1. Pro sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x,y) = C \cdot \sin(x+y)$ pro $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

   Protože se jedná o hustotu pravděpodobnosti a zároveň platí, že náhodné veličiny x a y jsou definovány na intervalu $\Rightarrow$ jedná se o spojité náhodné veličiny $\Rightarrow$ musíme integrovat

   Určete:

   (a) konstantu C

   jako je u náhodné veličiny plocha pod křivkou rovna 1, tak je u sdružené plocha pod „plochou“ rovna 1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 1 \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \cdot \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 1 \\
C \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) \cdot \cos(y)) + (\cos(x) \cdot \sin(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \\
= C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-\cos(x) \cdot \cos(y)) + (\sin(x) \cdot \sin(y))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}y &= \\
= C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} \cdot \cos(y)\right) + \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \cdot \sin(y)\right) - \left(\underbrace{-\cos(0)}_{-1} \cdot \cos(y)\right) - \left(\underbrace{\sin(0)}_{0} \cdot \sin(y)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y &= \\
= C \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y = C \cdot \left[-\cos(y) + \sin(y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= \\
C \cdot \left[\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \underbrace{\cos(0)}_{1} - \underbrace{\sin(0)}_{0}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2C &= 1 \\
\mathbf{C} &= \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

   V tomto případě je k zjištění konstanty C integrovat 2x a to přes funkci x a y (je jedno v jakém pořadí). Je důležité si uvědomit, že v případě, že integruji přes x, jsou všechny proměnné y vlastně konstanta. Z toho důvodu není složité integrovat, jen si dávat pozor na postup. V tomto případě se nejdříve integrovalo přes x a až poté přes y.

   (b) obě marginální pravděpodobností funkce

   je důležité si pamatovat vzoreček pro marginální pravděpodobnostní funkce. V tuto chvíli se integruje pouze podle jedné proměnné. Stále je použita varianta, kde není substituce. Pozor, nemusí platit, že $f(y)$ je to samé co $f(x)$ jen s jinou proměnnou

$$\begin{aligned}
\mathbf{f(y)} &= \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) \cdot \cos(y)) + (\cos(x) \cdot \sin(y))\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\left[(-\cos(x) \cdot \cos(y)) + (\sin(x) \cdot \sin(y))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{1}{2}}(\sin(\mathbf{y}) + \cos(\mathbf{y})) \\
\mathbf{f(x)} &= \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) \cdot \cos(y)) + (\cos(x) \cdot \sin(y))\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2}\left[(-\cos(x) \cdot \cos(y)) + (\sin(x) \cdot \sin(y))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{1}{2}}(\sin(\mathbf{x}) + \cos(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

   Lze použít i substituci

   kdo chce použít substituci pro výpočet, lze to jednoduše takto.

$$\begin{vmatrix} t & x+y \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \text{ resp. } \begin{vmatrix} t & x+y \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}y \end{vmatrix}$$

(c) obě podmíněné pravděpodobnostní funkce

Podmíněná pravděpodobnost lze opět vypočítat pouze prostým dosazením do základních vzorečků.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{2}\sin(x+y)}{\frac{1}{2}(\sin(x)+\cos(x))} = \frac{\sin(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{(\sin(\mathbf{x})+\cos(\mathbf{x}))} \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}\sin(x+y)}{\frac{1}{2}(\sin(y)+\cos(y))} = \frac{\sin(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{(\sin(\mathbf{y})+\cos(\mathbf{y}))} \end{aligned}$$