1 Předpověď modelované veličiny

Jestliže sledujeme vývoj modelované veličiny v čase a popisujeme ji pomocí dynamického modelu, můžeme se v čase t zajímat o její předpověď v čase $t+k$, tedy odhadovat její hodnotu y_{t+k}. Úplný popis předpovědi můžeme vyjádřit opět pomocí podmíněné hp

$$f\left(y_{t+k}|y\left(t\right)\right). \tag{1.1}$$

Částečný popis předpovědi, tedy její bodový odhad (viz Přílohy **??**), určuje podmíněná střední hodnota

$$E\left[y_{t+k}|\mathrm{y}(t)\right]=\int_{y^*}y_{t+k}f\left(y_{t+k}|y\left(t\right)\right)dy_{t+k}. \tag{1.2}$$

Výpočet předpovědi se liší podle (i) počtu kroků v předpovědi (jednokroková, vícekroková), (ii) parametrů modelu (známé, neznámé), (iii) formě odhadu (bayesovský odhad, odhad s bodovým odhadem parametrů, bodový odhad výstupu), (iv) typu modelu (diskrétní, spojitý).

Data pro předpověď: Pro jednoduchost budeme v této kapitole uvažovat data tvořená pouze výstupem soustavy. Nebudeme uvažovat ani řízení, ani žádnou další externí veličinu.

Časové značení: Dále budeme uvažovat situaci, kdy jsme v čase t, tj. změřili jsme hodnotu y_t, případně jsme přepočetli statistiky odhadu parametrů a máme aposteriorní hp $f\left(\Theta|y\left(t\right)\right)$, případně jsme spočítali bodové odhady parametrů a nyní se zajímáme o hodnotu výstupu k kroků dopředu.

1.1 Jednokroková předpověď

Pro $k=1$ dostáváme jednokrokovou předpověď. O té jsme již mluvili dříve (viz odstavec **??**) jako o odhadu výstupu. Pokud máme **model systému se známými parametry** Θ, je situace triviální. Předpověď výstupu je dána přímo modelem $f\left(y_{t+1}|y\left(t\right)\right)$ nebo jeho střední hodnotou $\hat{y}_{t+1}=E\left[y_{t+1}|y\left(t\right)\right]=\int_{y^*}y_{t+1}f\left(y_{t+1}|y\left(t\right)\right)dy_{t+1}$.

Příklad [jednokroková predikce s regresním modelem]

Pro regresní model $y_t=a_1y_{t-1}+a_2y_{t-2}+e_t$, kde $e_t\sim N\left(0,r\right)$ je jednokroková prediktivní hp dána hustotou modelu

$$f\left(y_{t+1}|y\left(t\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\exp\left\{-\frac{1}{2r}\left(y_{t+1}-a_1y_t-a_2y_{t-1}\right)^2\right\}$$

a bodová předpověď je

$$E\left[y_{t+1}|y\left(t\right)\right]=a_1y_t+a_2y_{t-1}.$$

Obecně totiž pro model $y_t=\psi_t'\theta+e_t$ platí:

$$E\left[y_t|\psi_t,\Theta\right]=E\left[\psi_t'\theta+e_t\right]=E\left[\psi_t'\theta\right]+E\left[e_t\right]=E\left[\psi_t'\theta\right] \tag{1.3}$$

$$D\left[y_t|\psi_t,\Theta\right] = D\left[\psi_t^{'}\theta + e_t\right] = D\left[e_t\right] = r, \tag{1.4}$$

protože $\psi_t^{'}\theta$ je konstanta[1].

Pokud **parametry modelu neznáme**, musíme postupovat tak, jak jsme uvedli v kapitole o odhadování ve vztahu (**??**)

$$f\left(y_{t+1}|y\left(t\right)\right) = \int_{\Theta^*} f\left(y_{t+1}|\psi_t,\Theta\right) f\left(\Theta|y\left(t\right)\right) d\Theta, \tag{1.5}$$

kde jsme doplnili a ihned zase vy-integrovali parametry Θ a rozvinuli sdruženou hp podle řetězového pravidla[2].

Hustota pravděpodobnosti predikce, tj. prediktivní hp, je dána integrálem ze součinu hp modelu a hp popisující parametry, tj. aposteriorní hp. S aposteriorní hp jsme se již setkali při odhadu a víme, že tuto hp musíme postupně vyvíjet podle Bayesova vzorce počínaje od apriorní hp. Predikce modelované veličiny s modelem s neznámými parametry v sobě tedy obsahuje implicitně obě úlohy: odhad parametrů a předpověď výstupu.

Poznámka

Jednokroková předpověď výstupu (nebo jiné modelované veličiny) je velice důležitá. Řada úloh odhadu i řízení je založena na výpočtu chyby predikce $\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t$ jako rozdílu změřené veličiny a její predikce. Další akce se provádí tak, aby se tato chyba zmenšovala. $\triangleleft$

1.2 Vícekroková předpověď

Pro $k > 1$ v (1.1) hovoříme o vícekrokové předpovědi. Při jejím odvození budeme postupovat podobně jako při konstrukci jednokrokové predikce s modelem s neznámými parametry v (1.5). Postup budeme ilustrovat na příkladě **dvou-krokové předpovědi**

$$f\left(y_{t+2}|y\left(t\right)\right) = \int_{\Theta^*}\int_{y_{t+1}^*} f\left(y_{t+2},y_{t+1},\Theta|y\left(t\right)\right) dy_{t+1} d\Theta =$$

(rozklad podle řetězového pravidla)

$$= \int_{\Theta^*}\int_{y_{t+1}^*} f\left(y_{t+2}|y_{t+1}y\left(t\right),\Theta\right) f\left(y_{t+1}|y\left(t\right),\Theta\right) f\left(\Theta|y\left(t\right)\right) dy_{t+1} d\Theta =$$

(podmínky nezávislosti)

$$= \int_{\Theta^*}\int_{y_{t+1}^*} f\left(y_{t+2}|\psi_{t+2},\Theta\right) f\left(y_{t+1}|\psi_{t+1},\Theta\right) dy_{t+1} f\left(\Theta|y\left(t\right)\right) d\Theta \tag{1.6}$$

[1] Protože jak ψ_t, tak i Θ jsou v podmínce.

[2] V podmínce modelu se místo celé historie uplatní jen regresní vektor ψ_t.

Označíme-li

$$f\left(y_{t+2}|y\left(t\right),\Theta\right)=\int_{y_{t+1}^{*}}f\left(y_{t+2}|\psi_{t+2},\Theta\right)f\left(y_{t+1}|\psi_{t+1},\Theta\right)dy_{t+1}$$

jako prediktor se známými parametry modelu, pak prediktivní hp (1.6) lze zapsat podobně jako v případě jednokrokové předpovědi (1.5)

$$f\left(y_{t+2}|y\left(t\right)\right)=\int_{\Theta*}f\left(y_{t+2}|y\left(t\right),\Theta\right)f\left(\Theta|y\left(t\right)\right)d\Theta.$$

Obecná konstrukce prediktivní hp je již jednoduchým zobecněním uvedeného příkladu. Pro k-krokovou předpověď platí

$$f\left(y_{t+k}|y\left(t\right)\right)=\int_{\Theta*}f\left(y_{t+k}|y\left(t\right),\Theta\right)f\left(\Theta|y\left(t\right)\right)d\Theta,\tag{1.7}$$

kde

$$f\left(y_{t+k}|y\left(t\right),\Theta\right)=\int_{y_{t+k-1}}\cdots\int_{y_{t+1}}f\left(y_{t+k}|y\left(t+k-1\right)\right)\cdots f\left(y_{t+1}|y\left(t\right)\right)dy_{t+k-1}\cdots dy_{t+1}\tag{1.8}$$

je k-krokový prediktor s modelem se známými parametry.

Kritickým místem při výpočtu k-krokové předpovědi s modelem s neznámými parametry je integrál v rovnici (1.7) . Prediktor daný vztahem (1.8) je dán konvolucemi modelu a často je možno jej vyjádřit analyticky. Problém je ale ve výpočtu integrálu (1.7), protože aposteriorní hp je složitá funkce a její konvoluce s prediktorem je většinou analyticky nespočitatelná. Jedním ze způsobů, jak tuto potíž řešit, může být místo aposteriorní hp uvažovat jen bodové odhady parametrů (zanedbá se neurčitost v parametrech a číselné odhady se berou jako přesné). Pro bodové odhady parametrů $\hat{\Theta}_t$ je možno formálně psát hp

$$f\left(\Theta|d\left(t\right)\right)=\delta\left(\Theta-\hat{\Theta}_t\right)$$

ve tvaru Diracovy funkce: $\delta\left(0\right)$ je jedna jinak je rovna nule.

Dosadíme do (1.7)a dostaneme

$$f\left(y_{t+k}|y\left(t\right)\right)=\int_{\Theta*}f\left(y_{t+k}|y\left(t\right),\Theta\right)\delta\left(\Theta-\hat{\Theta}_t\right)d\Theta=f\left(y_{t+k}|y\left(t\right),\hat{\Theta}_t\right).\tag{1.9}$$

To znamená, že pro výpočet předpovědi stačí vzít prediktor (1.8) a na místo neznámých parametrů dosadit jejich bodové odhady.

1.3 Vícekroková bodová předpověď

Výpočet vícekrokové předpovědi výstupu s modelem s neznámými parametry je úloha tak složitá, že ji v praxi nelze použít. Ukážeme zde proto na příkladech některé jednodušší případy předpovědi a její řešení.

Předpověď se spojitým modelem

K významnému zjednodušení úlohy vícekrokové předpovědi výstupu systému dojde, jestliže přejdeme k bodovým odhadům, a to jak pro neznámé parametry modelu (1.9), tak i pro vyjádření předpovědi ve tvaru hodnoty $\hat{y}_{t+k}$. Bodovou předpověď výstupu pro lineární normální regresní model budeme demonstrovat v následujícím příkladě.

Příklad [bodová předpověď]

Uvažujme tříkrokovou bodovou predikci s modelem $y_{t+1} = a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + e_t$ s počáteční podmínkou $y_t = \xi_0$ a $y_{t-1} = \xi_{-1}$.

Dostáváme:

První krok

$$\hat{y}_{t+1} = a_0 y_t + a_1 y_{t-1} = a_0 \xi_0 + a_1 \xi_{-1},$$

Druhý krok

$$\begin{gathered}\hat{y}_{t+2} = a_0 y_{t+1} + a_1 y_t = a_0 \hat{y}_{t+1} + a_1 \xi_0 = \\ = a_0 \left(a_0 \xi_0 + a_1 \xi_{-1}\right) + a_1 \xi_0 = \left(a_0^2 + a_1\right) \xi_0 + a_0 a_1 \xi_{-1},\end{gathered}$$

Třetí krok

$$\begin{gathered}\hat{y}_{t+3} = a_0 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} = a_0 \hat{y}_{t+2} + a_1 \hat{y}_{t+1} = \\ = a_0 \left(\left(a_0^2 + a_1\right) \xi_0 + a_0 a_1 \xi_{-1}\right) + a_1 \left(a_0 \xi_0 + a_1 \xi_{-1}\right) = \\ = \left(a_0^3 + 2 a_0 a_1\right) \xi_0 + \left(a_0^2 a_1 + a_1^2\right) \xi_{-1}.\end{gathered}$$

Předpověď s normálním modelem, kterou jsme se zabývali v předchozím příkladě, lze zobecnit tím, že budeme počítat nikoli bodový odhad předpovědi, ale celo-prediktivní hp (samozřejmě pro známé parametry nebo parametry dosazené jako bodové odhady). Využijeme toho, že konvoluce dvou normálních rozdělení, které při výpočtu předpovědi vznikají, mají opět normální rozdělení. Není proto potřeba počítat celou prediktivní hp (integrály), ale napočítávat jen střední hodnoty a rozptyly. Konečná prediktivní hp je jimi plně určena. Postup výpočtu je následující: místo střední hodnoty (což je deterministická část regresního modelu) dosazujeme rovnici modelu i se šumem. Z výsledné hodnoty y_{t+k} pak určíme hledanou střední hodnotu a rozptyl. Situaci ilustruje následující příklad.

Příklad [předpověď pro normální rozdělení]

Určete dvou-krokovou predikci s modelem $y_{t+1} = ay_t + e_{t+1}$.

$$y_{t+2} = ay_{t+1} + e_{t+2} = a\left(ay_t + e_{t+1}\right) + e_{t+2} = a^2 y_t + e_{t+2} + ae_{t+1}.$$

Protože střední hodnota konstanty je konstanta a střední hodnota šumu je nula, je

$$E\left[y_{t+2}|y\left(t\right)\right] = a^2 y_t + E\left[e_{t+2} + ae_{t+1}\right] = a^2 y_t.$$

Protože platí $D\left[e_{t+2}\right] = D\left[e_{t+1}\right] = r$ a při vytknutí konstanty z rozptylu se tato konstanta umocní na druhou, bude

$$D\left[y_{t+2}|y\left(t\right)\right] = D\left[e_{t+2} + ae_{t+1}\right] = \left(1 + a^2\right) r.$$

Hp předpovědi má tvar

$$f\left(y_{t+2}|y\left(t\right)\right) = \mathcal{N}_{y_{t+2}}\left(a^2 y_t,\ \left(1 + a^2\right) r\right).$$

Předpověď s diskrétním modelem

Tak jako ve všech úlohách je i zde práce s diskrétním modelem jednoduchá (nemusí se řešit žádné integrály a pouze se násobí a sčítají prvky tabulek). Operace s tabulkami jsou však poněkud nezvyklé a mohou působit problémy. Tuto práci budeme demonstrovat v následujícím příkladě. Tento příklad byl vybrán jako autoregrese prvního řádu, což je případ obzvláště jednoduchý. V obecnějším případě (např. pro řízený model) je práce s tabulkami mnohem náročnější.

Příklad [předpověď s diskrétním modelem]

Predikci s diskrétním modelem ukážeme na tom nejjednodušším příkladu, tj. s neřízeným modelem prvního řádu $f\left(y_t|y_{t-1}\right)$ zadaným následující tabulkou.

$f\left(y_t\|y_{t-1}\right)$	y_t	
y_{t-1}	1	2
1	$\Theta_{1\|1}$	$\Theta_{2\|1}$
2	$\Theta_{1\|2}$	$\Theta_{2\|2}$

Budeme chtít vyjádřit obecně k-krokovou predikci $f\left(y_k|y_0\right)$ s počáteční podmínkou $y_0 = 1$. V tomto jednoduchém případě lze výsledek vyjádřit analyticky, takže si můžeme dovolit uvažovat parametry modelu obecně.

Pro lepší přehlednost odvodíme předpověď pro $k = 3$ a potom jednoduše zobecníme.

Rozkladem prediktivní pf (podle (1.6), pro $k = 3$) dostaneme

$$f\left(y_3|y_0\right) = \sum_{y_2=1}^{2} f\left(y_3|y_2\right) \underbrace{\sum_{y_1=1}^{2} f\left(y_2|y_1\right) f\left(y_1|y_0\right)}_{f\left(y_2|y_0\right)}. \tag{1.10}$$

Nejprve si všimněme dvou-krokové předpovědi $f\left(y_2|y_0\right)$ označené svorkou. Jedná se o součet součinů prvků tabulky (modelu). Tabulku, která zadává model $f\left(y_t|y_\tau\right)$, označíme M s prvky $m_{\tau,t}$ (všimněte si, že indexy u prvků tabulky jsou přehozené - první index jde svisle, druhý vodorovně - značení vychází ze zápisu podmíněné pravděpodobnosti). Dosadíme do předchozího výrazu pro předpověď a dostaneme

$$f\left(y_2|y_0\right) = \sum_{y_1=1}^{2} m_{y_1,y_2} m_{y_0,y_1} = \sum_{y_1=1}^{2} m^{'}_{y_2,y_1} m^{'}_{y_1,y_0} = M'M' = \left(M'\right)^2,$$

kde apostrof značí transpozici a $\left(M'\right)^2$ je kvadrát transponované matice. Součet součinů prvků tabulek modelu definuje součin matic.

Označíme-li tabulku pf předpovědi $f\left(y_2|y_0\right)$ jako M_2 bude platit

$$M^{'}_2 = M'M' \text{ a tedy } M_2 = M^2.$$

Dosadíme do tří-krokové předpovědi (1.10) a s využitím vztahu $M_2 = M^2$ dostaneme

$$f\left(y_3|y_0\right) = \sum_{y_2=1}^{2} f\left(y_3|y_2\right) f\left(y_2|y_0\right) = M'M^{'}_2 = \left(M_2 M\right)' = \left(M^3\right)'.$$

Jestliže tabulku tří-krokové předpovědi označíme $M^{'}_3$ bude platit

$$M_3 = M^3.$$

Pro větší přehlednost zavedeme model číselně: $\Theta_{1|1} = 0.3$, $\Theta_{2|1} = 1 - \Theta_{1|1} = 0.7$ a $\Theta_{1|2} = 0.6$, $\Theta_{2|2} = 1 - \Theta_{1|2} = 0.4$. Tedy tabulka M' bude

$$M' = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

a příslušná matice M (transponovaná tabulka) je

$$M = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Tříkroková předpověď $f\left(y_3|y_0\right)$ je reprezentována maticí

$$M_3 = M^3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51 & 0.42 \\ 0.49 & 0.58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.474 \\ 0.553 & 0.526 \end{bmatrix}.$$

Tabulka předpovědi bude dána transpozicí této matice, tedy

$$f\left(y_3|y_0\right)$$

y_0	$y_3 = 1$	$y_3 = 2$
1	0.447	0.553
2	0.474	0.526

Pro obecnou k-krokovou předpověď bude platit

$$M_k = M^k$$

a tabulka této předpovědi bude transpozicí, tedy

$$f\left(y_k|y_0\right) \rightarrow \left(M^k\right)'.$$

Hodnoty tabulky se po více krocích ustálí. Pro $k \geq 9$ vypadá tabulka následovně

$$f\left(y_k|y_0\right)$$

y_0	$y_k = 1$	$y_k = 2$
1	0.4615	0.5385
2	0.4615	0.5385

.

To znamená, že bez ohledu z jaké hodnoty y_0 jsme vycházeli, pro $k \geq 9$ předpovídáme $y_k = 1$ s pravděpodobností 0.4615 a $y_k = 2$ s pravděpodobností 0.5385 (což neodporuje zdravému rozumu).

Poznámka

Znovu připomeňme, že jednoduchost uvedeného příkladu je dána tím, že jsme mohli využít maticového počtu. V ostatních případech to jednoduše nelze a počítání je mnohem komplikovanější. ◁