1 Stav, stavový model a odhad stavu

1.1 Stav

Stav x_t je veličina systému, kterou nelze měřit a která se (na rozdíl od parametrů) v mění čase. Aby veličina mohla být stavem, musí platit, že v každém časovém okamžiku t v sobě zahrnuje veškerou informaci ze svého minulého vývoje. Pokud známe jeho hodnotu a aktuální řízení, jsme schopni spočítat distribuci jeho budoucí hodnoty.

Příklad [pojem stavu]

Uvažujme systém spojený s městskou řízenou čtyř-ramennou křižovatkou. V ramenech křižovatky měříme intenzitu provozu a zaznamenáváme poměry zelené na semaforu. Zajímáme se o délky kolon v křižovatce. Tato veličina „vektor délek kolon v křižovatce“ je v této úloze stavem. Nelze ji přímo měřit a máme-li délku kolony a víme-li, jaké řízení bude použito, můžeme počítat budoucí délku kolony. Přičteme všechna auta, co přijela do kolony před semaforem, a odečteme všechna auta, co odjela na zelenou. Různé délky aut a další zaokrouhlení spojená s periodou vzorkování zahrneme do šumu. Tento šum vnáší do výpočtů neurčitost.

1.2 Stavový model

Model stavové veličiny je reprezentován dvěma vztahy: **modelem stavu** a **modelem výstupu**. Pro oba modely se uvažuje normální rozdělení

– model dynamiky stavu

$$f\left(x_{t+1}|x_t, u_t\right) = \mathcal{N}_{x_{t+1}}\left(Mx_t + Nu_t,\, r_x\right), \tag{1.1}$$

– model měření výstupu

$$f\left(y_t|x_t, u_t\right) = \mathcal{N}_{y_t}\left(Ax_t + Bu_t,\, r_y\right), \tag{1.2}$$

kde $\mathcal{N}_x$ a $\mathcal{N}_y$ značí normální rozdělení.

Oba modely lze vyjádřit jako rovnice

$$x_{t+1} = Mx_t + Nu_t + w_t \tag{1.3}$$

$$y_t = Ax_t + Bu_t + v_t \tag{1.4}$$

kde $w_t \sim \mathcal{N}_w\left(0,\, r_x\right)$ a $e_t \sim \mathcal{N}_e\left(0,\, r_y\right)$.

1.3 Odhad stavu

Cílem je odhad stavu x_t pro $t = 1, 2, \cdots$ Odhad stavu je podobně jako odhad parametrů dán hp stavu za podmínky změřených dat $f\left(x_t|d\left(t\right)\right)$. V úloze rekurzivního odhadu parametrů (**??**) existoval jen posun času při vzorkování dat. Při odhadu stavu existují posuny dva:

– posun času v datech - tzv. **filtrace**, při které se informace z nově změřených dat vkládá prostřednictvím modelu výstupu do odhadu stavu; jde o přepočet $f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right) \rightarrow f\left(x_t|d\left(t\right)\right)$ a

– posun času ve stavu - tzv. **predikce**, při které se stav predikuje podle modelu dynamiky stavu “naslepo”, aniž by se měřila nová data; jde o přepočet $f\left(x_t|d\left(t\right)\right) \rightarrow f\left(x_{t+1}|d\left(t\right)\right)$.

Uvedené přepočty hp jsou následující

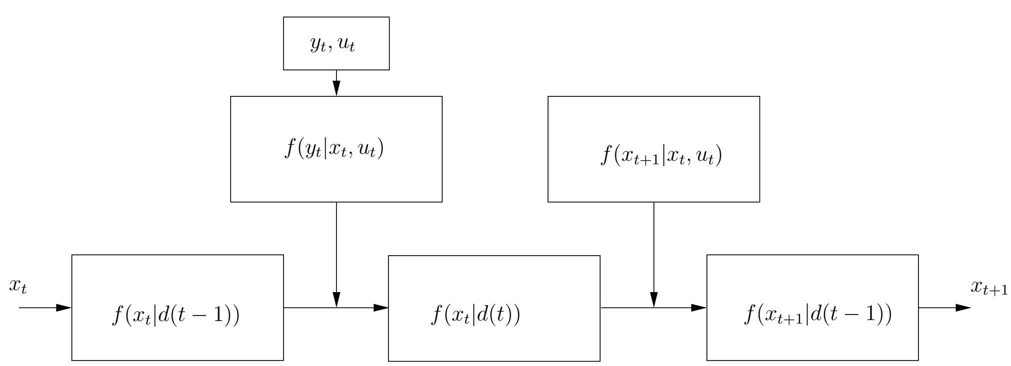
$$f\left(x_t|d\left(t\right)\right) = \frac{f\left(y_t|x_t,u_t\right) f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right)}{f\left(y_t|u_t,d\left(t-1\right)\right)} \tag{1.5}$$

$$f\left(x_{t+1}|d\left(t\right)\right) = \int_{x_t^*} f\left(x_{t+1}|x_t,u_t\right) f\left(x_t|d\left(t\right)\right) dx_t, \tag{1.6}$$

kde

- $f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right) \sim \mathcal{N}\left(x_{t|t-1}, R_{t|t-1}\right)$ je popis stavu, který vstupuje do KF a který závisí na datech do času $t-1$.
  $x_{t|t-1}$, $R_{t|t-1}$ jsou charakteristiky tohoto popisu - střední hodnota a kovarianční matice.
- $f\left(x_t|d\left(t\right)\right) \sim \mathcal{N}\left(x_{t|t}, R_{t|t}\right)$ je popis stavu po filtraci v okamžiku, kdy je odhad stavu korigován podle aktuálně změřeného výstupu y_t; tento odhad závisí na datech $d\left(t\right) = \left\{y_t, d\left(t-1\right)\right\}$.
  Charakteristiky popisu jsou $x_{t|t}$, $R_{t|t}$.
- $f\left(x_{t+1}|d\left(t\right)\right) \sim \mathcal{N}\left(x_{t+1|t}, R_{t+1|t}\right)$ je popis stavu po predikci, kdy podle stavové rovnice modelu předpovídáme stav do příštího časového okamžiku, aniž bychom získali novou informaci z dat. Tento odhad je tedy stále závislý na datech $d\left(t\right)$ ale platí již pro příští čas $t+1$. Tento popis stavu se stává vstupním pro odhad v příští periodě KF.
  Charakteristiky popisu jsou $x_{t+1|t}$, $R_{t+1|t}$.
- $f\left(y_t|x_t,u_t\right)$ a $f\left(x_{t+1}|x_t,u_t\right)$ jsou hp modelu stavu (1.1) a (1.2) .
- $f\left(y_t|u_t,d\left(t-1\right)\right) = \int_{x^*} f\left(y_t|x_t,u_t\right) f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right) dx_t$ je predikční hp výstupu (popis výstupu, nezávislý na stavu), která zde vystupuje jen jako normalizační konstanta.

Graficky lze přepočty hp znázornit takto



Poznámka

Odvození rekurze (1.5) , (1.6) v případě, kdy stavový model obsahuje člen s řízením u_t, předpokládá existenci tzv. přirozených podmínek řízení. Ty říkají, že odhad stavu a řídící veličina jsou podmíněně nezávislé. Předpokladem je platnost vztahů

$$f\left(x_t|u_t, d\left(t-1\right)\right) = f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right) \Leftrightarrow f\left(u_t|x_t, d\left(t-1\right)\right) = f\left(u_t|d\left(t-1\right)\right).$$

Diskuze k těmto vztahům je uvedena v Příloze **??**. ◁

1.4 Kalmanův filtr

Vztahy pro vývoj odhadu stavu podle (1.5) a (1.6) jsou (podobně jako Bayesův vzorec) vztahy pro funkce. S těmi nelze v počítači dobře pracovat. Jestliže všechny hp vyjádříme jako normální hp, lze rekurzi počítat pro jejich charakteristiky - střední hodnoty a rozptyly (kovarianční matice). Dostáváme následující číselnou rekurzi, která je dobře známa jako **Kalmanův filtr**

Filtrace:

$$\underbrace{y_p = Ax_{t|t-1} + Bu_t}_{\text{předpověď výstupu}}$$

$$\underbrace{R_p = r_v + AR_{t|t-1}A'}_{\text{kovariance výstupu}}$$

$$\underbrace{R_{r|t} = R_{t|t-1} - R_{t|t-1}A'R_p^{-1}AR_{t|t-1}}_{\text{přepočet kovariance stavu}}$$

$$\underbrace{K = R_{t|t}A'r_y^{-1}}_{\text{Kalmanův gain}}$$

$$\underbrace{x_{t|t} = x_{t|t-1} + K\left(y_t - y_p\right)}_{\text{datová oprava stavu}}$$

Predikce:

$$\underbrace{x_{t|t+1} = Mx_{t|t} + Nu_t}_{\text{předpověď stavu}}$$

$$\underbrace{R_{t+1|t} = r_x + MR_{t|t}M'}_{\text{přepočet kovariance stavu}}$$

Kalmanův filtr je realizována v programu, který je uveden v části Programy na straně **??**.

Použití tohoto programu budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad [odhad stavu]

Uvažujme stavový model

$$\begin{bmatrix} x_{1;t+1} \\ x_{2;t+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x_{1;t} \\ x_{2;t} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{N} u_t + \underbrace{0.6 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{sx} \begin{bmatrix} w_{1;t} \\ w_{2;t} \end{bmatrix},$$

$$y_t = \underbrace{[0.3,\ 0.7]}_{A} \begin{bmatrix} x_{1;t} \\ x_{2;t} \end{bmatrix} + \underbrace{0.1}_{sy} e_t,$$

kde

w_t a e_t jsou šumy s nulovou střední hodnotou a konstantními kovariančními maticemi;

M, N, A jsou matice stavového modelu,

sx a sy jsou směrodatné odchylky[1] kovariancí šumu.

- simulujte data z uvedeného stavového modelu,
- s pomocí Kalmanova filtru odhadněte simulovaný stav na daném časovém intervalu,
- simulovaný a odhadnutý stav porovnejte.

Řešení příkladu je uděláno v programu, který je uveden v části Programy, na straně **??**.

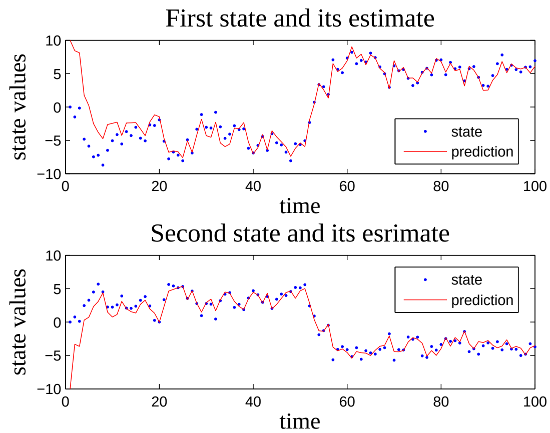
Výsledky příkladu jsou na Obrázku 1.1. Tečkovaná křivka je průběh simulovaného stavu, plná čára je jeho bodový odhad. Horní graf ukazuje první složku stavu, spodní druhou.

Poznámka k příkladu

Kalmanův filtr startuje s počátečním stavem $x_{1|0}$ a počáteční kovariancí $R_{1|0}$. Stav $x_{\cdot|\cdot}$ a kovariance odhadu stavu $R_{\cdot|\cdot}$ se během výpočtů přepočítávají. Matice r_x a r_y jsou kovariance šumů ze stavové a výstupní rovnice modelu. (Pozor!!! Nejsou to kovariance stavu a výstupu, ale kovariance šumů!!!). Ačkoli Kalmanův filtr pracuje se známým modelem, tyto kovariance většinou neznáme a musíme je nahradit jejich odhadem. A právě na správné nastavení těchto dvou kovariancí je další běh Kalmanova filtru velmi citlivý. Kovarianci $R_{1|0}$ lze nastavit jako diagonální s velkými čísly na diagonále (asi tak 10^3). Čím jsou tato čísla větší, tím méně důvěry vkládáme do našich počátečních odhadů stavu a tím rapidněji se tyto odhady na začátku mohou měnit. Ověřte si tuto skutečnost sami v předloženém příkladě. $\triangleleft$

Další doporučené pokusy jsou:

[1] Směrodatná odchylka kovarianční matice C je definována tzv. L'DL rozkladem této matice, tj. jako horní trojúhelníková matice L' s jedničkami na diagonále, pro kterou platí $C = L'DL$, kde D je diagonální matice s nezápornými prvky na diagonále.



Obrázek 1.1: Odhad stavu pomocí Kalmanova filtru

Z grafů je patrné, že počáteční odchylka odhadu od stavu způsobená nesprávnou hodnotou počátečního odhadu rychle vymizí a odhady jsou v rámci přítomného šumu velmi přesné. Musíme mít ovšem na paměti, že stavový model má nastaveny správné parametry (parametry modelu se předpokládají známé). $\triangleleft$

- odhad z dat simulovaných bez a se šumem (nastaví se pomocí směrodatných odchylek r_w a r_v),
- odhad z jiné soustavy (změna parametrů - matic M, N, A),
- start odhadu s různými počátečními odhady stavu (volba $x_{1|0}$).