

KOMENTÁŘE KE SLAJDŮM

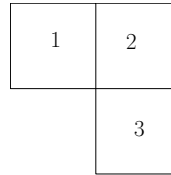
Obsah

1	Požární stanice	3
2	Kuchařka	4
3	Letadla	5
4	Párování	6
5	Řezání	7
6	Plánování produkce	9

7	Obchodní cestující	10
8	Infekce	17
9	Pořadí úloh	20
10	Řazení	22

1 Požární stanice

Situace



Matice A krát x

$$Ax = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & x_1 \geq 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \geq 1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \geq 1 \end{array}$$

Svisle jdou oblasti. 1. řádek je první oblast. Ta bude pokryta, když jednička bude v x_1 nebo x_2 .

2. řádek - druhá oblast. Libovolná stanice ji pokryje.

3. řádek - třetí oblast. Pokryje $x_2 = 1$ nebo $x_3 = 1$.

Minimální počet stanic \rightarrow bude v oblasti 2.

2 Kuchařka

jídla {ingredience}: 1 {1,2}, 2 {2,3}, 3 {1,3,4}

Matice A krát x (x označuje jídla)

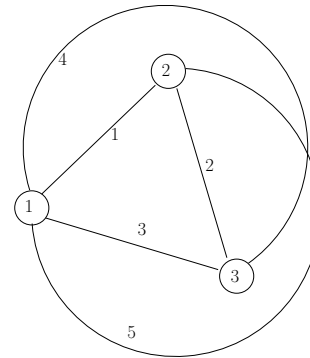
ingredience	jídla			
	x_1	x_2	x_3	
1	1	0	1	≤ 1
2	1	1	0	≤ 1
3	0	1	1	≤ 1
4	0	0	1	≤ 1

Když zvolíme jídlo 1 ($x_1 = 1$) tak vyčerpáme ingredience 1 a 2.

Můžeme ale ještě vařit jídlo 3 ($x_3 = 1$).

Atd. ...

3 Letadla



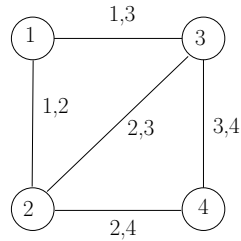
trasy {etapy}: 1 {1}, 2 {2}, 3 {3}, 4 {1,2}, 5 {2,3}

Matice A

etapy	trasy					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	0	1	0	= 1
2	0	1	0	1	1	= 1
3	0	0	1	0	1	= 1

4 Párování

Příklad



Matice

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	hrany					
uzly	1,2	1,3	2,3	2,4	3,4	
1	1	1				≤ 1
2	1		1	1		≤ 1
3		1	1		1	≤ 1
4				1	1	≤ 1

5 Řezání

Tyče

Tyče dlouhé 740 cm, chceme řezat délky 150 cm, 210 cm, 290 cm. Vybereme 6 plánů (sloupce A).

Matice A - int.

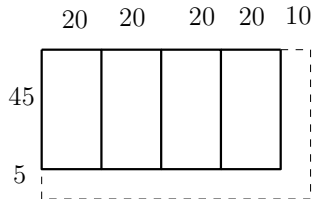
		Plán řezání					
Délka		1	2	3	4	5	6
290		1	2		1		1
210				2	2	1	1
150		3	1	2		3	1
Odpad		0	10	20	30	80	90

Papír

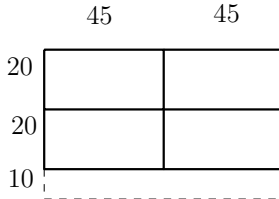
Vyráběné papírové obdélníky mají rozměr 50×90 cm. Máme z nich vyříznout $b_1 = 50$ obdélníků o rozměrech 20×45 cm² a $b_2 = 20$ obdélníků 30×70 cm².

Plány, které přichází v úvahu jsou na obrázku

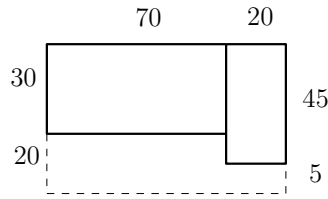
Plán 1



Plán 2



Plán 3



Dále můžeme uvažovat dva druhy kritéria. U prvního budeme standardně počítat odpad po řezání, u druhého celkovou délku řezu (v případě, kdy řezání je drahé). Dostáváme tak tabulku

Plán P	1	2	3
20×45	4	4	1
30×70	0	0	1
Zbytek Z	900	900	1500
Délka řezu D	260	220	135

6 Plánování produkce

Jak nastavit buňky pro výpočet zásob $z_t = z_{t-1} + x_t - P_t$. Na tři roky

t	0	1	2	3
z	0	z_1	z_2	z_3

Rovnice bude (pro čas $t = 1$)

$$z_1 = z_0 + x_1 - P_1$$

kde z_0 je zadáno jako 0. Dále kopírujeme doprava

$$z_2 = z_1 + x_2 - P_2$$

$$z_3 = z_2 + x_3 - P_3$$

Tady ale požadujeme, aby $z_3 = 0$ což zadáme jako podmínku. Pozor, poslední rovnici nemůžeme prostě vynechat, protože je svázána se z_2 a dále i se z_1 .

Protože se z neoptimalizuje, ale prostě napočítává, musíme extra zadat i podmínku $z \geq 0$. Tu stačí zadat pro časy 1 a 2, ale nic se nestane, když ji zadáme pro celé z .

7 Obchodní cestující

Asymetrický problém

Každé město jednou

$$x = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \cdot & \cdot & x_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & x_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & x_{43} & \cdot \end{array}$$

Suma 1. řádek = kolikrát vyšel z prvního města.

Suma 3. sloupec = kolikrát vešel do třetího města.

Každým městem jednou: $\sum_j x_{ij} = 1$; $\sum_i x_{ij} = 1$.

Smyčky

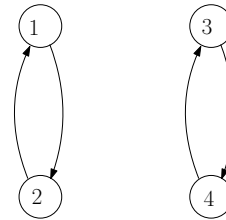
Uvažujeme situaci, kdy nevedou cesty z města do stejného města. Tedy v grafu nechceme smyčky.

Řešení:

1. Poctivé - proměnné $x_{i,i}$ vynecháme \rightarrow + méně proměnných, - špatná práce.
2. Vezmeme celé x a dáme podmínku $x_{i,i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ -kompromis.
3. Na diagonálu c dáme velká čísla (třeba 1000). Tzv. přídavná penalizace. Takovou cestu algoritmus nevybere. + jednoduchá práce, - přidáváme proměnné.

My preferujeme 3.

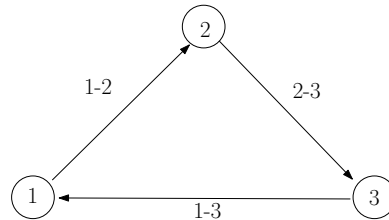
Cykly



Požadavek jednou tam a jednou ven nestačí.

Tyto podcykly je třeba vyloučit. To lze udělat tak, že pro každou k -tici uzlů, která by mohla tvořit cyklus budeme požadovat, aby počet hran které je spojují byl menší, než k (tj. aby v potenciálním cyklu alespoň jedna hrana chyběla).

Např. cyklus třemi uzly:



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ 3 & a_{31} & a_{32} & 0 \end{array} \end{array}$$

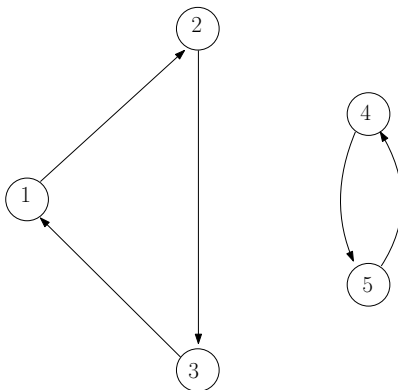
$$a_{12} + a_{23} + a_{31} \leq 2$$

Vyjmenování možných cyklů

To je dost složité a podrobný návod je ve [skriptech na stranách 57 a hlavně v Dodatku 106 a 107](#).

Pro orientovaný graf jsou základem kombinace. Na každé kombinaci pak fixujeme jeden uzel a děláme permutace ostatních. V n -uzlovém grafu kontrolujeme cykly do řádu $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, kde $\lfloor \cdot \rfloor$ je celá část čísla.

Např. $\lfloor \frac{6}{2} \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$.



Př. Kombinace 3 uzlů v 5-uzlovém grafu

1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
2	2	2	3	3	4	3	3	4	4
3	4	5	4	5	5	4	5	5	5

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Pro každou kombinaci: fixujeme třeba 1. uzel a děláme permutace.

Kontrolujeme pro všechny kombinace.

Např.

1. kombinace: 1, 2, 3 \rightarrow 1, 2, 3; 1, 3, 2.

Kontrolované cykly: 1-2-3-1; 1-3-2-1

nebo

10. kombinace: 3, 4, 5 \rightarrow 3, 4, 5; 3, 5, 4.

Kontrolujeme: 3-4-5-3; 3-5-4-3.

Celkem \rightarrow 20 podmínek.

Symetrický problém

Cesty tam a zpět jsou stejně dlouhé → neorientovaný graf.

Matice vzdáleností a stav

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ - & 0 & 9 & 8 & 5 \\ - & - & 0 & 3 & 7 \\ - & - & - & 0 & 6 \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \cdot & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ - & \cdot & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ - & - & \cdot & x_{34} & x_{35} \\ - & - & - & \cdot & x_{45} \\ - & - & - & - & \cdot \end{bmatrix}$$

Každý uzel 2 hrany

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & - & - & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & - & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 \end{bmatrix}$$

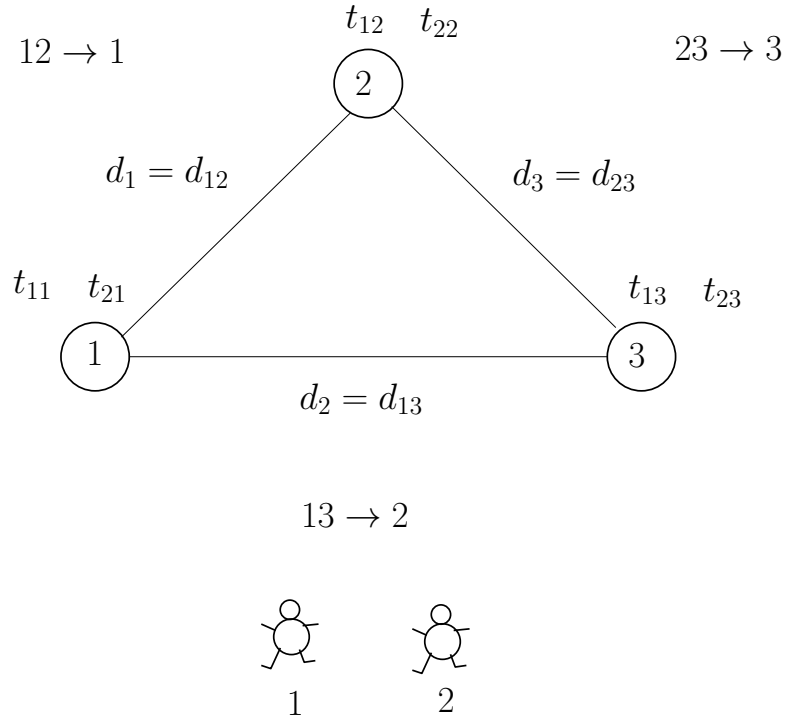
tj. $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 2$ atd.

Cykly

1. dvoukrokové se nemusí kontrolovat,
2. dělají se jen kombinace.

8 Infekce

Příklad: 2 týmy, 3 místa



Matice x

$$x = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{místo 1} & \text{místo 2} & \text{místo 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tým 1} \\ \text{tým 2} \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \hline x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Matice w

$$w = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{přejezd 1 (12)} & \text{přejezd 2 (13)} & \text{přejezd 3 (23)} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tým 1} \\ \text{tým 2} \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline w_{1;11} \rightarrow w_{11} & w_{1;12} \rightarrow w_{12} & w_{1;13} \rightarrow w_{13} \\ \hline w_{2;11} \rightarrow w_{21} & w_{2;12} \rightarrow w_{22} & w_{2;13} \rightarrow w_{23} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Vektor d

$$d = \begin{array}{|ccc|} \hline \text{přejezd 1 (12)} & \text{přejezd 2 (13)} & \text{přejezd 3 (23)} \\ \hline d_{12} & d_{13} & d_{23} \\ \hline \end{array}$$

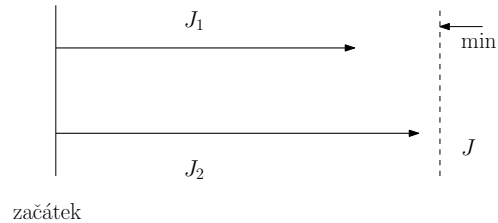
Kriterium

J_1 = doba tvání vyšetření 1. týmu

J_2 = doba tvání vyšetření 2. týmu

$$J \leq J_1$$

$$J \leq J_2$$



J je prázdná buňka, uvedená jako řešená a s uvedenými podmínkami.

Součin

Řeší se podle návodu pro součin - Slajd 2 (1.3.4)

9 Pořadí úloh

Zaměstnanci

Matice A - struktura obsazení směn (řádky i - směny; sloupce j - okna)

Příklad

Plán směn						
	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
	■					
		■				
	■				■	

	okno 1	okno 2	okno 3	okno 4	okno 5	okno 6
směna 1	1	1	1	0	0	0
směna 2	0	0	1	1	1	0
směna 3	1	0	0	0	1	1

$$y = \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} \quad c = \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix}$$

$$d = \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix}$$

d - požadavek/okno; c - plat/směnu

Zaměstnanci a brigádníci

Příklad

Plán směn						
	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
	■					
		■				
	■			■		

	okno 1	okno 2	okno 3	okno 4	okno 5	okno 6
směna 1	1	1	1	0	0	0
směna 2	0	0	1	1	1	0
směna 3	1	0	0	0	1	1

$$y = \boxed{} \quad cz = \boxed{}$$

$x =$	<input type="text"/>
$cb =$	<input type="text"/>
$d =$	<input type="text"/>

d - požadavek/okno; c - plat/směnu

10 Řazení

Příklad - tři úkoly

p - trvání úkolů; d - požadované termíny odevzdání (zadáno)

t - zpoždění; s - začátky; y - předcházení (optimalizováno);

$$e = s + p - \text{konce (výpočet)}$$

