Charakteristiky polohy a variability

18. března 2016

Instrukce:

Projděte si všechny příklady. Každý příklad se snažte pochopit. Pak vymyslete a vyřešte příklad podobný. Tím se ujistíte, že příkladu rozumíte. Další příklady najdete na stránkách Ivana Nagye.

Učivo:

Čtyři situace v pravděpodobnosti a statistice
Charakteristiky polohy a variability.
Kvantily.

Kdy použít jaký vzorec pro střední hodnotu a rozptyl

data	kompletní = základní soubor	$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{n}$
	nekompletní = výběrový soubor	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
pravd. funkce	diskrétní rozdělení	$\mu = \sum_\Omega x_i \cdot f(x_i)$	$\sigma^2 = \sum_\Omega (x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)$
	spojité rozdělení	$\mu = \int_\Omega x \cdot f(x) \cdot dx$	$\sigma^2 = \int_\Omega (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$

Charakteristiky

Máme výběrový soubor: 6, 7, 3, 15, 6, 5, 9, 9, 24, 3, 5, 7, 9, 4.
Zjistěte střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, modus, medián, dolní a horní kvartil a mezikvartilové rozpětí.

Střední hodnota výběrového souboru $\overline{x}$
$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 8$

Rozptyl výběrového souboru

$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \dots$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
6	-2	4
7	-1	1
3	-5	25
15	7	49
6	-2	4
5	-3	9
9	1	1
9	1	1
24	16	256
3	-5	25
5	-3	9
7	-1	1
9	1	1
4	-4	16
		402

$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{402}{13} = 30,92$

Směrodatná odchylka
$s = \sqrt{s^2} = 5,56$

Modus
= nejčastější hodnota: $\hat{x} = 9$

Medián
Nejprve srovnám soubor: 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 9, 15, 24
Uprostřed jsou dvě čísla; udělám z nich průměr: $\tilde{x} = \frac{6+7}{2} = 6,5$

Kvartily
Rozdělím srovnaný soubor na čtvrtiny: 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, |7, 7, 9, 9, 9, 15, 24
Spodní kvartil: $\tilde{x}_{0,25} = 5$
Horní kvartil: $\tilde{x}_{0,75} = 9$

Mezikvartilové rozpětí
$R = \tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25} = 9 - 5 = 4$

Máme základní soubor: 6, 7, 3, 15, 6, 5, 9, 9, 24, 3, 5, 7, 9, 4.
Zjistěte směrodatnou odchylku.

Střední hodnota základního souboru $\overline{x}$
$\mu = \frac{\sum x_i}{n} = 8$

Rozptyl základního souboru
$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} = \ldots$

x_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$
6	-2	4
7	-1	1
3	-5	25
15	7	49
6	-2	4
5	-3	9
9	1	1
9	1	1
24	16	256
3	-5	25
5	-3	9
7	-1	1
9	1	1
4	-4	16
		402

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{402}{14} = 28,71$

Směrodatná odchylka
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 5,36$

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ hustotu pravděpodobnosti: $f(x) = 2x$. Jinak nula. Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku tohoto rozdělení.

Známe rozdělení této spojité náhodné veličiny. Použijeme proto patřičné vzorce.

$$\mu = \int_{\Omega} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 2x \cdot dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{2}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_\Omega (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) \cdot 2x \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) \cdot dx = \\
&= \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{18}x^2\right]_0^1 = \\
&= \left[\frac{2}{4}1^4 - \frac{8}{9}1^3 + \frac{8}{18}1^2\right] - \left[\frac{2}{4}0^4 - \frac{8}{9}0^3 + \frac{8}{18}0^2\right] = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9-16+8}{18} = \frac{1}{18} \doteq 0,0556
\end{aligned}
$$

$$
\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{18}} \doteq 0,236
$$

Náhodná veličina definovaná na základním prostoru $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$ má rozdělení:

$$
f(k) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{k}
$$

Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku tohoto rozdělení.

Známe rozdělení této diskrétní náhodné veličiny. Použijeme proto patřičné vzorce.

$$
\mu = \sum_\Omega k \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot f(k) = ...
$$

$$
\sigma^2 = \sum_\Omega (k-\mu)^2 \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{4} (k-\mu)^2 \cdot f(k) = ...
$$

k	$f(k)$	$k \cdot f(k)$	$k-\mu$	$(k-\mu)^2$	$(k-\mu)^2 \cdot f(k)$
0	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{0} = \frac{1}{16}$	0	-2	4	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{1} = \frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$	-1	1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6}{16}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0
3	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{3} = \frac{4}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	2	4	$\frac{4}{16}$
		2			1

$$\mu = 2$$

$$\sigma^2 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1$$