1 Řízení se spojitým modelem

V této kapitole se stručně zmíníme o úloze optimálního řízení s popisem soustavy ve formě regresního modelu. Jestliže chceme hovořit o optimálním řízení, musíme nejprve definovat kritérium optimality. Protože pracujeme s veličinami ve formě náhodných procesů, je třeba kritérium psát jako střední hodnotu podmíněnou tím, co je nám v daném okamžiku k dispozici - apriorní znalost, tedy kritérium má tvar

$$E\left[\sum_{t=1}^{N} J_t |\, d\,(0)\right],$$

kde J_t je tzv. penalizační funkce, hodnotící řízení v okamžiku t. Nejčastěji se volí kvadratická penalizační funkce $J_t = y_t^2 + \omega u_t^2$, která řídí výstup na nulu a částečně pokutuje velké hodnoty řídící veličiny.

Hodnoty tohoto kritéria na celém intervalu řízení, tj. pro $t = 1, 2, \cdots, N$, nám umožní porovnávat různé způsoby řízení. Optimální řízení je takové, pro které je hodnota kritéria minimální.

Dynamické programování

Obecně lze ukázat, že optimální řídicí veličiny lze počítat rekurzivně odzadu (od konce intervalu řízení) aplikací následujících dvou kroků.

1. Výpočet střední hodnoty

$$\varphi_t = E\left[J_t + \varphi_{t+1}^* | u_t, d\,(t-1)\right], \tag{1.1}$$

   kde J_t označuje část kritéria J odpovídající času $J_t = y_t^2 + \omega u_t^2$.

2. Minimalizace

$$\varphi_t^* = \min_{u_t} \{\varphi_t\}, \tag{1.2}$$

   přičemž u_t, pro které je dosaženo minima, je optimálním řízením v kroku t.

Rekurze startuje na konci intervalu řízení, obecně pro $t = N$ s koncovou podmínkou $\varphi_{N+1}^* = 0$.

Postup syntézy řízení ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad

Uvažujeme následující zadání úlohy: Je dáno kvadratické kritérium optimality a model soustavy.

Kritérium

$$J = E\left[\sum_{t=1}^{3}\left(y_t^2 + \omega u_t^2\right)|d\left(0\right)\right].$$

Model

$$y_t = a y_{t-1} + b u_t + e_t,$$

kde a, b jsou známé parametry modelu, $e_t \sim N\left(0,\, r\right)$ je šum se známým rozptylem r je a y_0 je známá počáteční podmínka.

Cílem je navrhnout řídící strategii u_1, u_2, u_3 tak, aby bylo dosaženo minima kritéria J.

V tomto příkladě, kde $N = 3$, budeme postupně provádět oba zmíněné kroky. Pro $t = 3$ je $\varphi_4^* = 0$.

$\Rrightarrow$ Čas $t = 3$:

$$\varphi_3 = E\left[y_3^2 + \omega u_3^2 + \varphi_4^* | u_3, d\left(2\right)\right] = E\left[\left(a y_2 + b u_3 + e_3\right)^2 + \omega u_3^2 | u_3, d\left(2\right)\right] =$$

$$= \left(a y_2 + b u_3\right)^2 + r + \omega u_3^2 = \left(\omega + b^2\right)\left[u_3 + \frac{ab}{\omega + b^2} y_2\right]^2 + \frac{\omega a^2}{\omega + b^2} y_2^2 + r,$$

kde poslední úprava byla dosažena doplněním na čtverec v proměnné u_3 - viz ...

Minimalizace je velmi jednoduchá. Minima dosáhneme anulováním hranaté závorky (ta nemůže být menší než nula a výraz za ní je na u_3 nezávislý)

$$u_3 = -\frac{ab}{b^2 + \omega} y_2 = U_3 y_2,$$

kde $U_3 = -\frac{ab}{b^2+\omega}$.

Zbytek po minimalizaci dostaneme, jestliže za hranatou závorku dosadíme nulu

$$\varphi_3^* = \frac{\omega a^2}{\omega + b^2} y_2^2 + r = S_3 y_2^2 + T_3,$$

kde $S_3 = \frac{\omega a^2}{\omega + b^2}$, $\quad T_3 = r$.

$\Rrightarrow$ Čas $t = 2$:

$$\varphi_2 = E\left[y_2^2 + \omega u_2^2 + \varphi_3^* | u_2, d\left(1\right)\right] = E\left[y_2^2 + \omega u_2^2 + S_3 y_2^2 + T_3 | u_2, d\left(1\right)\right] =$$

(dosazeno za φ_3^*)

$$= E\left[\left(1 + S_3\right) y_2^2 + \omega u_2^2 + T_3 | u_2, d\left(1\right)\right] =$$

(spojeny členy s y_2^2)

$$= (1+S_3)\left\{(ay_1+bu_2)^2+r\right\}+\omega u_2^2+T_3 =$$

(středováno $y_2^2 \to (ay_1+bu_2)^2+r$)

$$= (1+S_3)\left(a^2y_1^2+2aby_1u_2+b^2u_2^2\right)+(1+S_3)\,r+\omega u_2^2+T_3 =$$

(umocněno)

$$= (1+S_3)\,a^2y_1^2+2\,(1+S_3)\,aby_1u_2+(1+S_3)\,b^2u_2^2+(1+S_3)\,r+\omega u_2^2+T_3 =$$

(roznásobeno)

$$= \left\{\omega+(1+S_3)\,b^2\right\}u_2^2+2\,(1+S_3)\,aby_1u_2+(1+S_3)\,a^2y_1^2+T_3+(1+S_3)\,r =$$

(upraveno na kvadratický trojčlen v u_2)

$$= \left\{\omega+(1+S_3)\,b^2\right\}\left[u_2^2+2\frac{(1+S_3)\,ab}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1u_2\right]+(1+S_3)\,a^2y_1^2+T_3+(1+S_3)\,r =$$

(vytknut koeficient $\left\{\omega+(1+S_3)\,b^2\right\}$)

$$= \left\{\omega+(1+S_3)\,b^2\right\}\left[u_2^2+2\frac{(1+S_3)\,ab}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1u_2+\left(\frac{(1+S_3)\,ab}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1\right)^2\right]-$$

$$-\frac{(1+S_3)^2\,a^2b^2}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1^2+(1+S_3)\,a^2y_1^2+T_3+(1+S_3)\,r =$$

(připraveno na doplnění na čtverec v u_3)

$$= \left\{\omega+(1+S_3)\,b^2\right\}\left[u_2^2+\frac{(1+S_3)\,ab}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1\right]^2-$$

$$\frac{\omega\,(1+S_3)\,a^2}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1^2+T_3+r = S_2y_1^2+T_2$$

(doplněno na čtverec v u_3)

Odtud plyne

$$u_2 = -\frac{(1+S_3)\,ab}{\omega+(1+S_3)\,b^2}y_1 = U_2y_1,$$

kde $U_2 = -\frac{(1+S_3)ab}{\omega+(1+S_3)b^2}$, a

$$\varphi_2^* = S_2y_1^2+T_2,$$

kde $S_2 = \frac{\omega(1+S_3)a^2}{\omega+(1+S_3)b^2}$, $\quad T_2 = T_3+(1+S_3)\,r$.

Zbývá dopočítat řízení pro poslední čas $t = 1$. To již ale nemusíme odvozovat. Stačí, když porovnáme výsledky z obou předchozích časů. Zjistíme, že můžeme psát obecně následující algoritmus:

Algoritmus dynamického programování pro regresní model 1. řádu

$$u_t = -\frac{(1+S_{t+1})\,ab}{\omega + (1+S_{t+1})\,b^2} y_{t-1}, \tag{1.3}$$

$$\varphi_t^* = S_t y_{t-1}^2 + T_t, \tag{1.4}$$

kde

$$S_t = \frac{\omega\,(1+S_{t+1})\,a^2}{\omega + (1+S_{t+1})\,b^2}, \quad T_t = T_{t+1} + (1+S_{t+1})\,r. \tag{1.5}$$

Rekurze postupuje proti času a startuje v čase N (tady $N = 3$) s hodnotou $S_{N+1} = 0$, odkud již vyjde $T_{N+1} = 1$.

Dokončíme příklad podle odvozené rekurze

$\Rrightarrow$ Čas $t = 1$:

$$u_1 = -\frac{(1+S_2)\,ab}{\omega + (1+S_2)\,b^2} y_0 = U_1 y_0,$$

$$\varphi_1^* = S_1 y_0^2 + T_1,$$

kde

$$S_1 = \frac{\omega\,(1+S_2)\,a^2}{\omega + (1+S_2)\,b^2}, \quad T_1 = T_2 + (1+S_2)\,r$$

a S_2, T_2 byly vypočteny v kroku $t = 2$.

Tím jsme vypočítali koeficienty U_3, U_2, U_1, ale řízení jsme zatím nemohli realizovat, protože jsme v čase $t = 0$ a hodnoty výstupu y_2 a y_1 zatím neznáme. Když jsme se dostali do času $t = 1$, závisí řízení na hodnotě y_0, kterou už známe. Můžeme tedy začít s řízením v reálném čase. Spočteme řízení $u_1 = U_1 y_0$ a aplikujeme je. V další periodě pro $t = 2$ změříme výstup y_1 (jako odezvu na aplikované u_1) a můžeme počítat $u_2 = U_2 y_1$, které opět aplikujme. Nakonec pro $t = 3$ změříme y_2, vypočteme $u_3 = U_3 y_2$ a aplikujeme jej. Tím jsme splnili zadání a optimálně řídili na intervalu řízení pro $t = 1, 2, 3$.

Výsledky, které jsme odvodili, jsou obecné a platí pro libovolně dlouhý interval řízení.

Ukázka programu na toto téma je v kapitole Programy, na str. **??**.

2 Řízení s diskrétním modelem

Jak jsme již uvedli v Kapitole **??**, obecný popis diskrétního dynamického systému dostaneme tak, že každé konfiguraci hodnot jeho datového vektoru $d_t = \left[y_t,\, \psi_t'\right]'$ přiřadíme přímo pravděpodobnost, tj.

$$f\left(y_t|\psi_t,\Theta\right) = \Theta_{y_t|\psi_t}.$$

V této kapitole budeme demonstrovat algoritmus dynamického programování s diskrétním modelem. Pro větší přehlednost provedeme výklad pro konkrétní jednoduchý příklad.

Je dán model

$$f\left(y_t|\left[u_t, y_{t-1}\right],\Theta\right) = \Theta_{y_t|\left[u_t,y_{t-1}\right]},$$

kde $[u_t, y_{t-1}] = \psi_t$ a $y_t,\, u_t \in \{1,2\}\,,\ \forall t$.

Kritérium pro řízení budeme definovat podobně jako u modelu pro každou konfiguraci datového vektoru zvlášť jako nezáporné číslo

$$\left\{J_{y_t|\left[u_t,y_{t-1}\right]} \geq 0\right\}_{y_t,u_t,y_{t-1}\in\{1,2\}}.$$

Pro představu lze jak model, tak i kritérium zapsat ve formě tabulky:

Model

$f\left(y_t|\left[u_t, y_{t-1}\right],\Theta\right)$

$u_t,\, y_{t-1}$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
1,1	$\Theta_{1\|11}$	$\Theta_{2\|11}$
1,2	$\Theta_{1\|12}$	$\Theta_{2\|12}$
2,1	$\Theta_{1\|21}$	$\Theta_{2\|21}$
2,2	$\Theta_{1\|22}$	$\Theta_{2\|22}$

,

Kritérium

J

$[u_t, y_{t-1}]$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
1,1	$J_{1\|11}$	$J_{2\|11}$
1,2	$J_{1\|12}$	$J_{2\|12}$
2.1	$J_{1\|21}$	$J_{2\|21}$
2,2	$J_{1\|22}$	$J_{2\|22}$

.

Určete optimální strategii řízení $u_1,\ u_2,\ u_3$, která minimalizuje zvolené kritérium řízení.

Pro řešení použijeme algoritmus (1.1) – (1.2) odvozený v minulé kapitole.

Zvolíme model a kritérium v konkrétním tvaru

$f\left(y_t\|\left[u_t, y_{t-1}\right], \Theta\right)$		
$u_t,\ y_{t-1}$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
1,1	0.7	0.3
1,2	0.2	0.8
2,1	0.9	0.1
2,2	0.4	0.6

J		
$u_t,\ y_{t-1}$	$y_t = 1$	$y_t = 2$
1,1	0	1
1,2	1	0
2,1	1	2
2,2	2	1

,

kde je v kritériu vyjádřena skutečnost, že nechceme změny ve výstupu a pro řízení preferujeme hodnotu 1. Řízení budeme opět počítat na horizontu $N = 3$.

Pro $t = N = 3$ je podle (1.1) nutné udělat středování

$$\varphi_3\left(u_3, y_2\right) = E\left[J|u_3, d\left(2\right)\right] = \sum_{y_3=1}^{2} J_{y_3|u_3 y_2}\Theta_{y_3|u_3 y_2} = J_{1|u_3 y_2}\Theta_{1|u_3 y_2} + J_{2|u_3 y_2}\Theta_{2|u_3 y_2} =$$

=

$u_3,\ y_2$	φ_3
1,1	$0 \times 0.7 + 1 \times 0.3 = 0.3$
1,2	$1 \times 0.2 + 0 \times 0.8 = 0.2$
2,1	$1 \times 0.9 + 2 \times 0.1 = 1.1$
2,2	$2 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 1.4$

a podle (1.2) minimalizace

$$\varphi_3^* = \min_{u_3} \varphi_3 = \begin{cases} 0.3 & \text{pro } \ y_2 = 1 \ \ (\text{při } \ u_3 = 1) \\ 0.2 & \text{pro } \ y_2 = 2 \ \ (\text{při } \ u_3 = 1) \end{cases}.$$

$\mathcal{S}_3$: Optimální řízení je tedy $u_3 = 1$, a to jak pro $y_2 = 1$, tak i pro $y_2 = 2$. Tím je optimalizace v kroku 3 hotova a přecházíme na krok 2.

Pro $t = N - 1 = 2$ potřebujeme zbytek φ_3^* ve formě tabulky. Regresní vektor v kroku 2 bude $[u_2, y_1]$, φ_3^* závisí jen na y_2 (tj. bude pro všechny kombinace hodnot regresního vektoru stejné), takže tabulka bude

φ_3^*		
$u_2,\ y_1$	$y_2 = 1$	$y_2 = 2$
1,1	0.3	0.2
1,2	0.3	0.2
2,1	0.3	0.2
2,2	0.3	0.2

Prvním krokem je opět středování pře y_2

$$\varphi_2 = E\left[J + \varphi_3^* | u_2, d(1)\right] = \sum_{y_2=1}^{2} \left(J_{y_2|u_2y_1} + \varphi_3^*\right)\Theta_{y_2|u_2y_1} =$$

$$= \left(J_{1|u_2y_1} + \varphi_3^*\right)\Theta_{1|u_2y_1} + \left(J_{2|u_3y_2} + \varphi_3^*\right)\Theta_{2|u_2y_1} =$$

$$= \begin{array}{c|c} u_2,\, y_1 & \varphi_2 \\ \hline 1{,}1 & 0.8 \\ 1{,}2 & 0.7 \\ 2{,}1 & 1.6 \\ 2{,}2 & 1.9 \end{array}$$

$\mathcal{S}_2$: $y_1 = 1$ je v řádku 1 a 3, v řádku 1 je menší hodnota kriteria $\rightarrow$ pro $y_1 = 1$ volíme $u_2 = 1$. Pro $y_2 = 2$ je minimum v řádku 2, a tedy volíme také $u_2 = 1$.

$$\varphi_2^* = \begin{cases} 0.8 & \text{pro } y_2 = 1, \\ 0.7 & \text{pro } y_2 = 2. \end{cases}$$

V čase $t = 1$ je

φ_2^* $u_1,\, y_0$	$y_1 = 1$	$y_{21} = 2$
1,1	0.8	0.7
1,2	0.8	0.7
2,1	0.8	0.7
2,2	0.8	0.7

a

$$= \begin{array}{c|c} u_1,\, y_0 & \varphi_1 \\ \hline 1{,}1 & 1.8 \\ 1{,}2 & 1.7 \\ 2{,}1 & 2.6 \\ 2{,}2 & 2.9 \end{array}$$

$\mathcal{S}_1$: odkud $u_1 = 1$ jak pro $y_0 = 1$ tak i pro $y_0 = 2$.

Strategie řízení je dána v bodech $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$.

Protože y_0 známe, můžeme určit u_1, aplikovat, změřit y_1 a tak dále.