Náhodná veličina X je určena hustotou pravděpodobností:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x^3 & \text{pro } x \in (1;2) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

máme hustotu pravděpodobnosti na intervalu ⇒ jedná se o spojitou náhodnou veličinu

1. vypočtěte konstantu C

integrál přes celou funkci musí být roven celé pravděpodobnosti, tedy platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 C \cdot x^3 \mathrm{d}x = C\int_1^2 x^3 \mathrm{d}x = C\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 &= 1 \\ C\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = C\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}C &= 1 \\ C &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

dále tedy pracujeme s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{15} \cdot x^3 & \text{pro } x \in (1;2) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

2. vypočtěte distribuční funkci náhodné veličiny X,

nahrazení t za x je pouze náhrada, aby výsledná distribuční funkce byla s proměnnou x. Integrál je od 1, tzn. od dolní meze, kde funkce nabývá hodnoty

$$\mathbf{F(x)} = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{4}{15} \cdot t^3 \mathrm{d}t = \left[\frac{4}{15} \cdot \frac{t^4}{4}\right]_1^x = \mathbf{\frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{15}}$$

kontrola:

$F(1) = \frac{1}{15}1^4 - \frac{1}{15} = \frac{1}{15} - \frac{1}{15} = 0$ ✓
$F(2) = \frac{1}{15}2^4 - \frac{1}{15} = \frac{16}{15} - \frac{1}{15} = 1$ ✓ ⇒ověřeno, že je spočtena distribuční funkce správně

3. určete pravděpodobnost toho, že X je větší než 0.1, ale menší než 1.6,

Tato úloha lze vyřešit dvěma způsoby: (i) přes hustotu pravděpodobnosti (složitější varianta) nebo (ii) přes distribuční funkci (lehčí varianta)

Distrubuční funkce dává pravděpodobnost v bodě, tedy $P(X \leq x)$. Rozdíl dvou distribučních funkcí tedy dá hledanou hodnotu pravděpodobnosti. $F(0,1)$ jsme změnili za $F(1)$, protože pravděpodobnost, že $x < 1$ je rovna 0.

$$\begin{aligned} \mathbf{P(0,1 < X < 1,6)} &= F(1,6) - F(0,1) = F(1,6) - F(1) = F(1,6) \\ &= \frac{1}{15}(1,6)^4 - \frac{1}{15} = \frac{1}{15}6,5536 - \frac{1}{15} = \mathbf{0,37} \end{aligned}$$

kontrola: doplněk musí být roven 0,63, protože $(F(1,6) - F(1)) + (F(2) - F(1,6)) = 1$ (celá pravděpodobnost)

$P(1,6 < X < 2) = F(2) - F(1,6) = \left(\frac{1}{15}(2)^4 - \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{1}{15}(1,6)^4 - \frac{1}{15}\right) = \frac{16}{15} - \frac{1}{15} - \frac{1}{15}6,5536 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15} - \frac{1}{15}6,5536 = 0,63$ ✓

4. určete střední hodnotu náhodné veličiny X

Kontrola na střední hodnotu není jednoduchá jako v předchozích případech. Ale je důležité, by střední hodnota ležela v zadaném intervalu, v tomto případě mezi 1 a 2. Pokud neleží, je to špatně

$$\begin{aligned} \mathbf{E[X]} &= \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x \cdot \frac{4}{15}x^3 \mathrm{d}x = \frac{4}{15}\int_1^2 x^4 \mathrm{d}x = \frac{4}{15}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{4}{15}\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) = \\ &= \frac{4}{15}\frac{31}{5} = \frac{124}{75} = \mathbf{1,65} \end{aligned}$$

5. určete rozptyl náhodné veličiny X

Doporučuji použít následující vzorec $D[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$ výpočet je výrazně jednodušší a není potřeba velká znalost integrování (vyhneme se případně per partes apod.) Na následujícím postupu si ukážeme jak na to:

(a) nejprve si spočítáme $(E[X])^2$, protože $E[X]$ je střední hodnota a tu jsme spočítali v předchozím kroku

Pozor! pokud máme špatně spočítanou střední hodnotu, bude i špatně rozptyl.

$$(E[X])^2 \quad = \quad 1,65^2 = 2.7225$$

(b) poté si spočítáme $E\left[X^2\right]$, kde je výpočet podobný výpočtu střední hodnoty s jedním rozdílem – ve vzorci použijeme x^2 místo x

$$E\left[X^2\right] \quad = \quad \int\limits_a^b x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2 \cdot \frac{4}{15}x^3 \mathrm{d}x = \frac{4}{15}\int\limits_1^2 x^5 \mathrm{d}x = \frac{4}{15}\left[\frac{x^6}{5}\right]_1^2 = 2,8$$

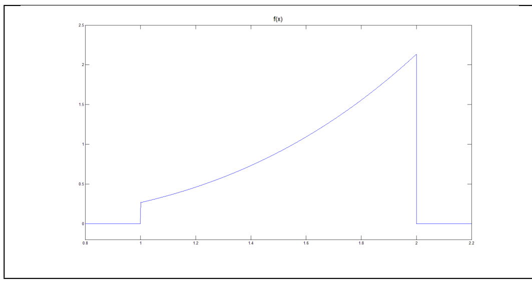
(c) nakonec vypočteme rozptyl jako rozdíl dvou výše vypočítaných hodnot

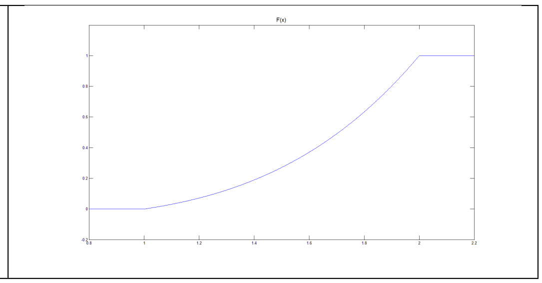
Ani zde není přímá kontrola. Ale pokud Vám vyjde rozptyl záporný, máte to špatně!

$$\mathbf{D}[\mathbf{X}] \quad = \quad E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = 2,8 - 2,7225 = \mathbf{0,0775}$$

6. nakreslete hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci (včetně kompletního popisu os)

Pozor: Tento popis není kompletní, chybí popis os.





hustota pravděpodobnosti	distribuční funkce