšeme následujícím způsobem

$$\begin{array}{cccccccc}
(-z) & & & -2s_1 & -s_2 & +42 & = & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 \\
& x & & +2s_1 & -s_2 & -2 & = & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\
& & y & -2s_1 & & -3 & = & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2
\end{array}$$

a to tak, že

1. vlevo jsou jen celočíselné koeficienty,
2. vpravo jdou zlomky
   (a) absolutní hodnoty jsou kladné,
   (b) koeficienty u proměnných jsou záporné.

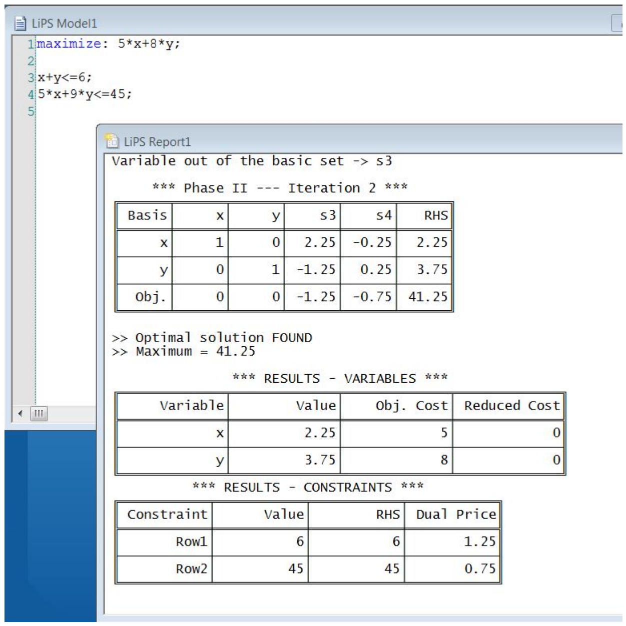
Dále platí:

1. Pro celočíselné řešení je jsou levé strany celá čísla.
2. Pro $s_1, s_2 \geq 0$ jsou pravé strany menší nebo rovny konstantám.
3. Protože konstanty jsou kladné zlomky, musí platit že pravé strany jsou ≤ 0 (a tedy i levé). Můžeme proto psát

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 + s_3 = 0$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 + s_4 = 0$$
$$poslední\,rovnice\,je\,stejná\,jako\,první$$

To jsou podmínky, které přidáme k původní úloze a opět řešíme pomocí simplexové tabulky. Celočíselné řešení končí výpočet, pro neceločíselné vyjdeme z nové simplexové tabulky a pokračujeme stejně.

První řešení



LiPS Model1

```
maximize: 5*x+8*y;

x+y<=6;
5*x+9*y<=45;
```

LiPS Report1

Variable out of the basic set -> s3

*** Phase II --- Iteration 2 ***

Basis	x	y	s3	s4	RHS
x	1	0	2.25	-0.25	2.25
y	0	1	-1.25	0.25	3.75
Obj.	0	0	-1.25	-0.75	41.25

>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 41.25

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Reduced Cost
x	2.25	5	0
y	3.75	8	0

*** RESULTS - CONSTRAINTS ***

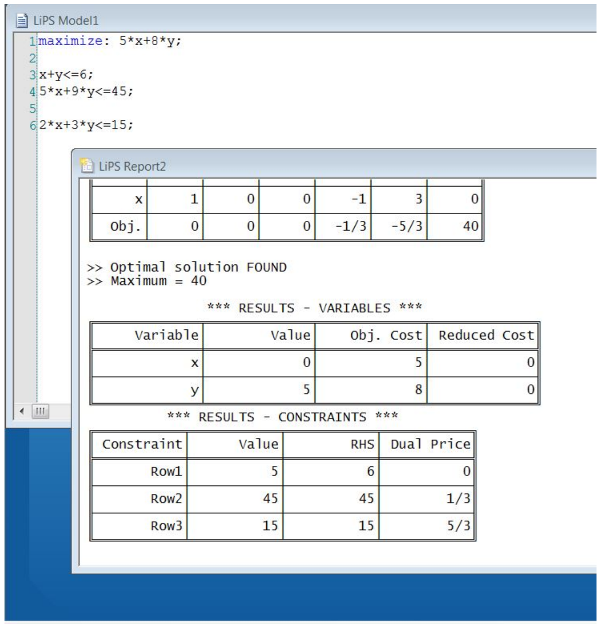
Constraint	Value	RHS	Dual Price
Row1	6	6	1.25
Row2	45	45	0.75

z tabulky sestavíme nová omezení pro s_1 a s_2 a přepočítáme na xa y. Ta jsou

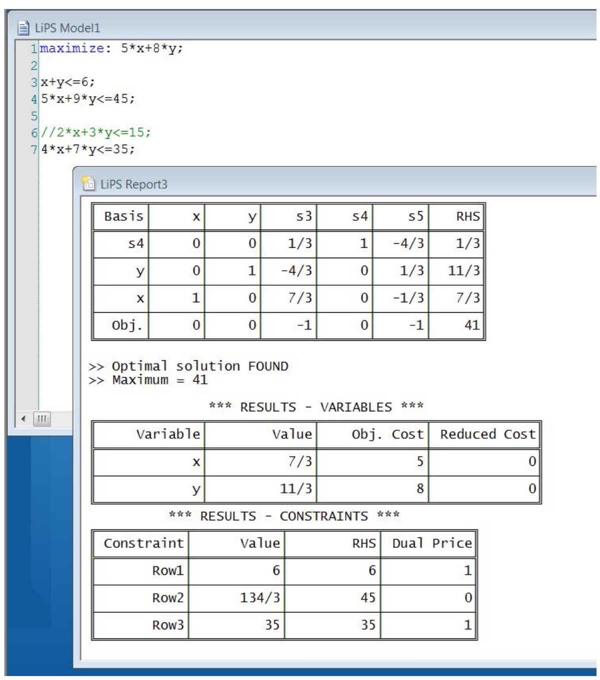
$$2x + 3y \leq 15$$

$$4x + 7y \leq 35.$$

První omezení dá rovnou výsledek [0, 5]



Když zkusíme druhé omezení, dostaneme $\left[\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right]$



a museli bychom v hledání dál pokračovat.

Lips: Podmínky zadáme do programu Lips (cuts.lpx).