Průvodce úlohami z LP2

Obsah

1 Triky v omezeních (1.2) 2

2 Triky v kriteriu (1.3) 3

3 Výběr z množiny (2.1) 5

4 Úlohy o množinách (2.3) 6

5 Řezání (2.5) 7

6 Obchodní cestující (2.7) 8

7 Infekční onemocnění (2.8) 8

8 Plánování produkce (2.6) 9

9 Řazení (2.10) 10

1 Triky v omezeních (1.2)

1.1 Omezení na výběr (1.2.1)

y-bin: 1-ano, 0-ne

Alespoň k $\quad \sum y_i \geq k$, alespoň jeden $\quad \sum y_i \geq 1$

Nejvýše k $\quad \sum y_i \leq k$, alespoň jeden $\quad \sum y_i \leq 1$

Právě k $\quad \sum y_i = k$, alespoň jeden $\quad \sum y_i = 1$

Speciálně:

$\cdots$ alespoň jedna jednička $\quad y_1 + y_2 \geq 1$

$\cdots$ alespoň jedna nula $\quad y_1 + y_2 \leq 1$

1.2 Indikace nenuly (1.2.2)

$x \in R_0^+$, y-bin.

Úloha: Jestliže je $x > 0$ pak $y = 1$.

$$x \leq My$$

Když je $x = 0$, může být taky $y = 0$. Pro $x > 0$ bude $y = 1$ (M dost velké)

1.3 Aktivace omezení (1.2.3)

$x \in R_0^+$, y - bin,

Úloha: podmínka $\quad a'x \leq b$ je buď aktivní(platí) nebo neaktivní (neplatí). Řízeno hodnotou y

– aktivační tvar

$$a'x - My \leq b;$$

– deaktivace

$$a'x + My \geq b$$

Aktivováno pro $y = 0$. Pro $y = 1$ je vždy splněno - neaktivní.

1.4 Implikované omezení (1.2.4)

Dvě podmínky: $A_1 : a_1^{'}x \leq b_1$ a $A_2 : a_2^{'}x \leq b_2$ a y_1, y_2-bin.

Úloha: $A_1 \Rightarrow A_2$, realizujeme jako $A_1^{\neg} \vee A_2$ – viz logická tabulka.

Platí $A_1^{\neg} : a_1^{'}x \geq b$ (blíže viz poznámka ve skriptech)

Programujeme jako

$$a_1^{'}x + My_1 \geq b_1$$

$$a_2^{'}x - My_2 \leq b_2$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

poslední rovnice je alternativa pro 0 (alespoň jedna nula).

1.5 Omezení na oblasti (1.2.5)

Úloha: Jsme nebo nejsme v jedné z oblastí ohraničených přímkami.

1. oblast

$$a_1^{'}x - M_1y_1 \leq b_1,$$

$$a_2^{'}x - M_2y_1 \leq b_2,$$

$$a_3^{'}x - M_3y_1 \leq b_3$$

2. oblast

$$a_4^{'}x - M_4y_2 \leq b_4,$$

$$a_5^{'}x - M_5y_2 \leq b_5$$

a tak dále. Každá oblast i má své y_i.

2 Triky v kriteriu (1.3)

2.1 Kriterium s fixními náklady (1.3.1)

$x \in R_0^+$, y-bin.

Úloha: Pro $x = 0$ je kritérium 0, pro $x > 0$ je $K + c'x$.

$$J = Ky + c'x \to \min$$

$$x \leq My$$

kde druhá rovnice je indikace nenuly.

2.2 Po částech lineární kriterium (1.3.2)

Úloha: Po částech lineární kriterium.

Příklad

Chceme kriterium se směrnicí 4 na $(0,4)$; 1 na $(4,10)$ a 3 na $(10,15)$.

Délky úseků jsou 4, 6 a 5.

Programujeme

$$\begin{aligned} 4w_1 \leq & \quad \delta_1 & \leq 4 \\ 6w_2 \leq & \quad \delta_2 & \leq 6w_1 \\ 0 \leq & \quad \delta_3 & \leq 5w_2 \end{aligned}$$

$$w_1, w_2 \in \{0,1\}, \; \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R_0^+$$

$$J = 4\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3$$

Optimalizuje se w a δ.

2.3 Součin v kriteriu (1.3.4)

Úloha: A. Součin k binárních veličin $x_1, x_2, \cdots, x_k$-bin

Chceme kriterium ve tvaru součinu $w = \prod_{i=1}^{k} x_i$

$$kw \leq \sum x_i$$

$$w \geq \sum x_i - (k-1)$$

B. Součin k binárních a jedna spojitá (x-bin, $y \in R_0^+$), kde $u = \max(y)$

Součin $w = y \prod_{i=1}^{k} x_i$

$$w \leq u x_j,\ j = 1, 2, \cdots, k$$

$$w \geq 0$$

$$w \leq y$$

$$w \geq u\left(\sum x_i - k\right) + y$$

2.4 Kriterium jako minimax (1.3.5)

Úloha: Máme n akcí které běží paralelně a jejich doba trvání p_i je odvozena od řešení úlohy. Chceme znát nejkratší dobu, za kterou budou všechny akce skončeny (tedy i ta nejdelší).

Vyjádříme všechny p_i a zavedeme veličinu q tak, že

$$p_1 \leq q,\ p_2 \leq q,\ \cdots p_n \leq q$$

a položíme

$$J = q \to \min$$

Buňku s kriteriem zadáme jako proměnnou modelu (tj. jako hledané řešení).

3 Výběr z množiny (2.1)

3.1 Problém batohu (2.1.1)

Úloha: Balíme si věci do batohu. Věci mají váhu a důležitost. Batoh má kapacitu. Chceme vzít co nejvíce důležitých věcí.

x-bin - co vybereme

m_i váha; d_i důležitost; K kapacita batohu

$$J = \sum d_i x_i \to \max$$

$$\sum m_i x_i \leq K$$

Excel: E02Batoh.xlsx

3.2 Výběr investic (2.1)

Úloha: Výběr investic. Náklady na investice, očekávaný výnos, omezení kapitálu. Chceme maximum příjmu (zisku).

x-bin - co vybereme

a_i náklady; c_i výnos; b omezení na kapitál

$$J = c'x \to \max$$

$$a'x \leq b$$

Excel: E01VybProj.xlsx

4 Úlohy o množinách (2.3)

4.1 Požární stanice (covering - pokrýváme oblasti) (2.3.1)

Úloha: V daných oblastech máme postavit požární stanice tak, aby všechny oblasti byly pokryty. Chceme co nejméně stanic a úplné pokrytí.

x_i-bin kde postavíme stanice

A_{ij} i - oblasti, j - pokryté oblasti

$$J = \sum x_i \to \min$$

$$Ax \geq 1$$

Excel: E04Stanice.xlsx

4.2 Recepty (packing - sbíráme ingredience) (2.3.2)

Úloha: Hledáme různá jídla podle ingrediencí, které máme k dispozici. Chceme maximální počet jídel.

x_i-bin která jídla uvaříme

A_{ij} i - ingredience, j - jídla

$$J = \sum x_i \to \max$$

$$Ax \leq 1$$

Excel: E05Recepty.xlsx

4.3 Letecké trasy (partitioning - přidělujeme etapy) (2.3.3)

Úloha: Obsazujeme letecké trasy tak, aby byly obslouženy všechny etapy právě jednou. Chceme co nejlevnější provoz.

x_i-bin realizované trasy

A_{ij} i - etapy, j - trasy

$$J = \sum c_i x_i \to \min$$
$$Ax = 1$$

Excel: E06Letadla.xlsx

5 Řezání (2.5)

5.1 Řezání tyčí (2.5.1)

Úloha: Z tyčí určité délky máme nařezat dané délky v daném počtu.

Chceme aby celkový odpad byl co nejmenší.

x_j-int kolik řezání podle jednotlivých řezných párů

c_j odpad při řezání podle j-tého plánu, b_i požadavek na délku i

Řezné plány v matici A_{ij} i - délky, j - plány

$$J = \sum c_j x_j \to \min$$
$$\sum_j A_{ij} x_j = (\geq)\, b_i$$

Excel: E08Rezani.xlsx

Varianta: Řezání pásů papíru o daných šířkách.

5.2 Řezání papíru

Úloha: Vyráběné papírové obdélníky mají rozměr 50×90 cm. Máme z nich vyříznout b_1 =50 obdélníků o rozměrech 20×45 cm^2 a b_2 =20 obdélníků 30×70 cm^2.

Řezné plány A_{ij}, zbytky z_i

$$J = \sum_{i=1}^{2} z_i x_i \to \min$$

$$Ax \geq b$$

Varianta: Umístění kontejnerů s typizovanými rozměry na obdélníkové palubě trajektu.

6 Obchodní cestující (2.7)

Úloha: Má projít všechna města, v každém být jen jednou, vrátit se zpět a být co nejkratší.

x_{ij} jde z i do j

c_{ij} vzdálenost z i do j

$$J = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_j x_{ij} = 1$$

$$\text{cykly}$$

Excel: E10ObchCes.xlsx

7 Infekční onemocnění (2.8)

Úloha: n týmů lékařů má prošetřit m míst s infekcí. Každý tým může prošetřit 0, 1 nebo 2 místa. Vyšetření něco tvá a přejezd taky. Jak se bude prošetřovat, aby **celá** akce skončila co nejdříve.

x_{ij}-bin tým i prošetří místo j; $w_{i,kl}$-bin tým i přejede z k do l.

t_{ij} doba šetření týmu i v místě j, d_{kl} doba přejezdu z místa k do místa l

Výpočet

$$P_i = \sum_j t_{ij} x_{ij} \text{ (šetření } i\text{-tého týmu)}$$

$$Q_i = \sum_{k,l} d_{kl} x_{ik} x_{il} \text{ (přejezdy } i\text{-tého týmu)}$$

$$J = \min \max_i (P_i + Q_i)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \tag{1}$$

$\cdots$ každé místo bude vyšetřeno,

$$\sum_j x_{ij} \leq 2 \tag{2}$$

$\cdots$ maximální počet míst na jeden tým je 2.

V Excelu

Kriterium

$$\text{(součin) } x_{ik}x_{il} = w_{i;kl} \text{ (dosadit do } Q\text{)}$$

$$J \text{ (prázdné)} \to \min$$

Omezení

$$\text{omezení (1) a (2)}$$

$$w_{i;kl} \geq 0, \quad w_{i;kl} \leq x_{ik}, \quad w_{i;kl} \leq x_{il}, \quad w_{i;kl} \geq x_{ik} + x_{il} - 1$$

$\forall i, k, l$ ($kl = 1, 2, \cdots$ kódujeme)

$$P_i + Q_i \leq J,\ \forall i$$

Excel: E11Infekce.xlsx

8 Plánování produkce (2.6)

Úloha: Plánujeme produkci na n let dopředu s možností zásob. Chceme vyrábět co nejlevněji.

x_t-int kolik v etapě t, y_t-bin jestli s v t vyrábí

c_t jednotka nákladů na produkci v etapě t, f_t fixní náklady v etapě t, h_t jednotka nákladů na skladování v etapě t, P_t požadavek v etapě t

z_t zásoba na konci etapy t, $z_0 = z_n = 0$ počáteční a koncové náklady.

Výpočet

$$z_t = z_{t-1} + x_t - P_t,\ t = 1, 2, \cdots, n$$

$$J = \sum_{t=1}^{n} (c_t x_t + f_t y_t) + \sum_{t=1}^{n-1} h_t z_{t-1} \to \min$$

$$x_t \leq M y_t$$

$$z_t \geq 0$$

Excel: E09PlanProd.xlsx

9 Řazení (2.10)

9.1 Předcházení (2.10.2)

Úloha: Máme n sériových úkolů. Každý úkol má svou délku trvání p_i a termín odevzdání d_i. Chceme: Uspořádat úkoly tak, aby celkové zpoždění v plnění úkolů bylo minimální.

y_{ij}-bin úkol i předchází úkol j (jen pro $i < j$)

s_i začátek úkolu i;

t_i zpoždění úkolu i

Výpočet

$$e_j = s_j + p_j, \forall j$$

$\cdots$ skutečný konec úkolu i

$$J = \sum t_j \to \min$$

$$e_j - d_j \leq t_j, \quad \forall j \tag{3}$$

$$e_i \leq s_j + M\left(1 - y_{ij}\right), \quad \forall i < j \tag{4}$$

$$e_j \leq s_i + M y_{ij}, \quad \forall i < j \tag{5}$$

kde podmínka 1 je definice t_i a podmínky 2 a 3 uspořádávají úkoly.

Excel: E13Razeni1.xlsx