Nelineární Kalmanův filtr

Stavový model

$$
\begin{aligned}
x_t &= Mx_{t-1} + Nu_t + F + w_t \\
y_t &= Ax_{t-1} + Bu_t + G + v_t
\end{aligned}
$$

Kalmanův filtr realizuje přepočet

$$x_{t-1|t-1} \rightarrow x_{t|t-1} \rightarrow x_{t|t}$$

tedy nejdříve predikci, potom filtraci.

Nelineární KF je

$$
\begin{aligned}
x_t &= g\left(x_{t-1}, u_t\right) + w_t \\
y_t &= h\left(x_{t-1}, u_t\right) + v_t
\end{aligned}
$$

Nelineární funkce linearizujeme Taylorovým rozvojem s derivací

$$g' = \frac{\partial g\left(x, u\right)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

a to v bodu posledního bodového odhadu $\hat{x}_{t-1}$, takže pro linearizovanou funkci platí

$$g\left(x_{t-1}, u_t\right) \doteq g\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) + g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right)\left(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}\right) =$$

$$= g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) x_{t-1} + g\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) - g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) x_{t-1}$$

a podobně pro y.

Linearizovaný model je

$$
\begin{aligned}
x_t &= g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) x_{t-1} + g\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) - g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) \hat{x}_{t-1} + w_t \\
y_t &= h'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) x_{t-1} + h\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) - h'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) \hat{x}_{t-1} + v_t
\end{aligned}
$$

což odpovídá lineárnímu modelu

$$
\begin{aligned}
x_t &= \tilde{M} x_{t-1} + \tilde{F} + w_t \\
y_t &= \tilde{A} x_{t-1} + \tilde{G} + v_t
\end{aligned}
$$

kde $\tilde{M} = g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right)$, $\tilde{F} = g\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) - g'\left(\hat{x}_{t-1}, u_t\right) \hat{x}_{t-1}$ a obdobně pro $\tilde{A}$ a $\tilde{G}$.

Model s neznámými parametry

Budeme ilustrovat na příkladě:

Model

$$\begin{aligned} x_t &= Mx_{t-1} + u_t + w_t \\ y_t &= x_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

kde M je neznámý parametr.

Zavedeme nový stav $X_t = [X_1, X_2]_t^{\prime} = [x_t, M]^{\prime}$.

Nový model

$$\begin{aligned} X_{1;t} &= X_{2;t-1}X_{1;t-1} + u_t + w_t \\ X_{2;t} &= X_{2;t-1} + \epsilon_t \\ y_t &= X_{1;t} + v_t \end{aligned}$$

kde druhá rovnice představuje náhodnou procházku s velmi malým šumem ϵ_t, který umožní malé změny $X_{2;t} = M$ tak, aby se mohla najít správná hodnota tohoto parametru.

Dostali jsme tak nelineární model, který linearizujeme tak, jak bylo ukázáno

$$\begin{aligned} x_t &= g'(\hat{x}_{t-1}, u_t)\, x_{t-1} + g(\hat{x}_{t-1}, u_t) - g'(\hat{x}_{t-1}, u_t)\, \hat{x}_{t-1} + w_t \\ y_t &= h'(\hat{x}_{t-1}, u_t)\, x_{t-1} + h(\hat{x}_{t-1}, u_t) - h'(\hat{x}_{t-1}, u_t)\, \hat{x}_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

kde nelineární je jen první rovnice, s $g = X_2 X_1 + u$.

$$\frac{\partial g}{\partial X_1}|_{X_{2;t-1}} = X_2 \text{ a } \frac{\partial g}{\partial X_2} = X_1$$

takže linearizovaný model bude

$$\begin{aligned} X_{1;t} &= \left[\hat{X}_{2;t-1},\, \hat{X}_{1;t-1}\right] X_{t-1} + \hat{X}_{2;t-1}\hat{X}_{1;t-1} - \left[\hat{X}_{2;t-1},\, \hat{X}_{1;t-1}\right] \hat{X}_{t-1} + w_t \\ X_{2;t} &= X_{2;t-1} + \epsilon_t \\ y_t &= X_{1;t-1} + v_t \end{aligned}$$