1 Spojitý model

Veličiny v dopravním systému jsou náhodné posloupnosti indexované diskrétním časem t. V každém časovém okamžiku to jsou náhodné veličiny, po změření dostaneme realizace náhodné veličiny. Tyto náhodné veličiny mohou být buď spojité, nebo diskrétní. V této kapitole se budeme zabývat případem, kdy výstupem systému je spojitá náhodná veličina indexovaná diskrétním časem (náhodná posloupnost se spojitými hodnotami).

1.1 Princip stochastického modelu

Model je obrazem systému. Je to matematický popis závislosti modelované veličiny na jiných (vhodně vybraných) veličinách. Ve většině praktických případů funkci závislosti přímo neznáme, a tak vztahy mezi veličinami popisujeme za pomocí parametrů. Hodnoty parametrů určujeme pomocí odhadu z měřených dat. Tato neznalost parametru a poruchy ve veličinách (ať už vznikající při samotném generování nebo v procesu měření) způsobují, že je takový model prakticky vždy pod vlivem neurčitosti.

Příklad [stochastický model]

Princip modelování lze demonstrovat na situaci, kdy byla náhle zablokována silnice a přijíždějící auta se staví do kolony. Modelovanou veličinou y_t je délka kolony narůstající v diskrétním čase t. Tato délka závisí na intenzitě proudu I_t a na průměrné délce automobilu (včetně mezery mezi automobily) θ. Pro vývoj kolony v čase můžeme psát

$$y_t = y_{t-1} + \theta I_t, \;\; y_0 = 0,$$

kde y_0 je počáteční délka kolony a 0 je okamžik vzniku blokace. Tento model lze uvažovat jako deterministický.

Jestliže jsme naměřili s periodou vzorkování 90 sec

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_t	8	6	5	9	8	9	12	5	7	4

a uvažujeme-li délku vozidla 8 m, pak vývoj délky kolony v metrech bude

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	64	112	152	224	288	360	456	496	552	584

Je ale zřejmé, že tento deterministický model nemůže platit přesně. Počítali jsme s délkou auta 8 m, což je jen hrubý odhad, a rovněž jsme zaokrouhlovali počet automobilů v každé periodě měření intenzity I_t. Proto realističtější model je model stochastický, který můžeme vyjádřit následující rovnicí s přičteným šumem reprezentujícím neurčitosti a poruchy v systému

$$y_t = y_{t-1} + \theta I_t + e_t.$$

V tomto stochastickém modelu lze uvažovat i počáteční podmínku y_0 za náhodnou. Pokud jsme "v průměru" odhadovali dobře, bude mít šum přibližně nulovou střední hodnotu. V případě, že systém příliš nemění své stochastické vlastnosti, bude rozptyl šumu konstantní. Pokud dále "vysvětlující veličiny" modelu nesou o modelované veličině dostatek informací, budou jednotlivé složky náhodné posloupnosti navzájem nezávislé. Takové náhodné posloupnosti říkáme **bílý šum** (white noise).

Model, ke kterému jsme dospěli v minulém příkladě, obsahuje deterministickou (tady lineární) funkci počítající modelovanou veličinu y_t v závislosti na nezávislé veličině I_t, jakémsi parametru θ, který vyjadřuje konkrétní míru souvislosti mezi y_t a I_t. Stochastická část modelu je šum e_t, který (podobně jako v regresní analýze) "dorovnává" modelovanou veličinu i s poruchami proti jejím ideálním hodnotám (predikci).

Na tuto rovnici lze také pohlížet jako na transformaci náhodné veličiny e_t s rozdělením $f(e_t)$ na náhodnou veličinu y_t s podmíněným rozdělením $f(y_t|y_{t-1}, I_t, \theta)$. Abychom transformační rovnici mohli použít, musí být veličiny y_{t-1}, I_t, θ známé, tj. musí se vyskytnout v podmínce rozdělení modelované veličiny. Transformace potom představuje pouhé posunutí z nulové střední hodnoty šumu, na střední hodnotu modelované veličiny y_t, která je

$$E[y_t|y_{t-1}, I_t, \theta] = E[y_{t-1} + \theta I_t + e_t|y_{t-1}, I_t, \theta] = y_{t-1} + \theta I_t.$$

Rozptyl y_t je stejný jako rozptyl e_t. (Obojí si zkuste dokázat).

1.2 Lineární regresní model s normálním šumem

Nejčastěji používaným spojitým modelem je lineární regresní model s normálním rozdělením náhodné složky - šumu. Tento model má obecně rovnici

$$y_t = \psi_t' \Theta + e_t, \tag{1.1}$$

kde y_t je modelovaná veličina,
ψ_t je regresní vektor (vektor veličin, které vysvětlují y_t),
Θ je parametr modelu (zahrnuje regresní koeficienty θ a rozptyl šumu r),
e_t je šum s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem r.

Statický regresní model obsahuje v regresním vektoru jen vstupní veličiny (většinou měřené v současném časovém okamžiku), nikoli zpožděné hodnoty modelované veličiny. Jeho rovnici tedy můžeme psát ve tvaru

$$y_t = c_1 v_{1;t} + c_2 v_{2;t} + \cdots + c_m v_{m;t} + k + e_t,$$

kde $\psi_t' = [v_{1;t}, v_{2;t}, \cdots, v_{m;t}, 1]$ je regresní vektor a $\theta = [c_1, c_2, \cdots, c_m, k]$ je vektor regresních koeficientů. Některé z veličin regresního vektoru mohou představovat řízení.

Typický dynamický regresní model popisující vstup a výstup sytému je dán regresním vektorem ve tvaru

$$\psi_t' = [u_t,\, y_{t-1},\, u_{t-1},\, \cdots,\, y_{t-n},\, u_{t-n}, 1]$$

a jemu odpovídajícím vektorem parametrů

$$\theta' = [b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, k].$$

Dosadíme-li do (1.1), dostaneme **model ve tvaru rovnice**

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} + b_n u_{t-n} + k + e_t. \tag{1.2}$$

Tato rovnice pak definuje podmíněnou hp modelované veličiny y_t takto:

Šum e_t má podle definice rozdělení

$$f(e_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left\{-\frac{1}{2r} e_t^2\right\}.$$

Podle transformační rovnice (1.2), která má Jakobián roven jedné, platí

$$e_t = y_t - \psi_t' \theta$$

a po dosazení do rozdělení šumu dostaneme

$$f(y_t|\psi_t, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left\{-\frac{1}{2r}\left(y_t - \psi_t'\theta\right)^2\right\}, \tag{1.3}$$

což je hledaná podmíněná hp modelované veličiny - **model systému ve tvaru hustoty**.

Řádem regresního vektoru nazveme největší zpoždění modelované veličiny v regresním vektoru.

Statický model je model nultého řádu.

V modelu 1. řádu závisí modelovaná veličina na své minulé hodnotě. Zpoždění jiných veličin (řízení, externího vstupu) řád modelu neovlivní.

1.3 Diferenciální a diferenční rovnice ve spojitém modelu

Diskretizace diferenciální rovnice

Reálný čas plyne spojitě a většina dějů v reálném světě probíhá rovněž spojitě. Je proto dobře si uvědomit, že na pozadí našeho systému stojí spojitý proces a náš systém vzniká diskretizací tohoto procesu. Celou situaci budeme demonstrovat na velmi jednoduché (idealizované) soustavě popsané diferenciální rovnicí prvního řádu bez pravé strany - jedná se tedy o problém doznívání počátečních podmínek. Spojité proměnné zde budeme značit velkými písmeny s argumentem času τ v závorce - např. $Y(\tau)$. Spojitý systém je tedy popsán rovnicí (Y' zde značí derivaci)

$$Y'(\tau) + aY(\tau) = 0, \;\; Y(0) = y_0.$$

Naším úkolem je vyjádřit tuto diferenciální rovnici pomocí diferenční rovnice v diskrétním čase t s periodou vzorkování T ($\tau = tT$) tak, aby vzorky generované diferenční rovnicí ležely na funkci, která je řešením diferenciální rovnice a daných počátečních podmínek.

Postup odvození diferenční rovnice (diskretizace) je následující. Řešení diferenciální rovnice odhadneme ve známém exponenciálním tvaru a po dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$Y(\tau) = y_0 \exp\{-a\tau\}.$$

Do řešení dosadíme diskrétní čas $\tau = tT$. Diskretizované řešení napíšeme pro čas $t+1$

$$Y((t+1)T) = y_0 \exp\{-a(t+1)T\}.$$

Na levé straně je vzorek Y v čase $t+1$, který značíme y_{t+1}. Na pravé straně upravíme exponenciálu

$$\exp\{-a(t+1)T\} = \exp\{-atT\}\exp\{-aT\}.$$

První člen na pravé straně předchozí rovnosti je vzorek Y v diskrétním čase t, druhý člen je konstanta. Dosadíme do diskretizovaného řešení a dostaneme

$$y_{t+1} = y_0 \exp\{-aT\} y_t \quad \text{nebo} \quad y_t = y_0 \exp\{-aT\} y_{t-1}$$

a tedy

$$y_t = A y_{t-1},$$

kde $A = y_0 \exp\{-aT\}$. To je diferenční rovnice, která splňuje naše požadavky.

Podobným způsobem lze diskretizovat i diferenciální rovnice vyšších řádů, i když postup je poněkud zdlouhavější.

Typy diferenciálních a diferenčních rovnic

Pro řešení diferenciální rovnice s konstantními koeficienty bez pravé strany je rozhodující řešení její charakteristické rovnice. Pro rovnice druhého řádu

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

je charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Mohou nastat tři typy řešení charakteristické rovnice:

1. *dvě reálná řešení* λ_1 a λ_2 - diferenciální rovnice má řešení ve tvaru lineární kombinace dvou exponenciál
$$y = \alpha_1 \exp\{\lambda_1\tau\} + \alpha_2 \exp\{\lambda_2\tau\}$$
2. *jeden dvojnásobný kořen* λ - řešení je v tvaru
$$y = (\alpha_1\tau + \alpha_2)\exp\{\lambda\tau\}$$

3. *dva komplexně sdružené kořeny* $\lambda + j\omega$ a $\lambda - j\omega$ - řešení diferenciální rovnice je

$$y = \exp\left\{\lambda\tau\right\}\left[\alpha_1 \sin\left(\omega\tau\right) + \alpha_2 \cos\left(\omega\tau\right)\right].$$

Pro diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany platí podobná analýza. Pro rovnici

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

je opět rozhodující charakteristická rovnice

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

kde z je operátor jednokrokového předstihu $y_{t+1} = z y_t$.

Tato rovnice má podobné typy řešení (i je imaginární jednotka):

1. *dva reálné kořeny* λ_1 a λ_2 - řešení diferenční rovnice je

$$y_t = \beta_1 \lambda_1^t + \beta_2 \lambda_2^t$$

2. *jeden dvojnásobný kořen* λ - řešení je

$$y_t = \beta_1 \lambda^t + \beta_2 t \lambda^t$$

3. *dva komplexně sdružené kořeny* $\lambda \pm i\omega$ - řešení je

$$y_t = \left(\lambda^2 + \omega^2\right)^{t/2}\left(\beta_1 \sin\left(\omega t\right) + \beta_2 \cos\left(\omega t\right)\right)$$

1.4 Regresní model ve stavovém tvaru

Stav systému x_t je taková veličina (vektor veličin), který v sobě obsahuje informaci o celém dosavadním vývoji systému. Jestliže známe starý stav a aktuální řídící veličiny, jsme schopni konstruovat pravděpodobnostní popis nového stavu. Model stavu má tedy vždy 1. řád. V lineárním případě je dán rovnicí

$$x_t = M x_{t-1} + N u_t + w_t,$$

kde M, N jsou matice odpovídajících rozměrů, w_t je bílý šum.

V řadě případů je výhodnější pracovat s modelem 1. řádu, i když mnoho-rozměrným, než s regresním modelem s řádem vyšším než jedna. Konstrukcí stavového modelu je celá řada. Takováto procedura je známa např. z přepočtu diferenciální (nebo diferenční) rovnice n-tého řádu na n rovnic, prvního řádu. Zde uvedeme tu nejjednodušší, která přímo vychází ze struktury regresního modelu.

Uvažujme obecně regresní model

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} + b_n u_{t-n} + k + e_t.$$

Definujeme vektor (stav) $x_t = [y_t, u_t, y_{t-1}, u_{t-1}, \cdots, y_{t-n}, u_{t-n}, 1]'$ a pro něj s pomocí regresního modelu a identických rovnic sestavíme model v následujícím tvaru

$$x_t = Mx_{t-1} + Nu_t + \epsilon_t \tag{1.4}$$

se strukturou (z důvodu přehlednosti ji uvedeme pro regresní model řádu 2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ u_t \\ y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ y_{t-2} \\ u_{t-2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_t},$$

kde první rovnice představuje regresní model a zbytek jsou identity.

Význam tohoto převodu ukážeme na příkladě.

Příklad [regresní model]

Pro regresní model 2. řádu se zanedbatelným šumem (tedy šumem s tak malým rozptylem, že šum lze zanedbat) určete hodnotu y_5 pro počáteční podmínky y_{-1}, y_0 a dané řízení $u_{-1}, u_0, \cdots, u_5$.

Teoreticky je úloha jednoduchá. Pro předpověď y_1 dosadíme do regresního vektoru regresního modelu a hodnotu výstupu prostě vypočteme při současném zanedbání šumu

$$y_1 = b_0 u_1 + a_1 y_0 + b_1 u_0 + a_2 y_{-1} + b_2 u_{-1} + k.$$

Při výpočtu y_2 použijeme známé hodnoty a také vypočtenou hodnotu výstupu y_1

$$y_2 = b_0 u_2 + a_1 y_1 + b_1 u_1 + a_2 y_0 + b_2 u_0 + k =$$

$$= b_0 u_2 + a_1 (b_0 u_1 + a_1 y_0 + b_1 u_0 + a_2 y_{-1} + b_2 u_{-1} + k) + b_1 u_1 + a_0 y_0 + b_0 u_0 + k =$$
$$= b_0 u_2 + (a_1 b_0 + b_1) u_1 + (a_1 b_1 + b_0) u_0 + a_1 b_2 u_{-1} + \left(a_1^2 + a_0\right) y_0 + a_1 a_2 y_{-1} + (a_1 + 1) k.$$

Tímhle způsobem lze pokračovat až do času $t = 5$. Není sice příliš složité postřehnout, jakým způsobem se vyvíjejí koeficienty u jednotlivých veličin, nicméně tato úloha je daleko snazší, použijeme-li stavový model

$$x_t = Mx_{t-1} + Nu_t,$$

kde jsme podle předpokladu zadání zanedbali šum. Platí

$$x_1 = Mx_0 + Nu_1,$$

kde $x_0 = [y_0, u_0, y_{-1}, u_{-1}, 1]'$. Dále

$$x_2 = Mx_1 + Nu_2 = M (Mx_0 + Nu_1) + Nu_2 = M^2 x_0 + MNu_1 + Nu_2,$$

$$x_3 = Mx_2 + Nu_3 = M \left(M^2 x_0 + MNu_1 + Nu_2\right) + Nu_3 = M^3 x_0 + M^2 Nu_1 + MNu_2 + Nu_3.$$

Ani nemusíme pokračovat a můžeme psát obecný vzorec:

$$x_t = M^t x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} M^i N u_{t-i}.$$

Požadované y_5 je prvním prvkem vektoru x_5, tedy

$$x_5 = M^5 x_0 + \sum_{i=0}^{4} M^i N u_{t-i}, \quad \text{a} \quad y_5 = x_{1;5}.$$

2 Diskrétní a logistický model

2.1 Diskrétní model

Pokud mají všechny veličiny vstupující do modelu konečný počet hodnot, hovoříme o diskrétním modelu. Seřadíme-li tyto veličiny do vektoru (tzv. rozšířený regresní vektor $\Psi_t = \left[y_t, \psi_t'\right]'$), pak realizací náhodných veličin v tomto vektoru dostaneme určitou konfiguraci jejich hodnot. Diskrétní systém má konečný počet takových konfigurací, které nazýváme módy. Příkladem je odbočení auta v T-křižovatce doprava, nebo doleva (2 módy) nebo kolona nebyla a není, nebyla a je, byla a není, byla a je (4 módy). Popis diskrétního systému proto můžeme provést velmi obecně, a to tak, že každé konfiguraci hodnot veličin v rozšířeném regresním vektoru přiřadíme její pravděpodobnost, tedy

$$f\left(y_t|\psi_t, \Theta\right) = \Theta_{y_t|\psi_t}, \tag{2.1}$$

kde multi-index (rozšířený regresní vektor s diskrétními hodnotami) $y_t|\psi_t = \left[y_t, \psi_{1;t}, \psi_{2;t}, \cdots, \psi_{n_\psi;t}\right]$ je vektor indexů (hodnot diskrétních veličin) a znaménko "|" je použito jen formálně a ukazuje, které veličiny jsou modelovány a které se nachází v podmínce modelu.

Podobně jako u regresního modelu nazveme **řádem modelu** největší zpoždění modelované veličiny v regresním vektoru.

Příklad [diskrétní model]

Model budeme demonstrovat na jednoduchém, ale přesto dostatečně obecném příkladě tzv. "řízené koruny s pamětí". Jedná se o systém s dvouhodnotovým výstupem s hodnotami 1 a 2 (např. rub a líc), který je závislý na minulém výstupu (např. po dopadu se koruna zašpiní a tím se rozváže pravděpodobnostní poměr jednotlivých stran) a na dvouhodnotovém řízení, rovněž s hodnotami 1 a 2 (např. způsob, jak se položí mince na ruku při hodu). Potom platí

$$y_t \in \{1, 2\}, \quad \psi_t = [u_t, y_{t-1}] \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}, \quad \Psi_t = [y_t|u_t, y_{t-1}]$$

a model je možno zapsat ve formě tabulky

$f(y_t \mid u_t, y_{t-1})$	y_t	
$[u_t, y_{t-1}]$	1	2
1, 1	0.3	0.7
1, 2	0.8	0.2
2, 1	0.1	0.9
2, 2	0.2	0.8

kde $\Theta_{1|11} = 0.3$ a např. $\Theta_{2|21} = 0.9$.

Obecně pro parametry diskrétního modelu musí platit

$$\sum_{i \in y^*} \Theta_{i|jk} = 1, \ \forall j, k.$$

Využití diskrétního modelu je možné zejména v situacích, kdy:

1. Modelovaná veličina je určitou klasifikací nějakého jevu - např. nehoda nastala nebo nenastala nebo nastala nehoda bez zranění, se zraněním, s úmrtím.

2. Nezávislé veličiny (v regresním vektoru) označují okolnosti, které doprovázejí naměřenou hodnotu modelované veličiny. Tyto veličiny mohou být nominální, například veličina denní doba s hodnotami: svítání, den, soumrak, noc.

Je potřeba si uvědomit, že čím více veličin obsahuje regresní vektor a čím více různých hodnot tyto veličiny mohou nabýt, tím větší je počet stavů takového systému. Abychom se o každém stavu něco dozvěděli, potřebujeme obrovský počet dat. Při tvorbě diskrétního modelu se proto snažíme do regresního vektoru vybrat jen podstatné veličiny (vzhledem k vysvětlení hodnot modelované veličiny) a u každé veličiny definovat co nejmenší počet hodnot. Pomoci může např. spojování hodnot: pro denní dobu místo jitro, den, soumrak, noc lze definovat světlo, šero, tma (pokud tomu nebrání konkrétní zadání úlohy).

2.2 Logistický model

Logistický model použijeme v případě, kdy modelovaná veličina je diskrétní (dvouhodnotová) $y_t \in \{0, 1\}$ a předpokládáme, že její hodnota stochasticky závisí na veličinách

$$\psi_t = [1, x_{1;t}, x_{2;t}, \cdots x_{n;t}]',$$

které mohou být jak diskrétní, tak i spojité. Jednička v regresním vektoru představuje opět respektování konstanty modelu. V případě, kdy veličiny z vektoru ψ_t jsou všechny diskrétní, jedná se o diskrétní model, kterým jsme se zabývali v kapitole 2.1.

Logistický model má tvar

$$f(y_t \mid \psi_t, \Theta) = \frac{\exp(y_t z_t)}{1 + \exp(z_t)}, \tag{2.2}$$

kde je použita lineární regrese

$$z_t = \psi_t^{'}\Theta + e_t. \tag{2.3}$$

Význam logistického modelu je v tom, že popisuje diskrétní veličinu y_t v závislosti na spojité veličině z_t která je vypočtena na základě lineární regrese z veličin, které mohou být jak diskrétní, tak i spojité.

Příklad [logistický model]

Modelujeme závažnost nehody $y_t \in \{0, 1\}$ v závislosti na rychlosti automobilu $v_{1;t} \in R^+$ a osvětlení $v_{2;t} \in \{1,2,3\}$, kde 1 znamená světlo, 2 označuje šero a 3 představuje tmu. Lineární regrese (2.3) má rovnici

$$z_t = \theta_0 + \theta_1 v_{1;t} + \theta_2 v_{2;t} + e_t$$

a model (2.2) bude tvořen pravděpodobnostmi

$$\begin{aligned} P\left(y_t = 1|\psi_t, \Theta\right) &= \frac{\exp\left(z_t\right)}{1+\exp\left(z_t\right)}, \\ P\left(y_t = 0|\psi_t, \Theta\right) &= \frac{1}{1+\exp\left(z_t\right)}, \end{aligned}$$

kde první rovnici je pro $y_t = 1$ a druhá pro $y_t = 0$.

Princip fungování tohoto modelu je následující. Lineární regrese (2.3) mapuje regresní vektor ψ_t na veličinu z_t, které přirozeně nabývá hodnot z celé reálné osy. Funkce (2.2) potom transformuje tuto reálnou osu do intervalu (0, 1), takže nakonec dostaneme hodnotu ve tvaru pravděpodobnosti. Hodnoty této pravděpodobnosti blízké 1 ukazují na hodnotu $y_t = 1$, hodnoty blízké 0 mluví pro $y_t = 0$.

Jiné vyjádření logistického modelu

Jiné možné vyjádření stejného logistického modelu je možno napsat pomocí funkce *logit,* která je definována

$$logit\left(p\right) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right). \tag{2.4}$$

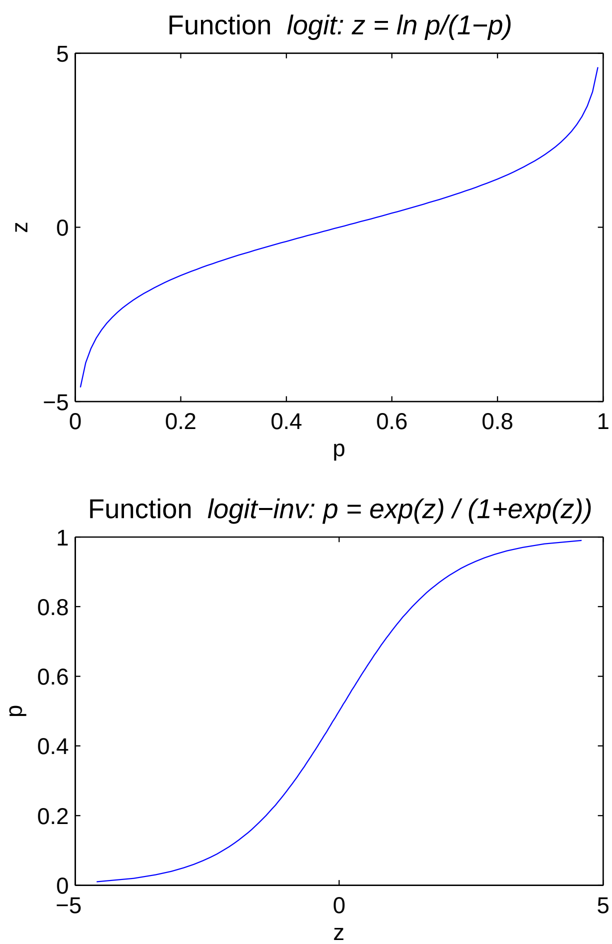
Dosadíme-li $p = P\left(y_t = 1|\psi_t, \Theta\right)$, dostaneme logistický model ve tvaru

$$\ln\left(\frac{P\left(y_t = 1|\psi_t, \Theta\right)}{1 - P\left(y_t = 1|\psi_t, \Theta\right)}\right) = \psi_t\Theta + e_t.$$

Samozřejmě pro $y_t = 0$ platí

$$P\left(y_t = 0|\psi_t, \Theta\right) = 1 - P\left(y_t = 1|\psi_t, \Theta\right)$$

Průběh funkce *logit* je vykreslen na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Funkce $z = logit(p)$

Funkce logit převádí proměnnou p, která má rozsah $(0, 1)$ *na veličinu z, která má hodnoty z celé reálné osy. Toho se využije při logistické regresi tak, že hodnoty* $z = \psi'\Theta \in R$ *se transformují na pravděpodobnosti* $p \in (0, 1)$. *Transformace je patrná z obrázku: velké kladné hodnoty z se zobrazí blízko* $p = 1$, *hodnoty z kolem nuly padnou blízko* $p = 0.5$ *a velké záporné hodnoty z dávají hodnoty blízko* $p = 0$.
Funkci logit_inv inverzní k funkci logit dostaneme otočením horního obrázku o 45^o *(viz dolní obrázek). Tato funkce převádí naopak reálná čísla na pravděpodobnosti.*